

物理学入門：エントロピーについて

成清，修
九州大学大学院理学研究院物理学部門

<https://hdl.handle.net/2324/6758968>

出版情報：2023-02-02
バージョン：
権利関係：



物理学入門

「エントロピーについて」

九州大学・理学部・物理学科

成清 修

物理学科 1 年生向けの入門的講義 3 コマの講義資料です。
情報エントロピーを導入し熱力学との関係を議論します。

第1回

まず、どの方面に向けての入門なのかを①と②で示しました。ここ数十年、情報を根底とした物理学の再構築が進んできています。①と②はそのうちのエントロピー的側面の代表例です。そこでは、情報量がエントロピーで表現されます。

マクスウェルのデモンのパラドクスについて①で簡単に紹介しました。この議論では相対エントロピー（実際は相互情報量）が用いられます。

ブラックホールにおける情報消失のパラドクスについて②で簡単に紹介しました。この議論ではエンタングルメントのエントロピーが用いられます。（エンタングルメントのエントロピーについては、量子力学で学ぶことになり、将来の楽しみに取っておきます）

レポート課題を③で示しました。この講義で行った説明をまとめてもらっても良いし、自分でもっと良い説明を見つけてもらっても良いです。

知らないことを教えるための通信情報量として情報量を考えます。④から⑦ではサイコロの例で考えました。それを一般化した結果が⑦の式

$$I(MN) = I(M) + I(N)$$

です。ここでは、 M 個の選択肢が同様に確からしく、また、 N 個の選択肢も同様に確からしいことが重要です。

例えば話として、 M 個の丁目のすべてが N 個の番地から成っていて、すべての

番地の大きさが等しいような場合です。この地域の地図でランダムな当てを行って、当たった場所が m 丁目 n 番地であったことを伝えるのに必要な情報量が $I(MN)$ ですが、それは丁目についての情報 $I(M)$ と番地についての情報 $I(N)$ の和となります。

N 個の同様に確からしい事象のうちのひとつが起こったことを知らせる通信情報量は $\log_2 N$ となります。⑧と⑨のこの式が、情報理論の根底となる重要な式です。

次に、⑩から⑭の的当ての議論に対しては、上記の例え話の丁目の設定を変更して、大きさの異なる W 個の丁目を考えます。 i 丁目は n_i 番地まであり、各丁目の大きさは異なりますが、すべての番地の大きさは等しいとします。ここでは、 $N = \sum_{i=1}^W n_i$ とします。⑬の式

$$\log_2 N = I_i + \log_2 n_i$$

は当たった場所が i 丁目 j 番地であったことを伝えるのに必要な情報量 $\log_2 N$ が、丁目についての情報 I_i と番地についての情報 $\log_2 n_i$ の和となることを表しています。この議論では、最も細かい単位（例え話では番地）で事象が等確率で起こることが重要で、それに対する情報量として、 $\log_2 N$ と $\log_2 n_i$ を用いることができます。その際に未知数として、 I_i を決めることができます

$$I_i = \log_2 N - \log_2 n_i$$

となります。この式の意味は簡単ですが、⑭の最後のように確率を用いて書く

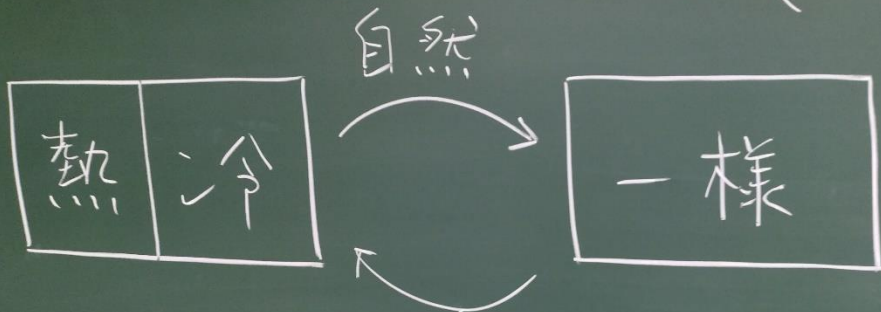
と意味が読み取りにくくなるかもしれません。(第3回に出てくる条件つき確率なども、ベン図を書いて、場合の数で見ると意味が簡単にわかりますが、確率を用いて表すと意味が読み取りにくくなるような気がします)

シャノンのエントロピーは⑮のように情報量の期待値として導入されます。

相対エントロピーは⑯から㉔で示したように、情報量ベクトルの成分の差の期待値として導入されます。

第2回はシャノンのエントロピー、第3回は相対エントロピーが活躍することになります。

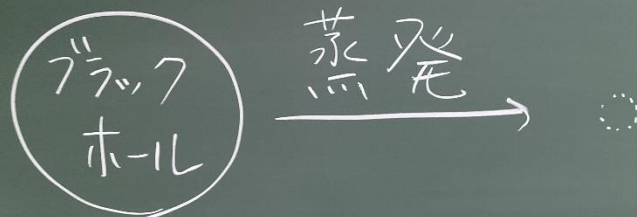
スクウェアのデモン(古典気体)



※ 相対エントロピー

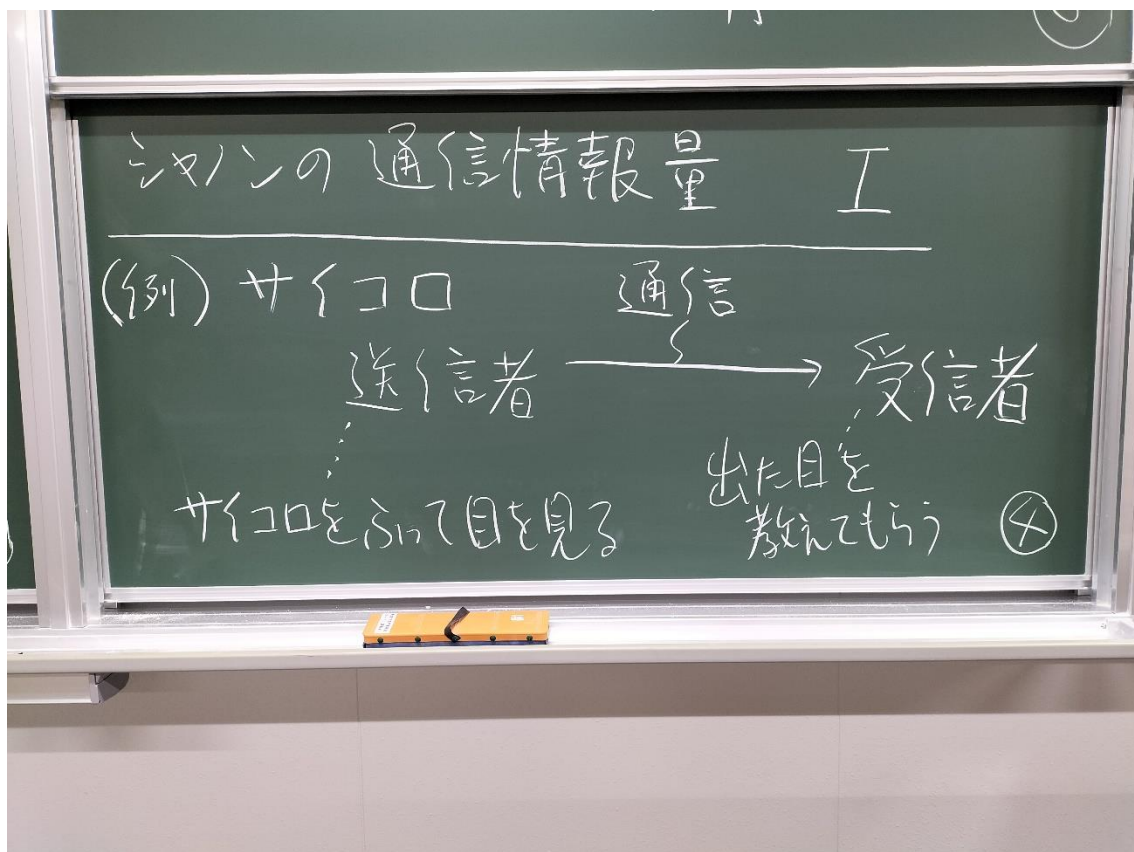
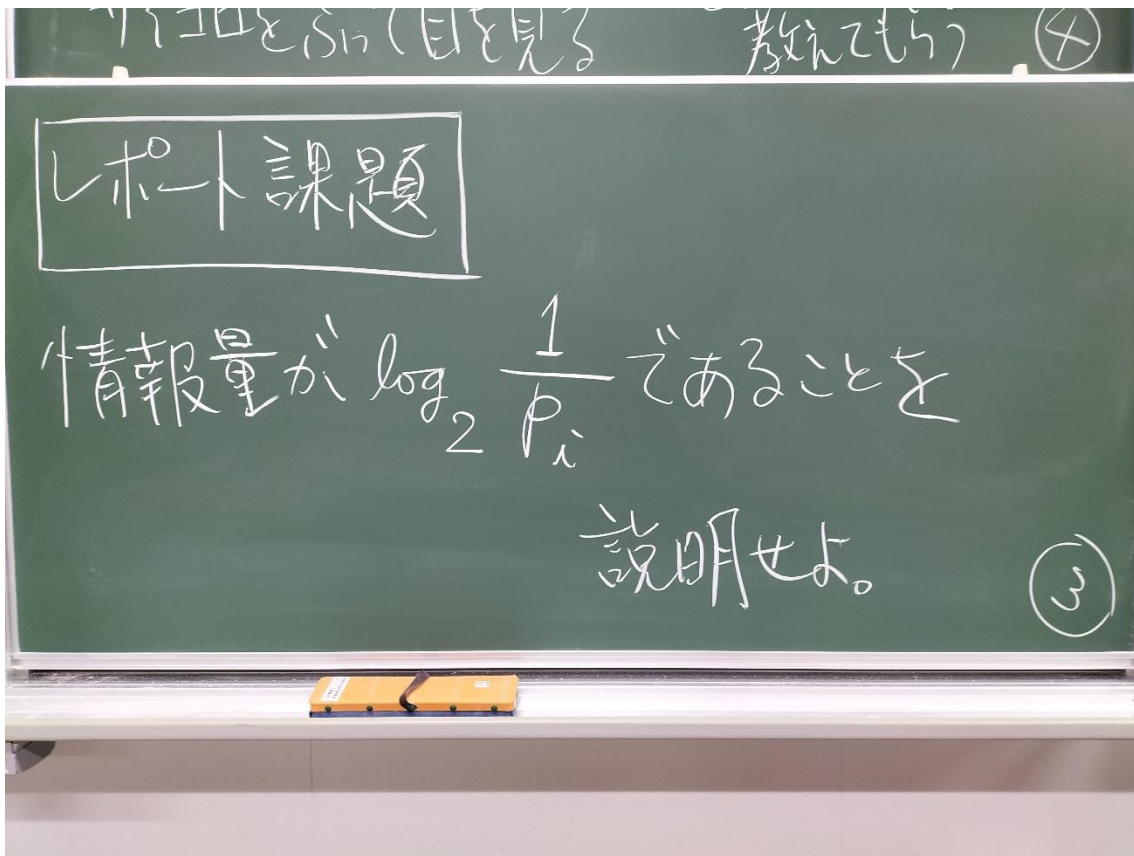
(1)

ブラックホールでの情報消失



※ エンタングルメントのエントロピー

(2)



奇・偶について $I(2)$, 小・中・大について $I(3)$ (6)

1ステップの通信

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ について $I(6)$

※どの目が出る確率も等しい

(5)

2ステップの通信

奇			偶		
{	1	}	{	2	}
	3			4	
	5			6	
	}			}	
小	中	大	小	中	大

奇・偶について $I(2)$, 小・中・大について $I(3)$ (6)

(8)

1ステップ: $I(6) = I(2) + I(3)$: 2ステップ



一般に

$$I(M \cdot N) = I(M) + I(N) \quad (7)$$

受信者の知らない情報量の期待値 — (5)

よって, $I(N) = C \cdot \log_a N$ とすればよい.

最小の通信量 $I(2) = 1$ bit として.

$$I(N) = \log_2 N \quad (\text{binary digit}) \quad (8)$$

B_1 | | | | | B_2 (10)

N 個の等価な選択肢について

$$I(N) = \log_2 N$$

等価でない場合 (9)

等価でない場合 (9)

(例) 的当て

ブロックの数 $W=4$
 小区画の数 $N=36$

(10)

(12)

- ・ 玉をランダムに目的に当てる。
- ・ W 種のブロック $B_1, B_2, \dots, B_W$ があって、それぞれに当たる確率を $p_1, p_2, \dots, p_W$ とする。
(p_i はブロックの面積に比例)

(11)

(11)

- ・ 各ブロックは n_i 個の小区画から成っていて、各小区画に玉が当たる確率はすべて等しい。

∴ 小区画の数 n を N とし、 $p_i = n_i / N$

(12)

成り立つ (14)

ある玉がどの小区画に当たったかについての通信情報量

$$1 \text{ ステップ: } \log_2 N = I_i + \log_2 n_i : 2 \text{ ステップ}$$



等しい選択肢に対する情報量

(13)

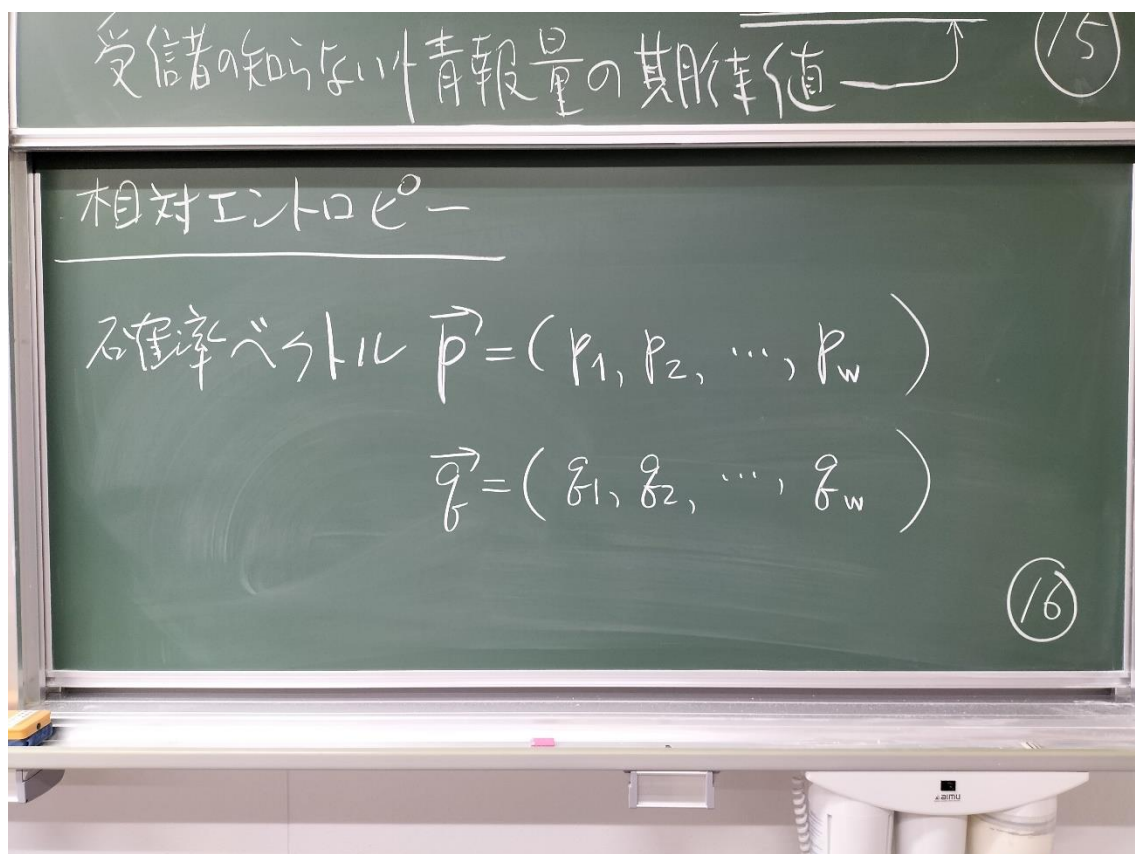
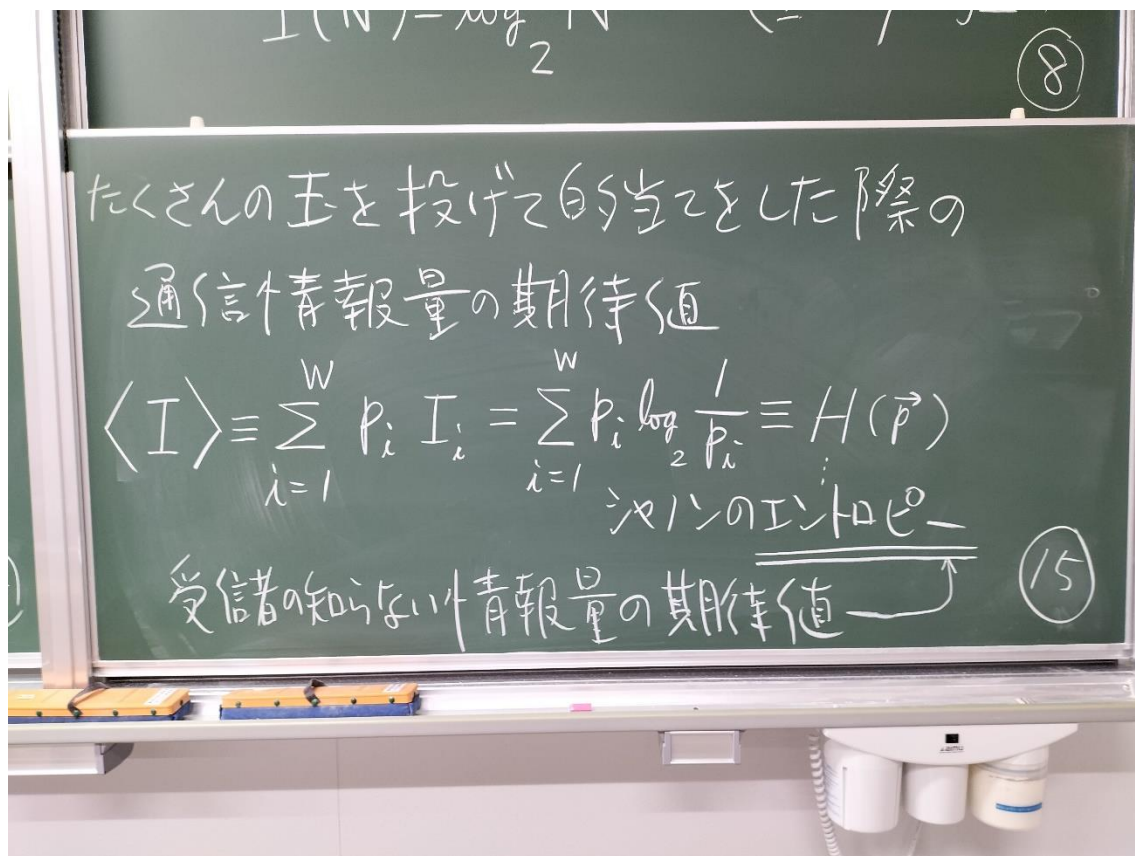
等しい選択肢に対する情報量

(13)

I_i : i 番目のブロックに当たったことを知らせる
(各ブロックは非等しい) 情報量

$$\therefore I_i = \log_2 \frac{N}{n_i} = \log_2 \frac{1}{p_i} \leftarrow \begin{array}{l} \text{任意の事象の} \\ \text{確率について} \end{array}$$

成り立つ (14)

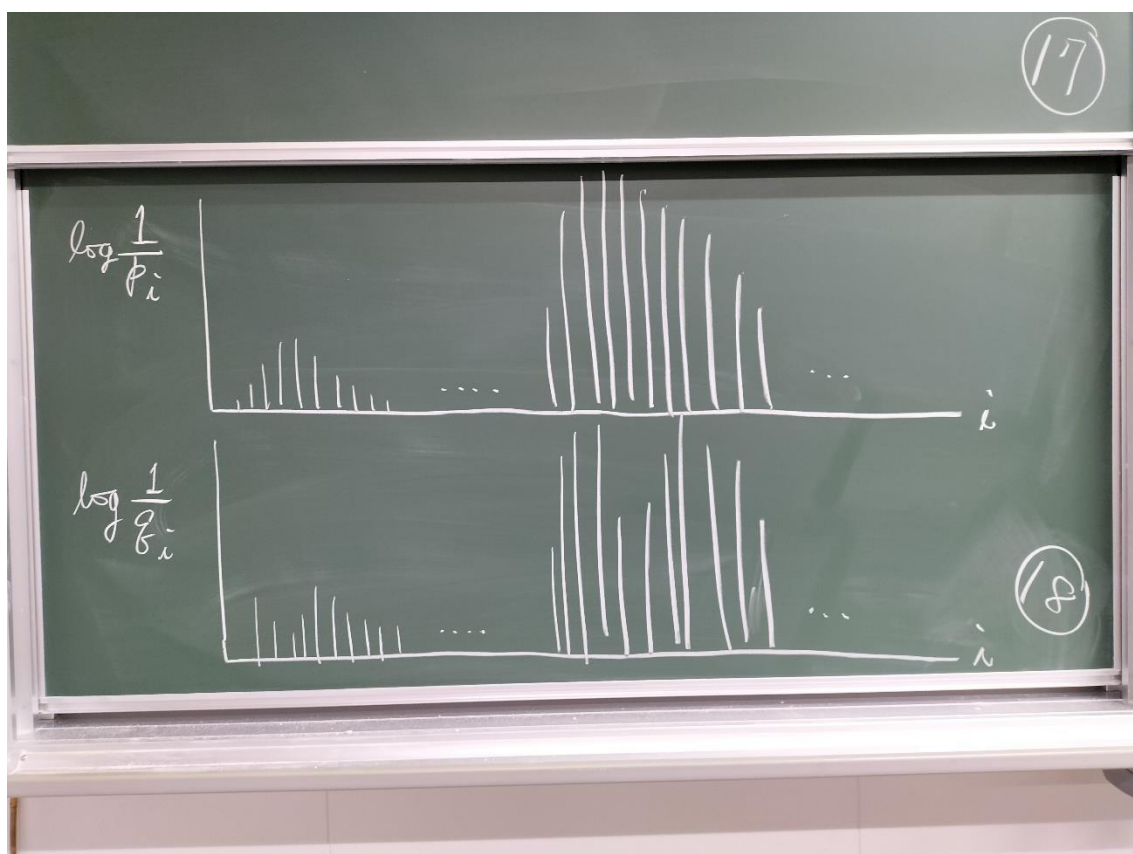


情報量ベクトル $\left(\log \frac{1}{p_1}, \log \frac{1}{p_2}, \dots, \log \frac{1}{p_w} \right)$

$\left(\log \frac{1}{g_1}, \log \frac{1}{g_2}, \dots, \log \frac{1}{g_w} \right)$

(18)

(17)



非対称: $H(\vec{p}|\vec{q}) \neq H(\vec{q}|\vec{p})$ (20)

成分の差の期待値(直で比較する)

$\vec{p}$ から見た $\vec{q}$

$$H(\vec{p}|\vec{q}) = \sum_{i=1}^W p_i \left(\log \frac{1}{q_i} - \log \frac{1}{p_i} \right)$$

(19)

(19)

$\vec{q}$ から見た $\vec{p}$

$$H(\vec{q}|\vec{p}) = \sum_{i=1}^W q_i \left(\log \frac{1}{p_i} - \log \frac{1}{q_i} \right)$$

非対称: $H(\vec{p}|\vec{q}) \neq H(\vec{q}|\vec{p})$ (20)

第2回

確率過程（時間発展が確率的）ではエントロピーが増大することを前半の①から⑯で議論しました。

ラプラスのデモンのように、水分子まで含めてすべての運動を追跡（決定論的記述）できれば、常時すべての情報を把握しているデモンにとってのエントロピーは常に0となります。

他方、ブラウン運動するインク粒子の運動を確率過程として見ている観測者のエントロピーは増大します。

このように、情報量（の期待値）であるエントロピーは、誰にとっての情報なのかということに依存することになります。

確率過程を記述する方程式はマスター方程式のような構造を持ちます。

インク粒子の言葉で言えば、1粒子あたりの遷移率が定義され、起こる遷移の数は始点となる観測領域にあるインク粒子の数に比例します。このとき、実際の物理系で遷移率がどのように決まっているかという詳細にはよらずに、確率ベクトルが⑨の等重率ベクトルに収束していきます。

これは、すべての観測領域でインク粒子の数が同じになるように時間発展していくということですが、「遷移の数が始点となる観測領域にあるインク粒子の数に比例する」という方程式の構造からの自明（現象としてはインクが拡散して一様になる）な帰結です。

決定論的な時間発展では、⑬のように粒子の軌道が一意的なので、エントロピーは0となります。

確率論的な時間発展では、⑭のように粒子が取り得る軌道が増殖し、実際に生じた軌道がどれなのかは観測していないので、知らない情報としてのエントロピーが増大します。（観測しているのは、それぞれの観測領域にあるインク粒子の数だけ）

後半の⑰から⑳では、熱浴と接した物理系の確率ベクトルがギブス分布を成分とする確率ベクトルに収束することを論じました。

ここでは、停留条件しか調べていませんが、物理系が確率的に時間発展した後、平衡に達して停留条件を満たすようになったと考えます。

熱浴の時間発展は追跡不能なので、その物理系への影響の記述は確率的（熱的）となります。

ギブス分布を成分とする確率ベクトルが、次回、重要な役割をもつことになります。

(W=9)

(2)

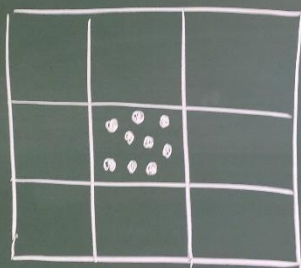
ボルツマンのH定理 (エントロピー増大則)

シャノンの
エントロピー $H = - \sum_{i=1}^W p_i \log p_i$ ["bit"]

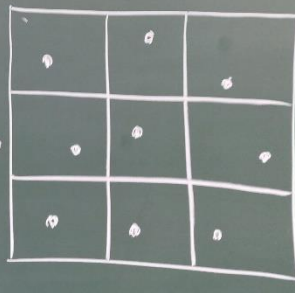
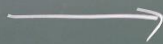
これから, $\log$ は自然対数とする

(例) インクの拡散 (インク粒子の代わりに無数の水分子)

(例) インクの拡散 (インク粒子の代わりに無数の水分子)



(W=9)



(1)

(2)

観測領域 $C_1, C_2, \dots, C_w$

インク粒子を C_i に見出す確率 p_i

中心の観測領域を C_1 として、

$$\text{最初は } p_i = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{最初は } p_i = \begin{cases} 0 & (i \neq 1) \end{cases} \quad (3)$$

十分に時間がたつと、 $p_i = \frac{1}{w}$

マスター方程式 (時間スケールはマクロ)

n_i : C_i にあるインク粒子の数

$$N \equiv \sum_{i=1}^w n_i$$

(4)

(6)

$$\frac{\Delta n_i}{\Delta t} = \sum_{k=1}^W \left(\underbrace{a_{ik} n_k}_{\text{流入}} - \underbrace{a_{ki} n_i}_{\text{流出}} \right)$$

k から i への流入

i から k への流出

遷移率 $a_{ik} = a_{ki} \leftarrow$ 運動方程式の時間反転
対称性 (5)

遷移率 $a_{ik} = a_{ki} \leftarrow$ 運動方程式の時間反転
対称性 (5)

一つの粒子が単位時間で遷移する確率
 $p_i = n_i / N$ について書くと、(量子論でも成立)

$$\frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \sum_{k=1}^W \left(a_{ik} p_k - a_{ki} p_i \right)$$

(6)

$$\therefore \frac{\Delta H}{\Delta t} \geq 0 \text{ (單調增加)}$$

(8)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta H}{\Delta t} &= - \sum_i \left(\log p_i + 1 \right) \frac{\Delta p_i}{\Delta t} \\ &= - \sum_i \sum_k \left(\log p_i + 1 \right) (a_{ik} p_k - a_{ki} p_i) \\ &= - \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \left\{ \left(\log p_i + 1 \right) (a_{ik} p_k - a_{ki} p_i) \right. \\ &\quad \left. + \left(\log p_k + 1 \right) (a_{ki} p_i - a_{ik} p_k) \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$+ \left(\log p_k + 1 \right) (a_{ki} p_i - a_{ik} p_k) \} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k a_{ik} (p_i - p_k) (\log p_i - \log p_k)$$

$$\text{ここで, } a_{ik} > 0$$

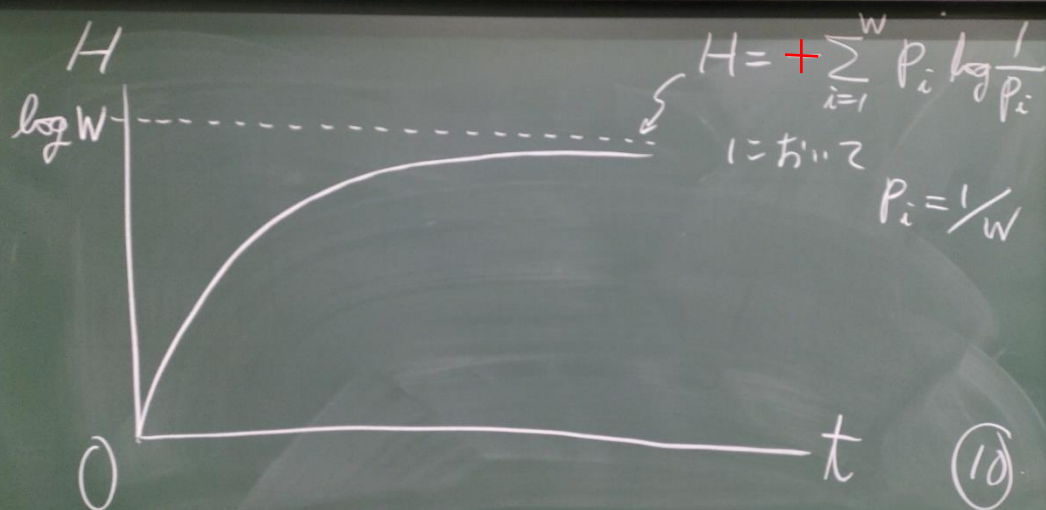
$$0 \leq x, y \leq 1$$

$$f(x, y) \equiv (x - y) (\log x - \log y) \geq 0$$

$$\therefore \frac{\Delta H}{\Delta t} \geq 0 \text{ (單調增加)}$$

(8)

$(a_{ik} p_k - a_{ki} p_i)$: マクロな流れ
 マクロな流れがなくなる 平衡状態では、
 すべての i と k の組について $p_i = p_k$
 すなわち、 $p_i = 1/W$ (等重率)



このとき $H = \log W$

(12)

- 系について知っていることが最大 (知らないことが最小)

$$p_i = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases}$$

あるシンク粒子は確実に C_1 にある

このとき $H = 0$

(11)

このとき $H = 0$

(11)

- 系について知っていることが最小 (知らないことが最大)

$$p_i = \frac{1}{W}$$

あるシンク粒子がどこにいるか いちばん
不確実

このとき $H = \log W$

(12)

(14)

時間を離散的にとって（自らの位置）
 シンク粒子の軌道を図示



決定論

エントロピーは変化しない (13)

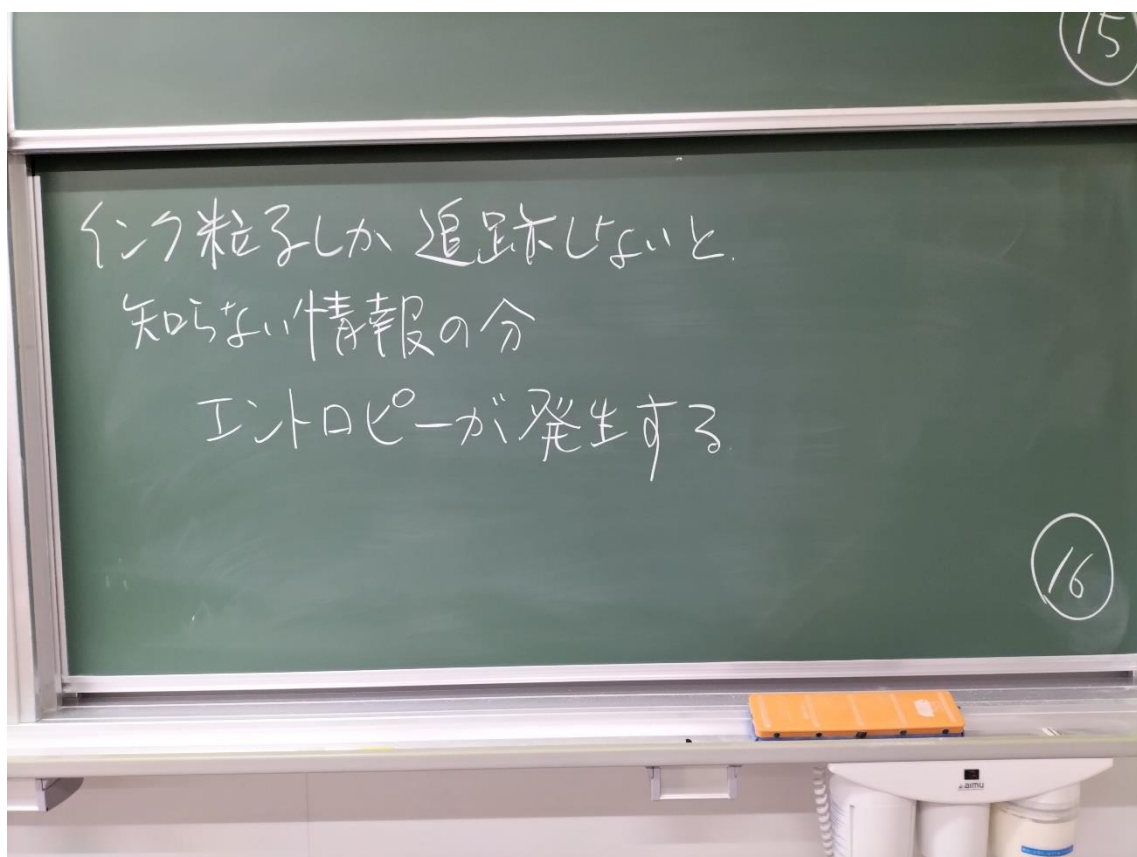
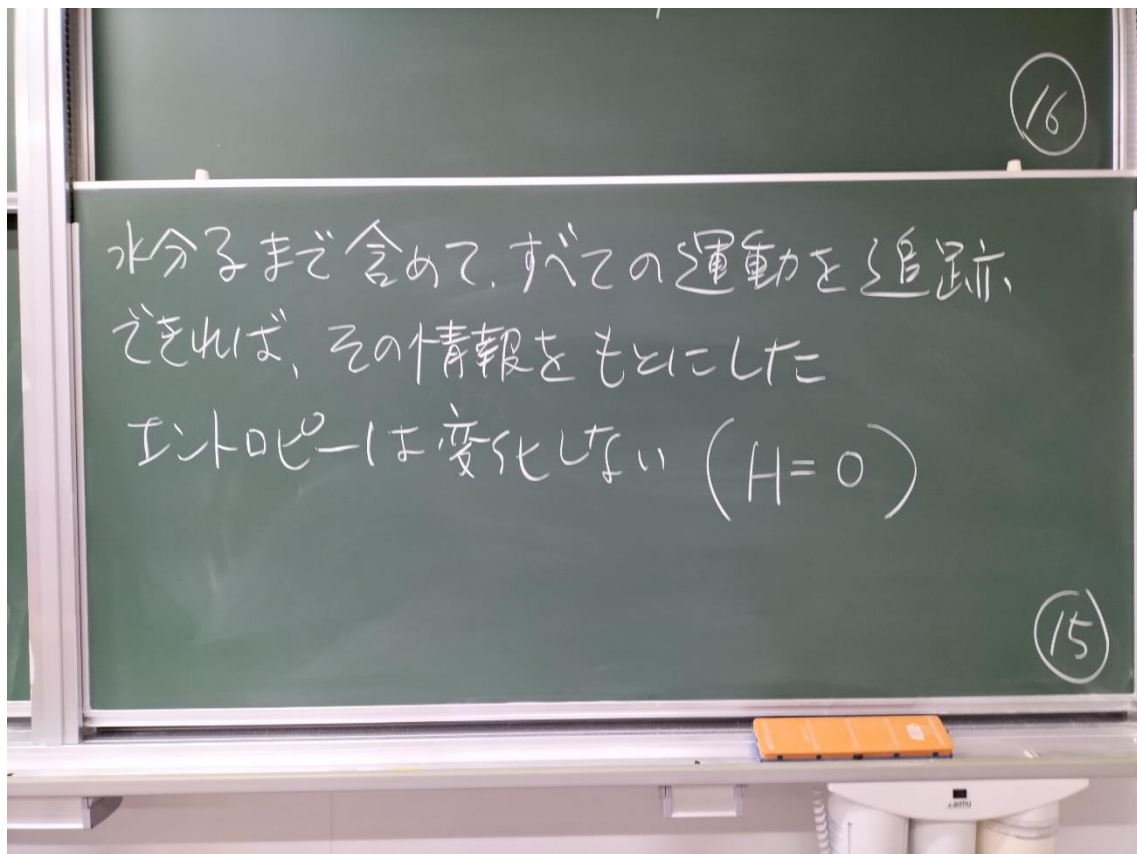
エントロピーは変化しない (13)

確率論



エントロピーは増加する
 知らない情報が
 増加する

(14)



(18)

系

熱浴

時刻 $\{t_1, t_2, \dots\}$ での系の
エネルギーの観測値
 $\{E(t_1), E(t_2), \dots\}$
から確率 $p_1, p_2, \dots, p_W$ が (17)

(17)

から確率 $p_1, p_2, \dots, p_W$ が

得られる。

p_i : 系のエネルギーが E_i であった歩度

(系が取り得るエネルギーの値を $E_1, E_2, \dots, E_W$ とする)

(18)

熱と情報の関係 (20)

熱平衡では、 $p_i = e^{(F - E_i)/k_B T}$ と表す。

↑ エントロピーが極大の状況
(自由エネルギーが極小の状況)

(19)

(11)

$E = F + Q$; $Q = TS$

自由エネルギー 熱

$Q = k_B T H$

熱と情報の関係

$k_B T$

↑

1 "bit" あたりの
エネルギー (20)

拘束条件 $1 = \sum_{i=1}^W p_i$

時間平均 $\rightarrow E = \sum_{i=1}^W p_i E_i$

のとして $S = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \log p_i$ を極大にする (21)

ラグランジュの未定乗数法を用いる

$$\tilde{S} = S + a \left(\sum_i p_i E_i - E \right) + b \left(\sum_i p_i - 1 \right)$$

停留条件: $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_n} = 0$

(22)

24

$$-k_B \{ \log p_n + 1 \} + a E_n + b = 0.$$

$$\rightarrow p_n = \exp \left(\frac{a E_n + b}{k_B} - 1 \right) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$$

23

23

$$E = F + TS \quad \text{と} \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \quad \text{から} \quad Z \text{ と } \beta \text{ を}$$

決めることができて,

$$p_n = e^{(F - E_n)/k_B T} \text{ となる.}$$

24

第3回

まず、前回のおさらいを①で行いました。

熱力学変数は期待値として表現されます。その際の確率 p_i は、前回の⑬と⑭で示したように、熱平衡に達した後に、時々サンプリングを行って、物理系のエネルギーが E_i であった頻度となります。（ここでは、時間に依存しない物理系の状態がエネルギーの値でラベルできるという事実を使っています）

熱平衡では、確率ベクトルはギブスベクトル（成分の値がギブス分布）となります。物理的に実現可能な確率的時間発展では、ギブスベクトルは変化しません。

相対エントロピーの性質を論じるための準備を②で行いました。凸関数に対して成り立つイェンゼンの不等式を紹介し、その応用例として、対数和不等式を紹介しました。（対数和不等式は、イェンゼンの不等式と関係付けずに独立に高校数学の範囲で証明できます）（イェンゼンの不等式も高校数学の範囲で証明できます）

物理系が安定に存在することを反映して、熱力学関数は凸関数となります。

相対エントロピーが負にはならないことは自明ではありませんが、対数和不等式を知っていれば、②のように、瞬時に示すことができます。

相対エントロピーの単調性も、対数和不等式を知っていれば、③のように、

簡単に示すことができます。(ただし、変換行列が満たすべき確率保存の条件を挿入するという大きなトリックと、分子と分母で相殺する因子を挿入するという小さなトリックを用います)

単調性は“データ処理不等式”と呼ばれており、確率的な変換で、すべてのベクトルが変換行列の固有ベクトル(確率保存より固有値は1)に近づいていって、ベクトルの個性が消滅していくことを表しています。

熱力学の第1法則は「エネルギーは保存する」ことを述べたものです。他方、第2法則は「情報は劣化する」ことを述べたものです。

熱浴とエネルギーだけをやりとりする状況では、第2法則は、③と④のように、クラウジウスの不等式として表されます。物理系は熱浴からもらった熱(エネルギー)によって乱され、エントロピーが増えるのですが、その増加量の下限を与えるのが、クラウジウスの不等式となります。(情報とエネルギーの換算レートが β となります)

マクスウェルのデモンのパラドクスとは何であって、如何に解消されたかは、沙川さんの「非平衡統計力学」で勉強してもらうこととして、ポイントとなる議論を⑥と⑦で簡単に示しました。

準備として必要となる知識(シャノンのエントロピーをいろいろな確率に対して考えますが、確率の知識は高校数学の範囲です)をまとめたものが、⑤のいちばん下の図です。

測定について簡単にまとめたものが⑥です。

最初、上の図のように、システムとデモンは無相関となるように準備します。システムの確率ベクトルを変化させることなしに、測定は行われ、デモンは相互情報量分のシステムに関する情報を取得します。測定装置としてのデモンは熱浴からのエネルギー流入のもとで動作し、デモンのエントロピーは増加します。デモンは確率ベクトルを変化させて、システムと相関をもつようになりました。システムとデモンが相関した状況が下の図です。

制御について簡単にまとめたものが⑦です。

最初、上の図のように、システムとデモンは相関した状況にあります。デモンの確率ベクトルを変化させることなしに、制御は行われます。システムは熱浴からのエネルギー流入のもとで変化し、システムのエントロピーは増加します。同時に、システムの確率ベクトルが変化して、デモンと無相関の状態を実現することができました。無相関となった状況が下の図です。

部分だけ見ると、第2法則が破れているというのがパラドクスでしたが、システムとデモンの全体を見ると第2法則は成り立っています。部分だけ見ることに意味がなかっただけでした。(①の例でも、高温物体のエントロピーは減っていますが、全体で見ると増えています)

正しい理解を達成するためには、相互情報量を考える必要がありました。

カニカル分布 (ギブス分布)

Date

No.

①

熱力学変数 $\rightarrow E = \sum_i p_i E_i \leftarrow$ 統計力学的表現

$$\rightarrow S = k_B \sum_i p_i I_i$$

$$(I_i = \log \frac{1}{p_i} = -\log p_i)$$

熱平衡 (マクロでは変化が見えない) では, $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$

熱力学の関係式 ($E = F + TS$, $\partial S / \partial E = 1/T$) を満たすとき, $p_i = e^{(F - E_i) / k_B T}$

$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots)$ の時間発展を $\vec{p}' = \hat{T} \vec{p}$ と書く

行列 $\hat{T}$ が物理的に実現可能なものは,

ギブス保存写像

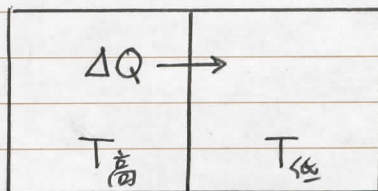
$\hat{T}$ で ギブス分布は変化しない: $\hat{T} \vec{p} = \vec{p}$ ($\vec{p}$ は $\hat{T}$ の固有ベクトル)

熱力学エントロピー $S = k_B H$ ギブス分布に対するシャノンエントロピー

熱 $Q = k_B T H$... 見えない情報

1 "bit" あたりのエネルギー (エネルギーと情報の換算レート)

(例) 高温 $\rightarrow$ 低温への熱の移動でエントロピーが増大する



$$\Delta S = \left(\frac{1}{T_{\text{低}}} - \frac{1}{T_{\text{高}}} \right) \Delta Q$$

高温物体のエントロピーは減るが低温物体のエントロピーは増える

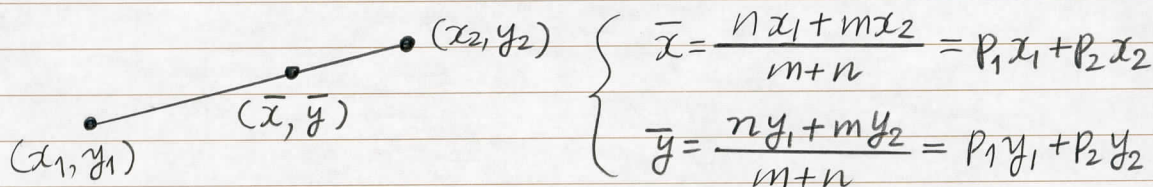
低温物体の方が同じエネルギーで大きく乱れるので、

全体的な乱れが増大する

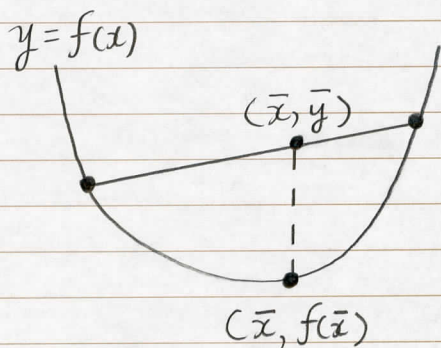
(cf.) クラブで盛り上っていた人たちが図書館に乱入する

凸関数の性質 (熱力学関数 ← 凸関数)

安定性 ~ 凸性



$(0 \leq p_1, p_2 \leq 1) \quad (p_1 + p_2 = 1)$



イエンゼンの不等式

$$\bar{y} \geq f(\bar{x})$$

$\Leftrightarrow$

$$\bar{f} \geq f(\bar{x})$$

$$(\bar{f} \equiv p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2))$$

一般の確率 $(p_1, p_2, \dots, p_w)$ について

$$\bar{f} \geq f(\bar{x}) \quad \text{すなわち} \quad \bar{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_w x_w$$

$$\bar{f} = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_w f(x_w)$$

(例) 対数和不等式

$$\sum_{i=1}^w a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq A \log \frac{A}{B}$$

$$(A \equiv \sum_{i=1}^w a_i) \quad (B \equiv \sum_{i=1}^w b_i)$$

相対エントロピーの性質

• 正値性 $H(p|q) \geq 0 \quad \because \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} \geq P \log \frac{P}{Q} = 0$

$$(P = \sum_i p_i = 1) \quad (Q = \sum_i q_i = 1)$$

• 単調性

$$H(p|\bar{q}) \geq H(p|q)$$

データ処理不等式

$$\bar{p} = \hat{T} p, \quad \bar{q} = \hat{T} q \quad (\hat{T}: \text{変換行列})$$

(※ マスター方程式では)

$$\vec{p}' = \vec{p} + \Delta \vec{p} \text{ かつ } \Delta p_i = \sum_k (a_{ik} \Delta t) p_k - \sum_k (a_{ki} \Delta t) p_i$$

$$p'_i = \sum_j T_{ij} p_j \quad g'_i = \sum_j T_{ij} g_j$$

③

確率保存から、 $\sum_i T_{ij} = 1$

$$\begin{aligned} \therefore H(p|g) &= \sum_j p_j \log \frac{p_j}{g_j} = \sum_i \sum_j T_{ij} p_j \log \frac{p_j}{g_j} \\ &= \sum_i \left(\sum_j T_{ij} p_j \log \frac{T_{ij} p_j}{T_{ij} g_j} \right) \\ &\geq \sum_i p'_i \log \frac{p'_i}{g'_i} \end{aligned}$$

$\hat{\Gamma}$ が確率的であるような変換 $\rightarrow$ 情報劣化

第1法則

エネルギー に関する等式

$$\Delta E = Q + W$$

熱 仕事
 ↑ ↑
 ↓ ↓

第2法則

情報 に関する不等式

エネルギー保存

エネルギーと情報の換算レート $\beta \equiv 1/k_B T$

$$\Delta H \geq \beta Q : \text{クラウジウスの不等式 (C)}$$

情報劣化

$\therefore$ データ処理不等式において、 $g_i = e^{(F - E_i)/k_B T}$ の場合を考える

$$\hat{\Gamma} \text{ を時間発展として、 } \vec{p}' = \hat{\Gamma} \vec{p}, \quad \vec{g}' = \hat{\Gamma} \vec{g}$$

(物理的な時間発展はギブス保存写像なので $\vec{g}' = \vec{g}$)

$$H(p|g) = \sum_i p_i \log p_i - \sum_i p_i \log g_i$$

$$= \frac{1}{k_B T} \left\{ \sum_i p_i E_i - k_B T \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} \right\} - \frac{F}{k_B T}$$

$$= \frac{1}{k_B T} \{ E(\vec{p}) - TS(\vec{p}) \} - \frac{1}{k_B T} F(\vec{g})$$

$$= \frac{1}{k_B T} [F(\vec{p}) - F(\vec{g})]$$

$$F = E - TS$$

$$H(\vec{p}|\vec{q}) \geq H(\vec{p}'|\vec{q}') = H(\vec{p}'|\vec{q})$$

↪ $F(\vec{p}) \geq F(\vec{p}')$: 自由エネルギー減少則

↕
エントロピー増大則

↕
情報劣化 ($\vec{p}$ が $\vec{q}$ に近づく)

時間発展 $\hat{T}$ の固有ベクトル

$$\hat{T}\vec{q} = \vec{q}$$

$$E(\vec{p}) - TS(\vec{p}) \geq E(\vec{p}') - TS(\vec{p}')$$

↕

$$k_B T \{ H(\vec{p}') - H(\vec{p}) \} \geq \{ E(\vec{p}') - E(\vec{p}) \} = Q + W$$

$$W=0 \text{ で考えているので, } \Delta H \geq \beta Q \quad \text{--- (c)}$$

熱力学 → システムの外からの操作があればエントロピーを減らせる

情報熱力学 → システムの中にあるデモンの情報処理でエントロピーを減らせる

※ パラドクス: デモンが仕事をせずに情報処理するとシステムが第2法則を破るようになる

これまで: N 個のシステムを考えてきた

これから: システムとデモンの合成系を考える

{ 測定
制御

合成系の確率 P_{ij} (システムの状態が i , デモンの状態が j)

$$\text{システム } \vec{p} = (p_1, p_2, \dots)$$

$$p_i = \sum_j P_{ij}$$

$$\text{デモン } \vec{q} = (q_1, q_2, \dots)$$

$$q_j = \sum_i P_{ij}$$

$$\text{合成系のエントロピー } H(P) = - \sum_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij}$$

(P_{ij} : 同時確率)

(p_i, q_j : 周辺確率)

条件つき確率 $P_{i/j}$ $g_{j/i}$

Date

No. 5

$$P_{ij} = P_{i/j} g_j = g_{j/i} P_i$$

条件つきエントロピー

$$H(\vec{p})_j = - \sum_i P_{i/j} \log P_{i/j}$$

$$H(\vec{g})_i = - \sum_j g_{j/i} \log g_{j/i}$$

期待値をとって

$$H(\vec{p}/\vec{g}) = \sum_j g_j H(\vec{p})_j = - \sum_j g_j \sum_i P_{i/j} \log P_{i/j}$$

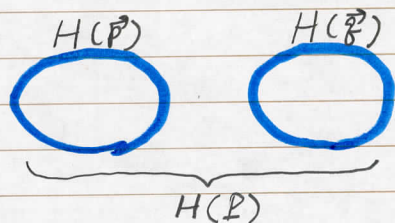
$$H(\vec{g}/\vec{p}) = \sum_i P_i H(\vec{g})_i = - \sum_i P_i \sum_j g_{j/i} \log g_{j/i}$$

$$P_{i/j} = P_{ij}/g_j \text{ より, } H(\vec{p}/\vec{g}) = H(P) - H(\vec{g}) \quad \left(H(\vec{g}) = - \sum_j g_j \log g_j \right)$$

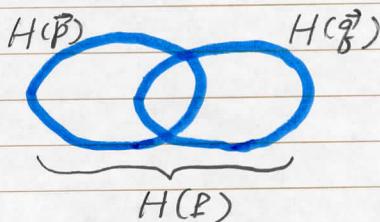
$$g_{j/i} = P_{ij}/P_i \text{ より, } H(\vec{g}/\vec{p}) = H(P) - H(\vec{p}) \quad \left(H(\vec{p}) = - \sum_i P_i \log P_i \right)$$

相互情報量 $I(P) \equiv H(\vec{p}) + H(\vec{g}) - H(P)$ を導入する

ベン図 (これは、エントロピーの大きさを面積で表したもの)

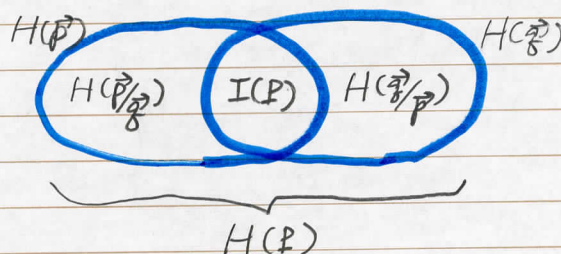


無相関 (独立事象)



相関 (従属事象)

$$I(P) = H(\vec{p}) - H(\vec{p}/\vec{g}) = H(\vec{g}) - H(\vec{g}/\vec{p}) \text{ と書ける}$$



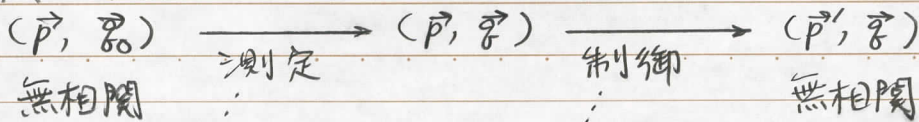
$$\text{実は, } I(P) = \sum_i \sum_j P_{ij} \log \frac{P_{ij}}{P_i g_j} = H(P|P, g) \text{ であり,}$$

独立事象 (無相関) P, g との差として、システムとデモンの相関をあらわす

システムとデモンの関係の時系列

Date システム デモン

⑥



システムの状態を
乱さずに無限小の
エネルギーで実行

デモンの状態を
乱さずに無限小の
エネルギーで実行

時間発展の
詳細によらない
熱力学は
熱平衡状態 $(\vec{p}, \vec{q}_0)$ と
熱平衡状態 $(\vec{p}, \vec{q})$ と
比べる議論である

測定

システムの状態 i に応じて測定装置(デモン)が異なる時間発展をする

このとき、(C)が成り立ち

$$H(\vec{q})_i - H(\vec{q}_0)_i \geq \beta Q_i$$

装置の指針が熱浴からの
ノイズを受けながら動くような
確率過程

(Q_i : 熱浴からデモンへのエネルギー供給)

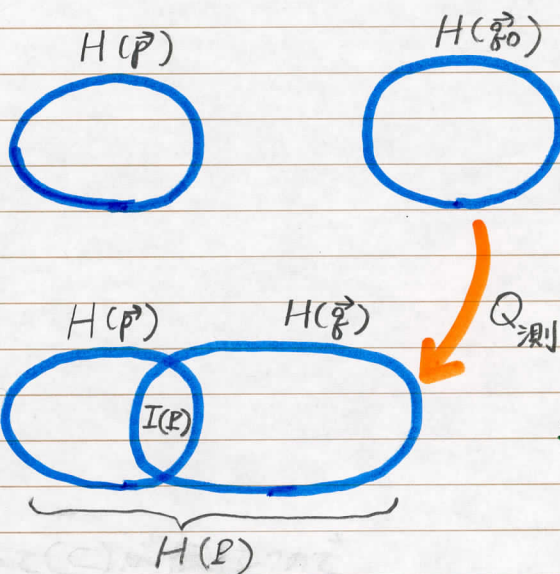
期待値をとって

$$H(\vec{q}/\vec{p}) - H(\vec{q}_0/\vec{p}) \geq \beta Q_{\text{測}}$$

$$(Q_{\text{測}} = \sum_i p_i Q_i)$$



$$H(\vec{q}) - H(\vec{q}_0) - I(P) \geq \beta Q_{\text{測}}$$



$I(P)$: 測定で
デモンが多少に
情報量

j : デモンの事象
↓
測定結果
↓
装置の指針の位置

(別解) 合成系について(C)が成り立つので

$$H(P) - \{H(\vec{p}) + H(\vec{q}_0)\} \geq \beta Q_{\text{測}}$$



$$H(\vec{q}) - H(\vec{q}_0) - I(P) \geq \beta Q_{\text{測}} \dots \dots (\text{測})$$

デモンが測定結果 j ごとに異なる操作をシステムに対して行う

このとき、(C)が成り立ち

$$H(\vec{p}')_j - H(\vec{p})_j \geq \beta Q_j$$

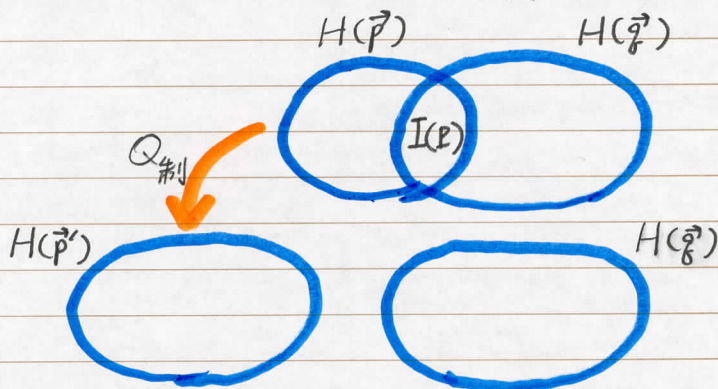
期待値をとって

(Q_j : 熱浴からシステムへの供給)

$$H(\vec{p}'/\vec{q}) - H(\vec{p}/\vec{q}) \geq \beta Q_{\text{制}} \quad (Q_{\text{制}} = \sum_j p_j Q_j)$$

$\Downarrow$

$$H(\vec{p}') - H(\vec{p}) + I(P) \geq \beta Q_{\text{制}}$$



(別解) 合成系について(C)が成り立つので

$$\{H(\vec{p}') + H(\vec{q})\} - H(\vec{p}) \geq Q_{\text{制}}$$

$\Downarrow$

$$H(\vec{p}') - H(\vec{p}) + I(P) \geq \beta Q_{\text{制}} \quad \text{----- (制)}$$

(測) + (制) より、全プロセスについて

$$\Delta H \geq \beta Q$$

$$\Delta H = \{H(\vec{p}') + H(\vec{q})\} - \{H(\vec{p}) + H(\vec{q}_0)\}$$

$$Q = Q_{\text{測}} + Q_{\text{制}}$$

※ パラドクス: (制) より、

$$H(\vec{p}') - H(\vec{p}) \geq \beta Q_{\text{制}} - I(P) \text{ となる}$$

デモンによる制御で、システムのエントロピー増加を

第2法則を“破って”小さくすることができる

⊗ 解消: 合成系全体では第2法則が成り立つ