

## 周期変動流中の微粒子運動解析におけるバセット項の影響

山本, 博美  
福岡県工業技術センター機械電子研究所

高曾, 徹  
九州大学機能物質科学研究所

速水, 洋  
九州大学機能物質科学研究所

平田, 敬一郎  
福岡県工業技術センター機械電子研究所

<https://doi.org/10.15017/6652>

---

出版情報 : 九州大学機能物質科学研究所報告. 8 (1), pp.141-147, 1994-11-10. 九州大学機能物質科学研究所  
バージョン :  
権利関係 :

## 周期変動流中の微粒子運動解析における バセット項の影響

山本博美\*・高曾 徹・速水 洋・平田 敬一郎\*

### Effect of Basset Term on the Analysis of the Particle Motion in Oscillating Flows

Hiromi YAMAMOTO, Toru KOSO, Hiroshi HAYAMI and  
Keiichirou HIRATA

The motion of small particle in sinusoidal oscillating air flows is investigated numerically by Tchen equation with Crank-Nicholson method. The velocities of water particles whose diameter are 1, 10 and 100 $\mu\text{m}$  are calculated in oscillating air flows in the frequency range from 1Hz to 1MHz. The result of analysis indicates that the amplitudes of particle velocity which are deduced including Basset term differ from those without Basset term, and the maximum error in the amplitude of particle velocity is 4% of the amplitude of fluid velocity at non-dimensional frequency  $f\tau_p$  of 0.3. This error is reduced as the non-dimensional frequency  $f\tau_p$  increased as well as decreased from 0.3, and the frequency range which the error is less than 2% is  $f\tau_p \leq 0.08$  or  $f\tau_p \geq 2.0$ .

*Key Words* : Particle Motion, Tchen equation, Basset Term, Aerodynamic Response Time, Oscillating Flow

#### 1. 緒 言

乱流中の微粒子の流動は、金属箔製造における冷却剤噴霧や工業炉における油滴燃焼など工業的に多くみられる現象である。このような現象では、微粒子の挙動がその製品の品質や燃焼過程に大きな影響を及ぼすことが知られている<sup>(1)</sup>。この微粒子の挙動を数値解析するには、まず乱流の流れ場を解析し、それをを用いて微粒子の運動方程式を解くことが必要になる。従来よく用いられてきた解析法は、乱流モデルを用いて平均流れ場を求め、その流れ場の中で粒子運動を解析する

ものであった。また、近年の乱流計算の進展により瞬間の流れ場を計算することが可能になり、その中で粒子の運動を解析することも可能になりつつある<sup>(2)</sup>。いずれの場合も、粒子の運動解析には個々の粒子の挙動をラグランジュ的に計算する Tchen の粒子運動方程式<sup>(3)</sup>が用いられる。

Tchen の運動方程式は Basset・Boussinesq・Oseen 方程式とも呼ばれ、変動する流れ場の中に置かれた微小球まわりの流れを解析的に解いて得られた式で、慣性項、抗力項、圧力勾配項、付加質量項、バセット項、外力項より成っている。慣性項と抗力項が大きく、他の項は通常小さい。この方程式は線形の常微分方程式であるから数値解法上の問題はないが、バセット項は過去の流体加速度と粒子加速度の差の積分で表されているので、多くの計算量、記憶容量を必要とする。バ

受理日 1994年7月25日

本論文を名誉教授 藤井 哲先生に献呈する。

\*福岡県工業技術センター機械電子研究所

セット項は抗力項に比べて小さいこともあって、計算高速化のため省略されることが多いが、その場合の誤差については不明な点が多い。

Hjelmfelt と Mocros<sup>(4)</sup>は、脈動流中の微粒子運動を解析する際にバセット項の影響を調べた。Melling と Whitelaw<sup>(5)</sup>は、Hjelmfelt と Mocros の結果からストークス数が約 8 以上でバセット項を省略できるとした。しかし、これらの研究ではバセット項を省略できる条件を求めることに焦点が置かれており、バセット項を省略した場合の誤差を定量的に知ることはできない。

本研究では、正弦的に変動する空気流の中に置かれた水粒子の運動解析において、バセット項を考慮した場合と省略した場合の二通りについて数値シミュレーションを行い、バセット項を省略した場合に生じる誤差を定量的に調べた。

記号

- $d_p$  : 粒子直径
- $f$  : 流体脈動の周波数
- $N_s$  : ストークス数 =  $\{v_f / (\omega d_p^2)\}^{0.5}$
- $T$  : 脈動の周期
- $t$  : 時刻
- $v_f$  : 流体速度
- $v_p$  : バセット項を考慮して求めた粒子速度
- $v_{p0}$  : バセット項を省略して求めた粒子速度
- $\Delta t$  : タイムステップ
- $\mu_f$  : 流体粘度
- $\nu_f$  : 流体動粘度 ( $15.1 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ )
- $\rho_f$  : 流体密度 ( $1.205 \text{kg}/\text{m}^3$ )
- $\rho_p$  : 粒子密度 ( $1000 \text{kg}/\text{m}^3$ )
- $\sigma$  : 密度比 ( $= \rho_p / \rho_f$ )
- $\tau_p$  : 粒子の空力応答時間 =  $\sigma d_p^2 / (18 \nu_f)$
- $\omega$  : 脈動の角周波数 =  $2\pi f$

2. 数値解析

2.1 粒子運動方程式

流体中の微小粒子の運動方程式は次式で示される。

$$\frac{\pi}{6} d_p^3 \rho_p \frac{dv_p}{dt} = 3\pi \mu_f d_p (v_f - v_p) + \frac{\pi}{6} d_p^3 \rho_f \frac{dv_f}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} d_p^3 \rho_f \left( \frac{dv_f}{dt} - \frac{dv_p}{dt} \right)$$

$$+ \frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \int_0^t \left( \frac{dv_f}{dt} - \frac{dv_p}{dt} \right) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} + F_e \dots \dots \dots (1)$$

この方程式は Basset, Boussinesq, Oseen によって静止流体中の球形粒子について導かれ、後に Tchen によって流体が動いている場合に拡張された<sup>(9)</sup>。式は次の仮定の下に導かれた。

- (a) 乱流は一様で定常である。
- (b) 乱流領域は、無限に続く。
- (c) 粒子は球形で小さく、ストークスの抵抗則に従う。
- (d) 粒子は乱流の空間スケールに比べて小さい。
- (e) 粒子が移動する際、周囲は同じ流体で形成される。
- (f) 粒子に作用する外力はポテンシャル力である。

式(1)の左辺は慣性項であり、右辺は第 1 項からそれぞれストークスの抗力項、圧力勾配項、付加質量項、バセット項および外力項である。バセット項はバセットの履歴項とも呼ばれ粒子まわりの流れ状態が非定常性により変形することによって生じる。この項は過去の流体と粒子の加速度の差の重み付き積分であるから、数値計算するには多くの計算量、記憶容量が必要となる。

特に非定常流を数値計算しその中の微粒子流動をシミュレーションする場合、平均速度、濃度などの平均量を得るには多数の粒子を長時間計算して平均を求める必要がある。そのため、個々の粒子について多くの計算量と記憶容量を必要とするバセット項の存在は計算を膨大なものにする。

2.2 周期変動流中の微粒子運動解析

流れ場として、平均速度が 0 m/s、速度振幅が 1 m/s で正弦的に変動する一次元の空気流れを考え、その中に置かれた密度 1000 kg/m<sup>3</sup> の球形水粒子の運動を数値的に求めた。流体の速度は脈動の角周波数を  $\omega$  とし、時刻  $t = 0$  における速度を 0 m/s とし、式(2)で与えた。

$$v_f = U \sin \omega t \dots \dots \dots (2)$$

ここで  $U$  は流体速度の振幅で、 $U = 1 \text{m/s}$  である。なお、本研究では外力項を省略した。

式(1)に式(2)を代入すると粒子速度  $v_p$  の方程式(3)が得られる。

$$\frac{dv_p}{dt} = A(U\sin\omega t - v_p) + BU\cos\omega t + C \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 $A$ 、 $B$ および $C$ は、次のようになる。

$$A = \frac{36\nu_f}{d_p^2(2\sigma+1)} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$B = \frac{3\omega}{(2\sigma+1)} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$C = \frac{18}{d_p(2\sigma+1)} \sqrt{\frac{\nu_f}{\pi}} \int_0^t \left( \frac{dv_f}{dt'} - \frac{dv_p}{dt'} \right) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \quad \dots\dots\dots(6)$$

計算は式(3)の全ての項を考慮した場合とバセット項 $C$ を省略した場合の二通り行って比較した。

### 2. 3 粒子運動方程式の離散化

式(3)を数値解析するためクランク・ニコルソン法<sup>(7)</sup>で差分化した。まず式(3)の右辺を $F$ とおくと、式(8)の差分式が得られる。ここで $v_p^i = v_p(i\Delta t)$ 、 $F^i = F(i\Delta t)$ である。式(8)を展開すると、 $v_p^i$ に関する式(9)が得られる。

$$F = A(U\sin\omega t - v_p) + BU\cos\omega t + C \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{v_p^{i+1} - v_p^i}{\Delta t} = \frac{F^{i+1} - F^i}{2} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$v_p^{i+1} = Dv_p^i + E^i + G(C^i + C^{i+1}) \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $D$ 、 $E^i$ および $G$ は、次のようになる。

$$D = \frac{2 - A\Delta t}{2 + A\Delta t} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$E^i = \frac{\Delta t}{2 + A\Delta t} \{AU\sin\omega(i+1)\Delta t + AU\sin\omega i\Delta t + BU\cos\omega(i+1)\Delta t + BU\cos\omega i\Delta t\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$G = \frac{\Delta t}{2 + A\Delta t} \quad \dots\dots\dots(12)$$

なお $C^i$ の時間変化は一般に大きくないので $C^{i+1} = C^i$ で近似した。また、 $C^i = C(i\Delta t)$ は式(6)を $\Delta t'$ について離散化して評価した。 $t'=0 \sim t$ の積分を $\Delta t'$ ごとに分割し、流体速度および粒子速度の時間微分が $\Delta t'$ の区間で一定として積分の外に出し、残りの分母の積分を解析的に行って式(13)を得た。なお、本計算では $\Delta t'$ は $\Delta t$ と同じ値を用いた。

$$C^i = \frac{36}{d_p(2\sigma+1)} \sqrt{\frac{\nu_f}{\pi\Delta t}} \sum_{n=1}^i \left\{ (v_f^n - v_f^{n-1} - v_p^n + v_p^{n-1}) (\sqrt{i-n+1} - \sqrt{i-n}) \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

### 2. 4 解析条件

表1に解析に用いた水粒子の空気力学的特性を示す。 $\tau_p$ は空気力学的応答時間で、粒子が流体運動に追従するに必要な時間を表している。また $f_c$ は応答周波数で、脈動流中に置かれた微粒子速度の振幅が流体脈動速度の振幅の99%になる周波数として導かれた<sup>(8)</sup>もので、 $f_c = 0.14 / (2\pi\tau_p)$ で与えられる。

数値計算は $t=0$ の静止状態からタイムステップ $\Delta t$ 毎に計算を進めた。 $t=0$ における粒子速度は流体速度と同じく0とした。タイムステップ $\Delta t$ は脈動の周期(=  $T$ )を100等分した値を用い、10周期の間計算した。脈動周期を1 Hzから1 MHzまで変化させて粒子速度の変化を調べた。

## 3. 解析結果および考察

### 3. 1 粒子速度の変化

図1に $10\mu\text{m}$ 粒子の速度変化をバセット項も考慮して求めた結果を示す。脈動の周波数 $f$ を1 Hzから1 MHzまで変化させた結果を示している。全ての周波数について粒子速度は計算開始後の約1周期の過渡期を経て、それ以降は定常な脈動状態になっている。図1(a)の脈動周波数 $f = 1$  Hzのとき粒子は流れに十分追隨しているから流体の速度波形と同一である。脈動周波数が増加すると、粒子の追隨性は低下して振幅が減衰し、位相も遅れてきている。

図1(c)の100Hzは、この粒子の応答周波数 $f_c = 73$  Hzをわずかに上回った場合で、振幅はわずかに減少し、位相も遅れてきている。図1(d)の1 kHzでは、振幅は約50%に減衰し、位相も約 $\pi/2$ 遅れている。図1(f)の100kHz、図1(g)の1 MHzではほとんど追隨しなくなるのがわかる。

図2にバセット項を省略して求めた $10\mu\text{m}$ 粒子の速度変化を示す。速度変化の傾向はバセット項を考慮した図1とほとんど同じである。

図3にバセット項を考慮した粒子速度 $v_p$ (図1)とバセット項を省略した粒子速度 $v_{p0}$ (図2)の差を示す。速度差 $v_p - v_{p0}$ は図3(a)の1 Hzではほとんど認められず、周波数が増加するに従い増加し、図3(d)の1 kHzで片振幅0.04m/s程度の最大値をとり、それより

**Table 1.** Aerodynamic characteristics of water particles

$d_p$	$\tau_p$	$f_c$
1.0 $\mu\text{m}$	3.05 $\mu\text{s}$	7.30 kHz
10 $\mu\text{m}$	305 $\mu\text{s}$	73 Hz
100 $\mu\text{m}$	30.5 ms	0.73 Hz

周波数が増加すると速度差は徐々に小さくなっている。図3(c)の100Hzでは速度差の片振幅0.006m/sで、粒子の応答周波数(この場合 $f_c=73\text{Hz}$ )より低い周波数では、バセット項を省略しても誤差は極めて小さいことがわかる。また、さらに高い周波数で誤差が減少するのは粒子速度 $v_p$ 自体が小さくなるためと考えられる。

速度差 $v_p - v_{p0}$ の波形で値が負のところは、粒子速度 $v_p$ の増速域と対応しているから、 $v_p$ は $v_{p0}$ よりわずかに位相が遅れていることになる。このことからバセット項は、粒子速度の位相を遅らせるよう作用する

と考えられる。

図4に $1\mu\text{m}$ 粒子についての速度差 $v_p - v_{p0}$ を示す。この場合も、 $10\mu\text{m}$ 粒子(図3)と同じようにある周波数で速度の振幅が最大になっている。図3の周波数を100倍して図4と比較すると速度差の波形はほぼ一致する。

図5に $100\mu\text{m}$ 粒子について速度差 $v_p - v_{p0}$ を示す。この場合も、周波数の違いを除いて $1\mu\text{m}$ 粒子、 $10\mu\text{m}$ 粒子の速度差波形と一致している。

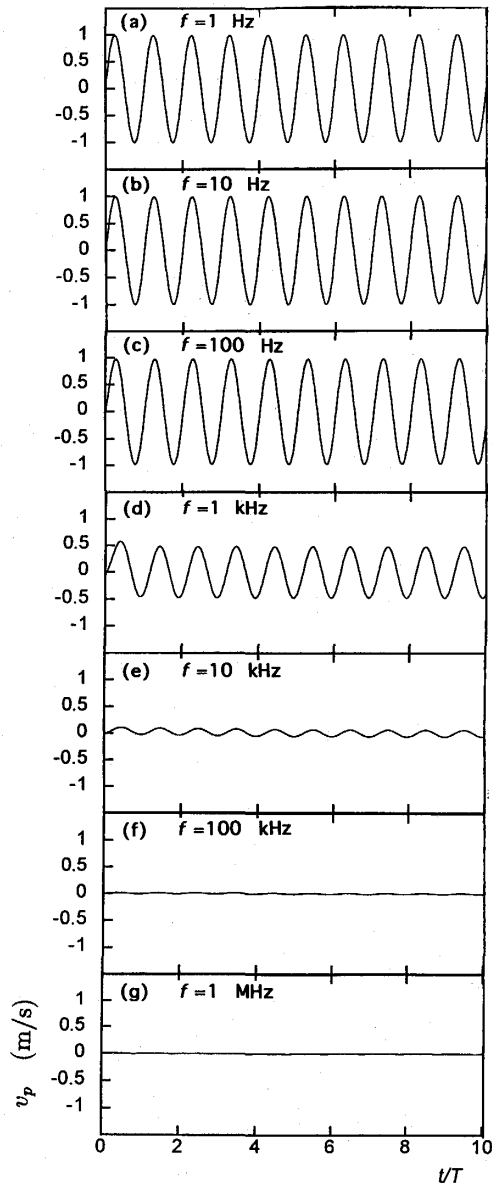


Fig. 1 Particle velocity  $v_p$  deduced including Basset term (particle diameter  $10\mu\text{m}$ ).

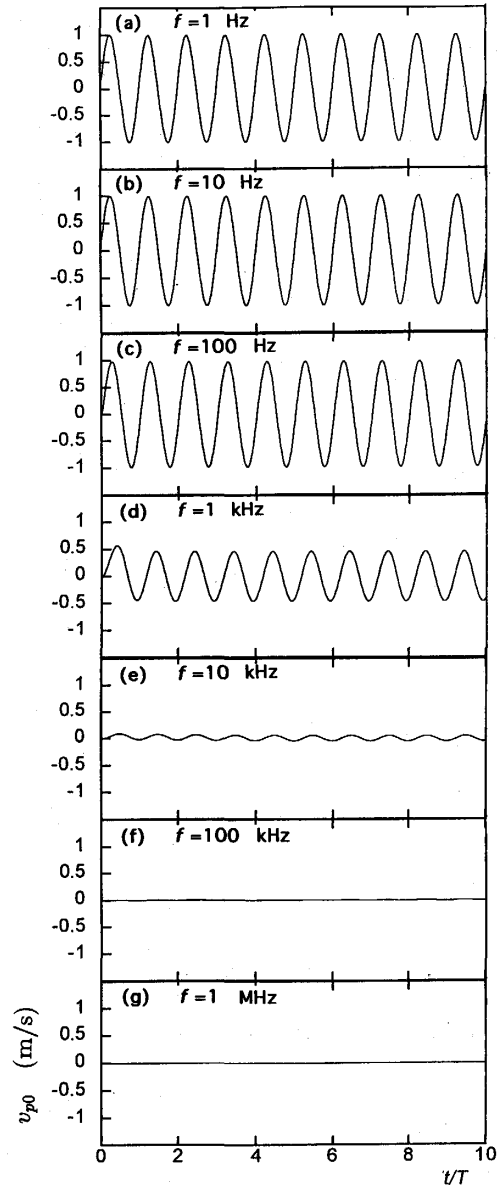


Fig. 2 Particle velocity  $v_{p0}$  deduced without Basset term (particle diameter  $10\mu\text{m}$ ).

### 3. 2 粒子速度差の振幅

前節で得られた速度差の周波数依存性を詳しく検討するため、粒子速度差  $v_p - v_{p0}$  の振幅と脈動周波数の関係を調べた。

粒子速度差の片振幅を図3, 4, 5から速度差の波形が定常状態になったところの絶対値の最大値 ( $= |v_p - v_{p0}|_{max}$ ) として評価し、図6に脈動周波数を横軸にとって整理した。

1  $\mu\text{m}$ , 10  $\mu\text{m}$ , 100  $\mu\text{m}$  の粒子の速度差は、それぞれ 100kHz, 1 kHz, 10Hz で最大値をとり、その値は同じになった。これらの周波数は、粒子速度  $v_p$  の振幅が

流体速度の振幅の約50%になる値である。また最大値をとる周波数を中心に周波数が増減すると振幅は減少するがその減少の様子は対称ではなく高周波での減衰は低周波に比べてはるかに緩やかである。

図6の速度差振幅が粒子径によらず同じような形をしているので、周波数を粒子の空力応答時間  $\tau_p$  で無次元化し、速度差振幅を流体速度振幅で無次元化した。図7に示すようによく相似性が成り立っている。図7から  $f\tau_p$  が0.3のとき速度差振幅が最大値をとり4.0%の誤差が生じることが分かる。また  $f\tau_p \leq 0.08$  または  $f\tau_p \geq 2.0$  であればバセット項を省略したことによる誤

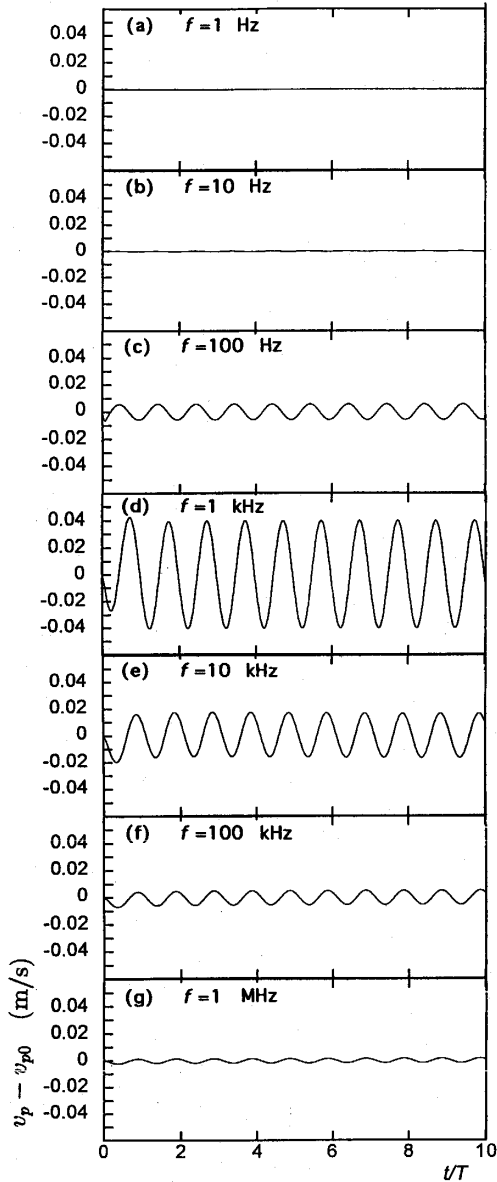


Fig. 3 Velocity difference  $v_p - v_{p0}$  (particle diameter 10  $\mu\text{m}$ ).

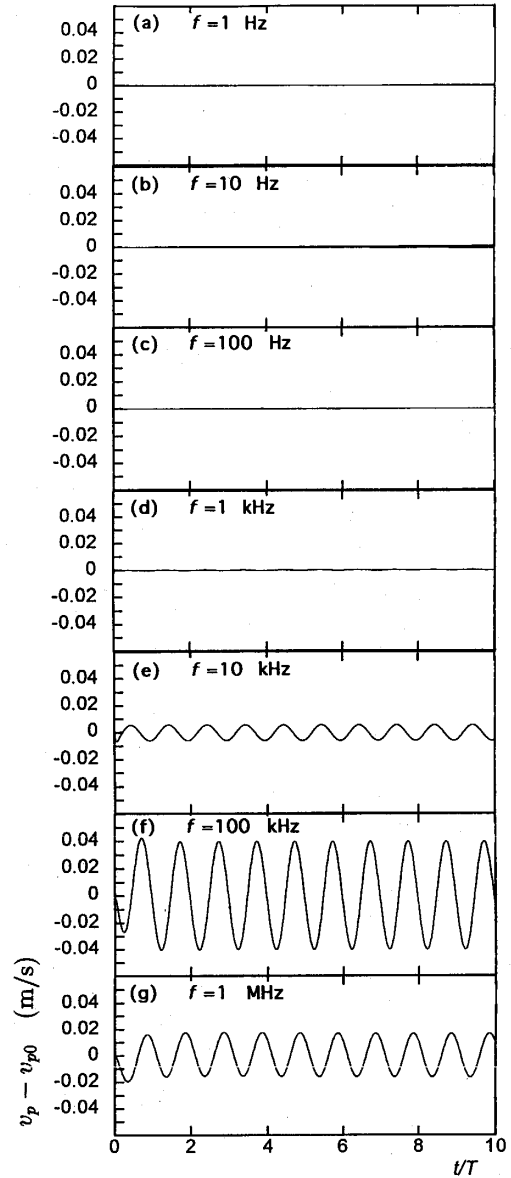


Fig. 4 Velocity difference  $v_p - v_{p0}$  (particle diameter 1  $\mu\text{m}$ ).

差は2.0%以下であることが分かる。図にはストークス数  $N_s = 8$  も示す。Melling と Whitelaw<sup>(5)</sup>がバセット項を省略できるとした  $N_s \geq 8$  は、本結果では速度差振幅誤差3.0%以下に対応する。また粒子の応答周波数  $f_c$  に対応する  $f_c \tau_p$  は  $0.07/\pi = 0.022$  で、そのときのバセット項を省略したことによる誤差は0.3%である。

なお、上述の結果は粒子の密度と流体の密度の比  $\sigma = \rho_p/\rho_f$  に依存しているから、他の流体や粒子で密度比  $\sigma$  が大幅に異なる場合には別途計算し検討する必要がある。

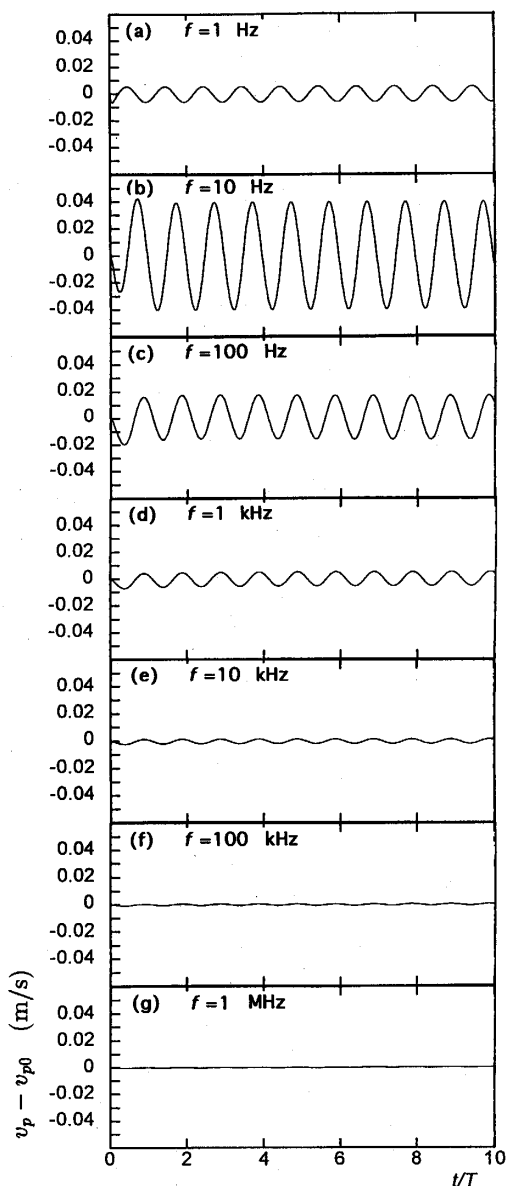


Fig. 5 Velocity difference  $v_p - v_{p0}$  (particle diameter  $100 \mu\text{m}$ ).

#### 4. 結 言

脈動する低速空気流中の水の微粒子の挙動について粒子運動方程式を数値的に解き、粒子速度に及ぼすバセット項の影響を調べた結果、以下の事が明らかになった。

- (1)バセット項を省略した場合、粒子速度に誤差が生じその程度は流体の脈動周波数に依存する。その変化の傾向は粒子の空力応答時間で無次元化した周波数  $f \tau_p$  で整理すれば粒子径によらず同一になる。
- (2)バセット項を省略した場合、粒子速度誤差は最大で

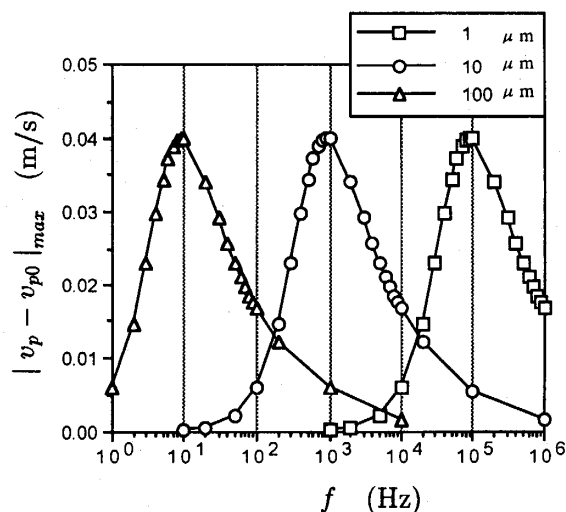


Fig. 6 Amplitude of particle velocity difference.

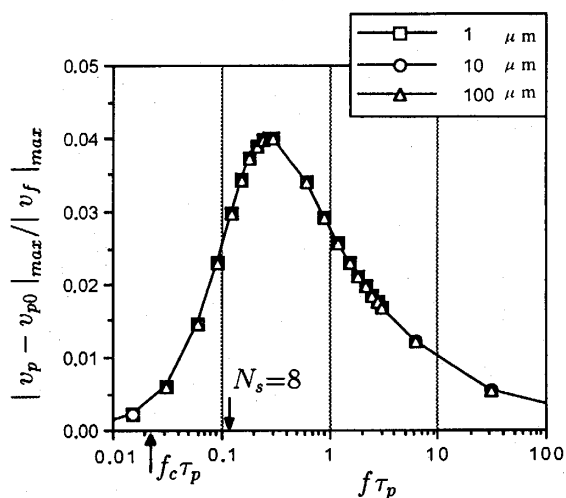


Fig. 7 Non-dimensional amplitude of particle velocity difference.

流体脈動振幅の4%になる。この最大値は無次元周波数  $f\tau_p$  が0.3のとき生じる。

- (3) 粒子速度誤差は無次元周波数が高くては低くても減少し、無次元周波数が0.08以下もしくは2.0以上であれば、誤差は2%以下になる。
- (4) 粒子の空力応答周波数より低い脈動周波数ではバセット項を省略しても誤差は0.3%以下になる。

#### 文 献

- (1) Gupta, A.K., Lilley, D.G. and Syred, N., *Swirl Flows*, (1984), Abacus Press.

- (2) 高曾・川原・速水, 流れの可視化, 9-S(1989), 7.
- (3) Hinze, J.O., *Turbulence*, (1975), 460, McGraw-Hill.
- (4) Hjelmfelt, A.T. Jr., and Mocros, L.F., *Appl. Sci. Res.*, 16(1966), 149.
- (5) Melling, A. and Whitelaw, J.H., *DISA Inf. No.* 15(1973), 5.
- (6) 速水・植木・妹尾, 九州大学生産科学研究所報告, 74(1983), 167.
- (7) 矢部・井門, シミュレーション技法入門, (1988), 13, 日刊工業新聞社.