密閉容器内の自然対流過渡応答の数値計算法の比較

平野, 博之
九州大学機能物質科学研究所

尾添, 紘之
九州大学機能物質科学研究所

https://doi.org/10.15017/6642

出版情報：九州大学機能物質科学研究所報告. 8 (1), pp.45-52, 1994-11-10. 九州大学機能物質科学研究所
バージョン：
権利関係：

機能物質科学研究所
報告 第8巻 第1号
pp. 45〜52(1994)

密閉容器内の自然対流過渡応答の数値計算法の比較

平 野 博 之・尾 添 紘 之

Numerical Calculation of Transient Response of Natural Convection in a Cavity

Hiroyuki HIRANO and Hiroyuki OZOE

This paper presents the effect of some kinds of methods for the numerical solution of natural convection in a cavity at $Pr=0.7$ and $Gr=10^6$ on the transient responses and converged values of stream function and temperature. The governing equation was discretized by explicit, Crank-Nicolson and fully implicit methods. ADI, Line by Line and Incomplete LU decomposition conjugate residual (CR) algorithms were used to solve the discretization equation by fully implicit method. Further, the effect of time interval and grid size on the results was also investigated. It was concluded that all solution methods agree as time interval and grid size approach to 0. ADI is the most reasonable method in this study, and CR is most stable in fully implicit methods for time interval.

1. 緒　言

流れ場や温度場を数値解析するにあたり，結果として収束解が必要な場合と過渡応答が必要な場合がある。収束解を得るのが目的であれば，定常あるいは非定常どちらの支配方程式を用いても良く，結果として得られる解のみが問題となる。過渡応答を計算する場合であれば，もとの支配方程式は非定常であり，ある時刻における値が問題となる。

一方で，偏微分方程式で表された支配方程式を数値解析するための手法は，さまざまである。まず，もとの偏微分方程式を離散化するための方法として，差分法，有限要素法，境界要素法などがある。時間微分項を含む支配方程式であれば，陽解法を用いるか，陰解法を用いるかで離散化方程式が変わってくる。さらに，陰解法であれば最終的に得られた連立一次方程式を解くために用いる方法として，反復法と直接法がある。

本来，どの手法を用いても，収束解や過渡応答などの結果には差はないはずであるが，数値解析的な打ち切り誤差や空間的，時間的な精度によって，これらの間に差が現れることがある。そこで本報では，密閉容器内の自然対流を例にとり，これを数値解析するにあたり，解析方法の違いが過渡応答や収束解にどの様な差異をもたらすかについて比較検討する。

受理日　1994年7月4日
本論文を名誉教授 藤井　哲先生に献呈する。

使用記号

g	：重力加速度	[m/s²]
p	：無次元圧力	[—]
t	：無次元時間	[—]
T	：無次元温度	[—]
u, v	：無次元流速の(x, y)成分	[—]
x, y	：無次元座標	[—]

ギリシャ文字

α	：温度伝導率	[m²/s]

β	：体積膨張率	[1/K]
ν	：動粘度	[m²/s]
ω	：無次元渦度	[−]
ψ	：無次元流れ関数	[−]
ρ	：密度	[kg/m³]

下付き添字

C	：Cold Wall
H	：Hot Wall
ref	：基準量

上付き添字

*	：有次元量

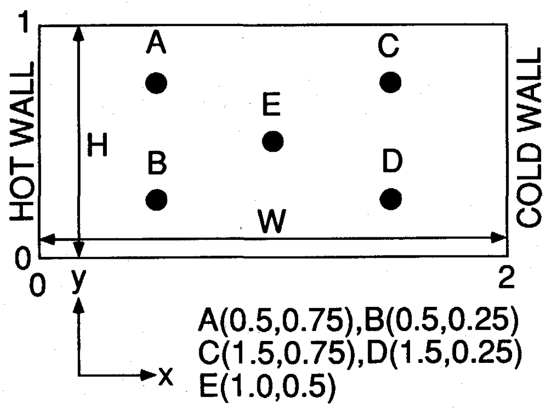


Fig. 1 Problem Schematic (H: W=1: 2)

2．基 礎 式

2次元直角座標系における非圧縮性ニュートン流体の支配方程式で，高 Ra 数に対して安定となる以下のような無次元式を用いた[1]。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{Pr}{\sqrt{Gr}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)+Pr^2\frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{Gr}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\cdots(2)$$

$x=x^*/x_{ref}$, $y=y^*/y_{ref}$, $u=u^*/u_{ref}$, $v=v^*/v_{ref}$, $t=t^*/t_{ref}$, $p=p^*/p_{ref}$, $x_{ref}=y_{ref}=H$, $u_{ref}=v_{ref}=\alpha\sqrt{Gr}/H$, $t_{ref}=H^2/(\alpha\sqrt{Gr})$, $p_{ref}=\rho(\alpha\sqrt{Gr}/H)^2$, $T=(T^*-T^*_0)/(T^*_H-T^*_C)$, $T^*_0=(T^*_H+T^*_C)/2$, $Pr=\nu/\alpha$, $Gr=g\beta(T^*_H-T^*_C)H^3/\nu^2$

ωは以下のように定義される。

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdots\cdots(3)$$

さらに，流れ関数 ψ を用いて流速を以下のように定義する。

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdots\cdots(4)$$

この ψ は，連続の式を自動的に満足する。式(4)を式(3)に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\omega\cdots\cdots(5)$$

以下の手順で流れ場を計算することができる。

[1] 式(1)から ω を求める。(必要であれば式(2)から T を求める。)

[2] 式(5)により ψ を求める。

[3] 式(4)により流速を計算し，[1] へもどる。

3．解析モデル

Fig. 1に示したような矩形領域において，左側壁加熱，右側壁冷却そして上下壁面断熱条件にて計算を行った。

4．解析方法

4．1．計算条件

Fig.1に示したA～Eの5点について，それぞれ過渡応答を求める。さらに，u，v，T，ψ について，解析領域全体の平均値および $|\psi|$ の最大値についても計算した。計算条件としては $Pr=0.7$, $Gr=10^6$ とした。

初期条件として，容器内で $u=v=T=0$とした。境界条件を式で書くと次のようになる。

$$\begin{cases} u=v=0,\ T=0.5 & \text{at} \quad x=0 \\ u=v=0,\ T=-0.5 & \text{at} \quad x=2 \\ u=v=0,\ \partial T/\partial y=0 & \text{at} \quad y=0,1 \end{cases}$$

本報では式(1)の対流拡散方程式を解くにあたり，Patankar[2]によるべき乗法を適用し，陽解法，Crank-Nicolson法(CN法)，完全陰解法ならびにADI法で離散化を行った。

4．2．ADI法以外の離散化方程式の導出

ADI法以外の解析にあたっては，以下のような離散化方程式を用いた[2]。いま，fを重み係数($0\leq f\leq 1$)として，ある物理量 ϕ の時間積分を次のように定義する。($t=t_0$ で $\phi_P=\phi_P^0$, $t=t_0+\Delta t$ で $\phi_P=\phi_P^1$ とする)

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\phi_P dt=\{f\phi^1_P+(1-f)\phi_P^0\}\Delta t\cdots\cdots(6)$$

さらに，ϕ について，次のような一般的な2次元対流拡散方程式を考える。

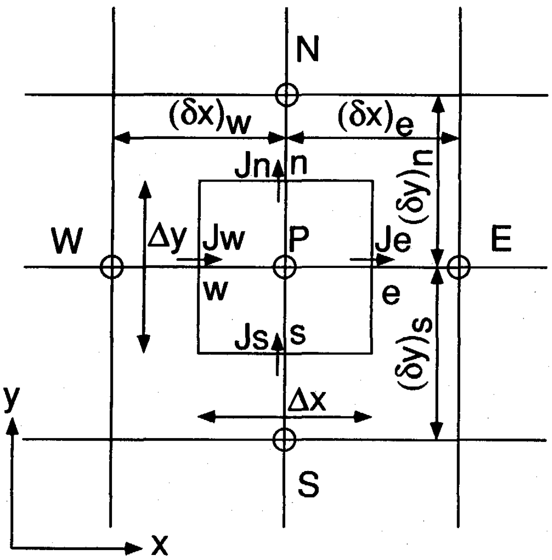


Fig. 2　Control volume

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}=S \quad \cdots\cdots(7)$$

$$J_x=u\phi-\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x},\ J_y=v\phi-\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial y},\ S=S_c+S_P\phi$$

式(7)を Fig. 2 に示したコントロールボリュームについて，時刻 t_0 から $t_0+\Delta t$ まで積分し，若干の演算後，以下の式を得る。（付録 A）

$$\left(fa_E+fa_W+fa_N+fa_S+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}-fS_P\Delta x\Delta y\right)\phi_P^1$$
$$=fa_E\phi_E^1+fa_W\phi_W^1+fa_N\phi_N^1+fa_S\phi_S^1$$
$$+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\phi_P^0+S_c\Delta x\Delta y+S_P(1-f)\phi_P^0\Delta x\Delta y$$
$$+(1-f)a_E(\phi_E^0-\phi_P^0)+(1-f)a_W(\phi_W^0-\phi_P^0)$$
$$+(1-f)a_N(\phi_N^0-\phi_P^0)+(1-f)a_S(\phi_S^0-\phi_P^0) \cdots\cdots(8)$$

ここに，$u_e\Delta y=F_e$, $u_w\Delta y=F_w$, $v_n\Delta x=F_n$, $v_s\Delta x=F_s$, $a_E=D_e\max\{0,(1-0.1|P_e|)^5\}+\max(-F_e,0)$, $D_e=\Gamma_e\Delta y/(\delta x)_e$, $P_e=F_e/D_e$である。

f の値に応じてそれぞれ次のように分類される。

$$f=\begin{cases} 0 \text{　～陽解法} \\ 0.5\text{～Crank-Nicolson 法} \\ \quad\text{(Conjugate Residual 法により解く)} \\ 1 \text{　～完全陰解法(CR 法または線順法)} \end{cases}$$

上式の数値解で $f=0$ の陽解法は直接解ける。Crank-Nicolson 法で得た式は CR 法を用いて解いた。また，$f=1$ の陰解法で得た式は CR 法または線順法（Line by Line 法）を用いて解いた。

4．3．ADI 法による離散化方程式の導出

ADI 法の(3)の離散化方程式は次式を用いた。ただし，$t=t_0$ で $\phi=\phi^0$, $t=t_0+\Delta t/2$ で $\phi=\phi^*$, $t=t_0+\Delta t$ で $\phi=\phi^1$ とする。

第1ステップ（x方向に陰）

$$\left(a_E+a_W+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t/2}-S_P\Delta x\Delta y\right)\phi_P^*$$
$$=a_E\phi_E^*+a_W\phi_W^*+a_N(\phi_N^0-\phi_P^0)+a_S(\phi_S^0-\phi_P^0)$$
$$+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t/2}\phi_P^0+S_c\Delta x\Delta y \quad\cdots\cdots(9)$$

第２ステップ（y 方向に陰）

$$\left(a_N+a_S+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t/2}-S_P\Delta x\Delta y\right)\phi_P^1$$
$$=a_N\phi_N^1+a_S\phi_S^1+a_E(\phi_E^*-\phi_P^*)+a_W(\phi_W^*-\phi_P^*)$$
$$+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t/2}\phi_P^*+S_c\Delta x\Delta y \quad\cdots\cdots(10)$$

ここで注意すべきことは，４．２節の Line by Line 法は，ADI 法と同じく三重対角行列（Tri Diagonal Matrix 以下 TDM）を解くが，式(8)を用いて x, y の各方向毎に陰的に解いてゆく際に，x 方向，y 方向ごとに Δt づつ時間進行するのではなく，同じ係数を用いて何度かの内部繰り返しをして，Δt 後の値とする。ADI 法では $\Delta t/2$ 毎に進行する解を求めていく。

4．4．時 間 幅

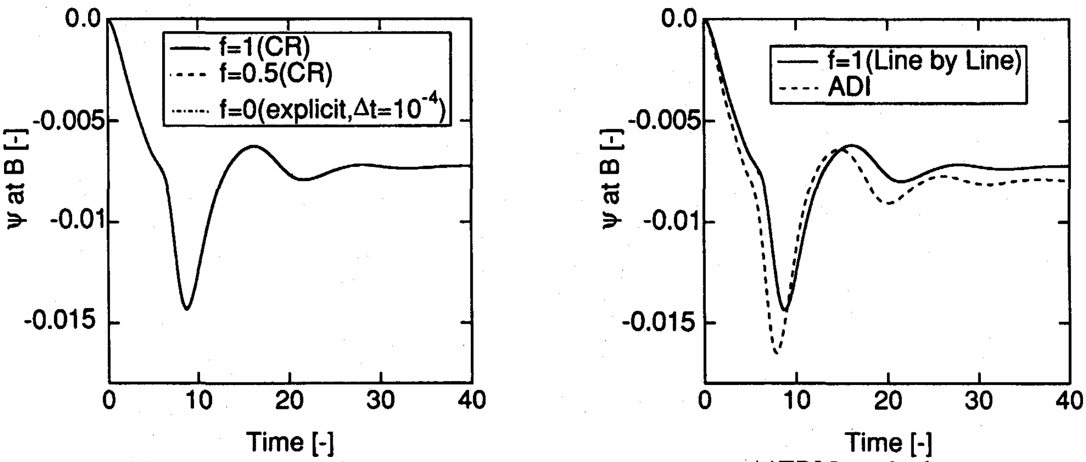
陽解法の安定性の条件から，$\Delta t \leq 0.0274$ である（付録 B）が，ここでは $\Delta t=10^{-4}$ とした。そのほかの方法については，$\Delta t=10^{-2}, 10^{-3}$ として解析を行った。

4．5．空 間 幅

格子の刻みは全ての解法につき，$(x\times y)=(24\times 12)$，$(40\times 20)$，$(80\times 40)$ の３通りについて，等間隔格子を用いて解析を行った。

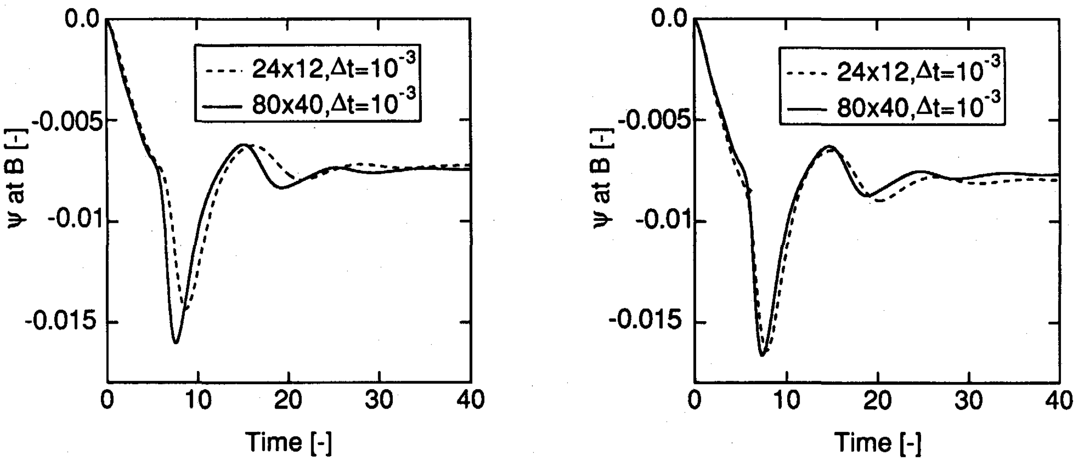
5．解析結果および考察

Fig. 3 には，Fig. 1 の B 点を代表としてそこでの流れ関数 ψ の値の過渡応答を図示してある。差分格子は 24×12である。(a)は陽解法（$f=0$），Crank Nicolson 法（$f=0.5$），完全陰解法（$f=1$）を陽解法または CR 法で解いた結果であり，三者の過渡応答は図中では区別できない。また，$\Delta t=10^{-2}$ と 10^{-3} の両時間ステップも区別できない。以下，これら三者を非 TDM 法と呼ぶことにする。一方，(b)は $f=1$ の式を Line by Line 法にして解いた場合と，ADI 法で解いた場合の応答の比較を示す。完全陰解法と ADI 法とでは $t=7.5$ 付近のピーク値に差がみられる。両者ともそれぞれ $\Delta t=$



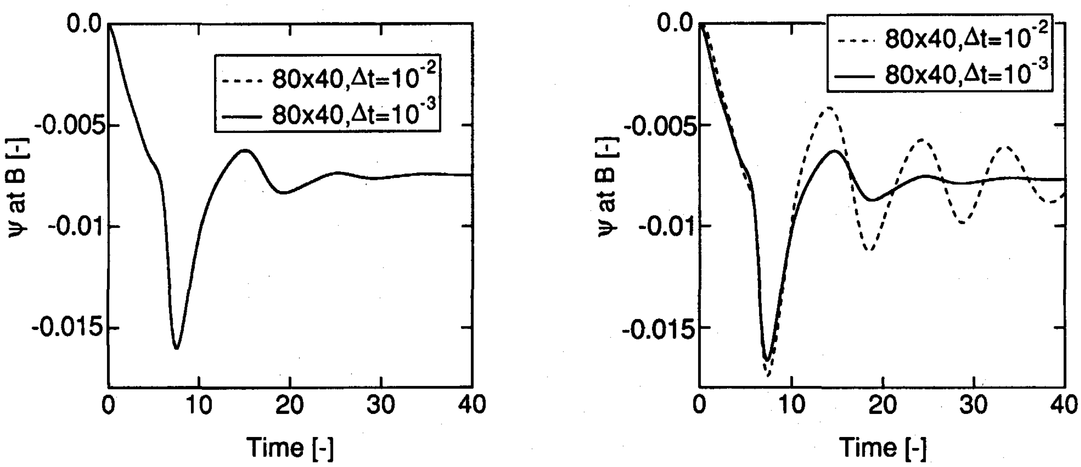
(a)Non-TDM method (b)TDM method

Fig. 3 Transient response of ψ at point B $(24\times12, \Delta t=10^{-2}, \Delta t=10^{-3})$



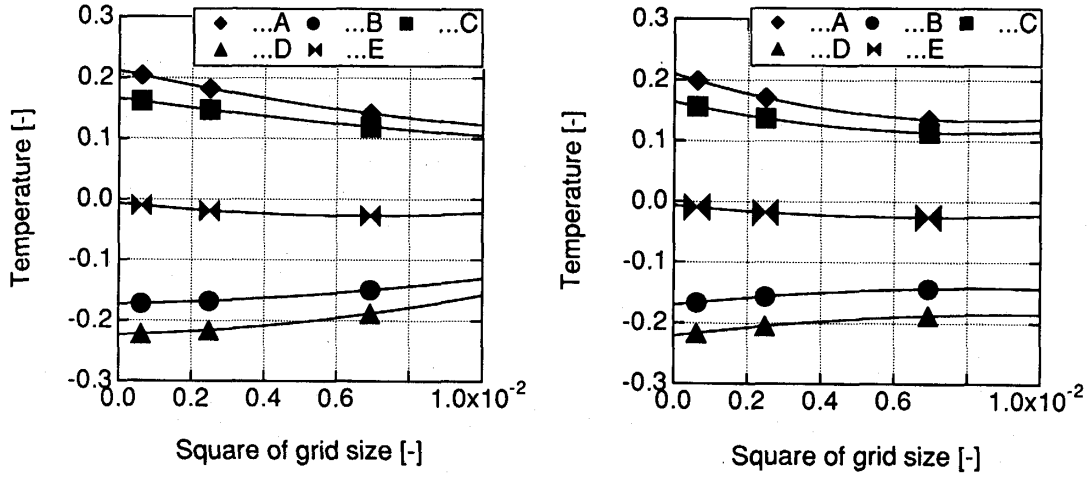
(a)Non-ADI method (b)ADI method

Fig. 4 The effect of grid size $(\Delta t=10^{-3})$



(a)CR method (b)TDM method

Fig. 5 The effect of time step width on the transient response of ψ at point B in the case of 80×40 grid division



(a)Non-ADI method　　　(b)ADI method

Fig. 6　Extrapolation of temperature at infinitesimal grid size

10^{-2}，10^{-3} の両方で解いたがそれらはほとんど区別できない。

Fig.4では差分格子の影響について検討する。(a)は非ADI 法で，$\Delta t=10^{-3}$ を共通にして24×12と80×40の 2 つの格子を用いた過渡応答の違いを示す。t =7.5 付近のピーク値は80×40の方が大きな絶対値を与えている。(b)は ADI 法による式を TDM 法で解いた計算結果を示す。格子幅の影響が(a)よりも小さいようにみえる。

Fig. 5 では80×40という細かい格子を用いた場合で，時間幅 Δt を 10^{-2} と 10^{-3} としたときの過渡応答の比較を示す。(a)は完全陰解法の式を CR 法で解いた場合，(b)は ADI 法の式を TDM 法で解いた場合であり，後者では $\Delta t=10^{-2}$ と 10^{-3} では応答の形が大きく異なる。Fig. 4 (a)における非 ADI 法による80×40の場合の結果と比較して，TDM 法を用い，かつ粗い時間幅を用いると人工的な振動が発生する恐れがあることが示唆される。$\Delta t=10^{-2}$ は TDM 法の安定限界を越えた値であるものと思われる。TDM 法は計算時間とか必要記憶容量が少なくて良いが，時間幅の選択には幾分注意が必要である。

Fig. 6 は Churchill ら[4]による外挿法に基づき，Fig. 1 の A～E の 5 点の温度の計算値を格子幅の二乗の横軸に対してプロットし，かつ横軸のゼロに外挿したところを示す。(a)は ADI 法以外の場合，(b)は ADI 法による結果をプロットしたものである。これらの外挿値を Table 1 に数値として示した。両者の違いは中心の E

Table 1.　Comparison of temperature at infinitesimal grid size

Method	A	B	C	D	E
Non-ADI method (f=1,0.5,0)	0.210	-0.171	0.164	-0.222	-6.58×10^{-3}
ADI method	0.212	-0.173	0.166	-0.224	-6.32×10^{-3}

Table 2.　Comparison of converged values at infinitesimal grid size

Method	U_{av}	V_{av}	T_{av}	Ψ_{av}	$\vert\psi\vert_{max}$
Non-ADI method (f=1,0.5,0)	0.0453	0.0193	0.172	0.00659	0.0125
ADI method	0.0461	0.0197	0.173	0.00672	0.0127

点で4％，他では1％内外であり，CR法を含む非ADI法の値がより精密ではないかと予想されるが，ADI法の簡便さも捨て難いものがある。Table 2は流速成分，温度そして流れ関数の各平均値と流れ関数の最大値を同様にゼロ格子幅に外挿した値を(a)非ADI法と(b)ADI法で比較したものを示す。両者の違いは2％以内である。

本計算を行うのに要した計算機のCPU time比は，TDM：CR：Explicit＝1：5.4：6.1であった。これはスカラー演算の際に要した時間である。この結果からするとTDMを解く方法が有利であるといえる。しかし，ベクトル化による高速化にはCRとExplicitが適している。

6．結　言

長方形領域内の自然対流の過渡数値計算法の比較を以下のいくつかの差分化と数値解法により試みた。

(a)陽解法を用いる場合，あるいは完全陰解法，Crank Nicolson法で差分近似して得られた式を共役残差法を用いて解く場合。

(b) ADI法によって解く場合(三重対角行列を解く)。

その結果は以下にまとめられる。

(1)　得られた差分式を三重対角行列式を用いて解く場合，格子が細かい(80×40)時に粗い時間幅 $\Delta t=10^{-2}$ を用いると人工的と思われる振動解が発生する。これはCR法では発生しないので近似精度としてはCR法がすぐれている。

(2)　細かい時間幅($\Delta t=10^{-3}$)を用いた時，(a)では格子幅によって過渡応答の形がかなり変わるが，(b)ではその違いが小さい。

以上の結果は他の問題に定量的に適用できる指針を与えるまでには至らないが，プログラムの簡便さや計算時間の短い点ではADI法が効率が良く，精度を要求する場合にはCR法，陽解法が好ましいと考えられる。

参考文献

(1)　棚橋隆彦　著，"GSMAC-FEM数値流体力学の基礎とその応用"，アイピーシー，1991

(2)　スハスV.パタンカー著，水谷幸夫，香月正司　共訳，"コンピュータによる熱移動と流れの数値解析"，森北出版，1985

(3)　P.L.T.Brian, *A.I.Ch.E.* J., **7**, 1961, 367-370

(4)　S.W.Churchill, P.Chao and H.Ozoe, *Numer. Heat Transfer*, **4**, 1981, 39-51

付録A　重み係数を用いた離散化方程式の導出

時間積分の定義($t=t_0$ で $\phi_P=\phi_P^0$, $t=t_0+\Delta t$ で $\phi_P=\phi_P^1$とする)

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\phi_P dt=\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\}\Delta t \quad\cdots\cdots(11)$$

2次元対流拡散方程式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}=S \quad\cdots\cdots(12)$$

$$J_x=u\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x},\ J_y=v\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y},\ S=S_c+S_p\phi$$

コントロールボリュームについて，時刻 t_0 から $t_0+\Delta t$ まで積分

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}\right)dydxdt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_w^e\int_s^n Sdydxdt$$

$$左辺=\int_w^e\int_s^n(\phi_P^1-\phi_P^0)\,dydx$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{\int_s^n(J_{xe}-J_{xw})dy+\int_w^e(J_{yn}-J_{ys})dx\right\}dt$$

$$=(\phi_P^1-\phi_P^0)\Delta x\Delta y+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(J_e-J_w+J_n-J_s)dt \quad\cdots(13)$$

$$右辺=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_w^e\int_s^n Sdydxdt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(S_c+S_p\phi_P)\Delta x\Delta ydt \quad\cdots\cdots(14)$$

連続の式をコントロールボリュームについて，時刻 t_0 から $t_0+\Delta t$ まで積分

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dydxdt=0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(u_e\Delta y-u_w\Delta y+v_n\Delta x-v_s\Delta x)\ dt=0 \quad\cdots(15)$$

$$u_e\Delta y=F_e,\ u_w\Delta y=F_w,\ v_n\Delta x=F_n,\ v_s\Delta x=F_s$$

式(13)－式(15)×ϕ_P^1＝式(14)

$$(\phi_P^1-\phi_P^0)\Delta x\Delta y+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\{(J_e-F_e\phi_P)-(J_w-F_w\phi_P)$$

$$+(J_n-F_n\phi_P)-(J_s-F_s\phi_P)\}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(S_c+S_p\phi_P)\Delta x\Delta ydt \quad\cdots\cdots(16)$$

式(11)より，

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(J_e-F_e\phi_P)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{\int_s^n\left(u\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e dy-u_e\Delta y\phi_P\right\}dt$$

$$=\Delta ta_E\left[\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}-\left\{f\phi_E^1+(1-f)\phi_E^0\right\}\right]$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(J_w-F_w\phi_P)dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{\int_s^n\left(u\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w dy-u_w\Delta y\phi_P\right\}dt$$
$$=\Delta t a_W\left[\left\{f\phi_W^1+(1-f)\phi_W^0\right\}-\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}\right]$$
$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(J_n-F_n\phi_P)dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{\int_e^w\left(v\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n dy-v_n\Delta x\phi_P\right\}dt$$
$$=\Delta t a_N\left[\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}-\left\{f\phi_N^1+(1-f)\phi_N^0\right\}\right]$$
$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(J_s-F_s\phi_P)dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{\int_e^w\left(v\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s dy-v_s\Delta x\phi_P\right\}dt$$
$$=\Delta t a_S\left[\left\{f\phi_S^1+(1-f)\phi_S^0\right\}-\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}\right]$$

と定義すると，式(16)は次式のように書ける

$$(\phi_P^1-\phi_P^0)\Delta x\Delta y$$
$$+\Delta t a_E\left[\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}-\left\{f\phi_E^1+(1-f)\phi_E^0\right\}\right]$$
$$-\Delta t a_W\left[\left\{f\phi_W^1+(1-f)\phi_W^0\right\}-\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}\right]$$
$$+\Delta t a_N\left[\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}-\left\{f\phi_N^1+(1-f)\phi_N^0\right\}\right]$$
$$-\Delta t a_S\left[\left\{f\phi_S^1+(1-f)\phi_S^0\right\}-\left\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\right\}\right]$$
$$=\Delta t\left[S_c\Delta x\Delta y+S_p\{f\phi_P^1+(1-f)\phi_P^0\}\Delta x\Delta y\right]$$

整理すると

$$\left(fa_E+fa_W+fa_N+fa_S+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}-fS_p\Delta x\Delta y\right)\phi_P^1$$
$$=fa_E\phi_E^1+fa_W\phi_W^1+fa_N\phi_N^1+fa_S\phi_S^1$$
$$+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\phi_P^0+S_c\Delta x\Delta y+S_p(1-f)\phi_P^0\Delta x\Delta y$$
$$+(1-f)a_E(\phi_E^0-\phi_P^0)+(1-f)a_W(\phi_W^0-\phi_P^0)$$
$$+(1-f)a_N(\phi_N^0-\phi_P^0)+(1-f)a_S(\phi_S^0-\phi_P^0)\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

$$a_E=D_e\max\{0,(1-0.1|P_e|)^5\}+\max(-F_e,0)$$
$$a_W=D_w\max\{0,(1-0.1|P_w|)^5\}+\max(+F_w,0)$$
$$a_N=D_n\max\{0,(1-0.1|P_n|)^5\}+\max(-F_n,0)$$
$$a_S=D_s\max\{0,(1-0.1|P_s|)^5\}+\max(+F_s,0)$$
$$D_e=\Gamma_e\Delta y/(\delta x)_e,\ P_e=F_e/D_e$$
$$D_w=\Gamma_w\Delta y/(\delta x)_w,\ P_w=F_w/D_w$$
$$D_n=\Gamma_n\Delta x/(\delta y)_n,\ P_n=F_n/D_n$$
$$D_s=\Gamma_s\Delta x/(\delta y)_s,\ P_s=F_s/D_s$$
$$f=\begin{cases}0\ \text{〜陽解法}\\0.5\text{〜Crank-Nicolson 法}\\1\ \text{〜陰解法}\end{cases}$$

付録B　陽解法における時間刻みについて

式(8)から，陽解法についての離散化方程式は $f=0$ として，次式となる。

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\phi_P^1=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\phi_P^0+S_c\Delta x\Delta y+S_p\phi_P^0\Delta x\Delta y$$
$$a_E(\phi_E^0-\phi_P^0)+a_W(\phi_W^0-\phi_P^0)+a_N(\phi_N^0-\phi_P^0)$$
$$+a_S(\phi_S^0-\phi_P^0)$$
$$=\left\{\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}-(a_E+a_W+a_N+a_S)+S_p\Delta x\Delta y\right\}\phi_P^0$$
$$+S_c\Delta x\Delta y+a_E\phi_E^0+a_W\phi_W^0+a_N\phi_N^0+a_S\phi_S^0\ \cdots(18)$$

式(18)が数値計算上安定であるためには，ϕ についての係数がすべて正となることである。定義より，

$$a_E=D_e\max\{0,(1-0.1|P_e|)^5\}+\max(-F_e,0)$$
$$=\frac{\Gamma_e\Delta y}{(\delta x)_e}\max\left[0,\left\{1-0.1\left|\frac{u_e\Delta y}{\Gamma_e\Delta y/(\delta x)_e}\right|\right\}^5\right]$$
$$+\max(-u_e\Delta y,0)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

であるから，$a_E\geq 0$ となる。これは，他の a_W, a_N, a_S についても同様である。

したがって，式(8)において，すべての ϕ の係数が正であるためには，ϕ_P^0 の係数について，次式を満たすように Δt を決めれば良い。ただし，式(1)の渦度輸送方程式と比較して，$S_P=0, S_c=Pr^2\partial T/\partial x, \Gamma=Pr/\sqrt{Gr}$ とする。

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\geq a_E+a_W+a_N+a_S\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

本報告においては，等間隔格子を用いており，$\Delta x=\Delta y=\delta x=\delta y$ であり，これを ΔL とする。さらに，式(19)から，

$$a_E=\frac{Pr}{\sqrt{Gr}}\max\left[0,\left\{1-0.1\left|\frac{u_e\Delta L}{\Gamma_e}\right|\right\}^5\right]$$
$$+\max(-u_e\Delta L,0)$$
$$\geq\frac{Pr}{\sqrt{Gr}}+|u_e\Delta L|$$

a_W, a_N, a_S についても同様である。

したがって，

$$a_E+a_W+a_N+a_S\leq 4\frac{Pr}{\sqrt{Gr}}+|u_e+u_w+v_n+v_s|\Delta L$$

ここで，$|u_e+u_w+v_n+v_s|$ については，陰解法時の数値解析の結果を用い，$|u_e+u_w+v_n+v_s|=4v_{max}=0.8$ とすると，次式を得る。

$$a_E+a_W+a_N+a_S\leq 4\frac{Pr}{\sqrt{Gr}}+0.8\Delta L\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

式(21)を式(20)に代入すると，Δt は少なくとも次の関係式を満たさなければならない。

$$\frac{(\varDelta L)^2}{\varDelta t} \geq 4\frac{Pr}{\sqrt{Gr}} + 0.8\varDelta L$$

ここで，$\varDelta t$ が最も小さくなるときの格子刻み$\varDelta L=1/40$($Pr=0.7$, $Gr=10^6$) を用いると，$\varDelta t \leq 2.74\times10^{-2}$ となる。