

## 軸対称系における角関係の一計算法

塚田, 隆夫  
東北大学反応化学研究所

宝沢, 光紀  
東北大学反応化学研究所

大庭, 雄次  
九州大学総合理工学研究科

今石, 宣之  
九州大学機能物質科学研究所

<https://doi.org/10.15017/6623>

---

出版情報：九州大学機能物質科学研究所報告. 7 (1), pp.39-46, 1993-09-30. 九州大学機能物質科学研究所

バージョン：

権利関係：



## 軸対称系における角関係の一計算法

塚田 隆夫\*・宝沢 光紀\*・大庭 雄次\*\*・今石 宣之

### An Evaluation Method of View Factor Integral in Axisymmetric Systems

Takao TSUKADA, Mitsunori HOZAWA,  
Yuji OHBA and Nobuyuki IMAISHI

A new method is proposed to evaluate view factor integrals in an axisymmetric system. View factor,  $F_{dA_i-A_j}$ , between a small surface element  $dA_i$  and an iso-thermal ring element  $A_j$  is directly integrated by means of an analytical equation which is obtained by a line integration along the edge of the visible area of the ring element  $A_j$ . This method does not require sub-division of the ring element into smaller flat surfaces, which is a very common way among the previous methods. On a ring element  $A_j$ , the area which is directly seen by  $dA_i$  is determined by simple geometrical projection of any obstacle existing between  $dA_i$  and  $A_j$  onto  $A_j$  plane.

This method reduces CPU time for view factor integration encountered in a radiative heat transfer analysis of a Czochralski furnace with many components by a factor of as much as 100.

#### 1. はじめに

オプト・エレクトロニクスの進展に伴って、半導体あるいは酸化物の高品位単結晶の育成技術の発展が要求されている。これらの単結晶の工業的育成には、融液からの育成法、とりわけ Czochralski 法（以下 Cz 法と略記する）およびその改良法が最も広く利用されている。これまでに、Cz 炉内の流れ、熱・物質の移動様式が結晶の品質に大きな影響を及ぼすことが分かってきたが、炉内の移動現象は未だ十分理解できていない。高温の特殊な状況にある Cz 炉内の状態を知るためには計算機シミュレーションが有効である。

特に、炉構成要素間の熱的相互作用の極めて強い Cz 炉の中での、実際の結晶育成状況を検討するグローバル熱・流動解析に対する要求が強まっている。グローバル解析においては、炉の構造、材料の物性、装置の壁温、加熱ヒーターへの供給電力量、などの実際的な量のみを与え、炉内の全ての要素を考慮に入れた熱・流動解析によって炉内の全状況を数値解析する。炉内の温度分布を求めようとするとき、エネルギー方程式の境界条件として Cz 炉内の構造物表面間の放射熱流束の算定が必要である。

Cz 炉は、図1に基本構造を示したように、軸対称形状で周囲を固体壁で囲まれた閉空間である。そこで、Cz 炉構成要素表面がいずれも拡散反射する灰色体で近似できると仮定して、Gebhart の閉空間モデル<sup>1)</sup>を用いて放射熱流束を算出する例が多い<sup>2,3,4,5)</sup>。軸対称温度分布を仮定しても、装置内の表面間の放射熱交

受理日 平成5年6月25日

\* 東北大学 反応化学研究所

\*\* 九州大学 総合理工学研究科

換には全表面が関与しているため、角関係の計算は3次元的に行なう必要がある。炉内には各種の構造物が在るため、他物体による遮蔽作用の有無を個々に検討しなければならず、複雑な形状の場合には、角関係の計算には極めて長時間を要する。従って、効率的計算のためには、何らかの高速計算法を開発する必要がある。本報告では、円形断面を有する軸対称系の角関係の算出の高速化のために、解析解を利用した一手法について述べる。なお、本法とは異なった高速計算手法が Duplet ら<sup>5)</sup>によって提案されている。

## 2. 解析の対象

図1に示した Cz 炉の内部の放射熱伝達過程を解析する。軸対称系の問題では円周方向には温度分布が無いと仮定しているため、エネルギー方程式は任意の  $r-z$  平面内の温度分布を記述する。物体の表面における境界条件として、微小表面積  $dA_i$  と周囲との放射熱交換を評価する時、 $dA_i$  と、他の表面要素との角関係  $F_{dA_i-A_j}$  の算出が必要である。他の表面要素とは、 $dA_i$  と同じ  $(r_i, z_i)$  に属する等温のリング状の表面、他の全ての微小表面要素  $dA_j$  が属するリング状の表面を意味している。

なお、軸対称のリング状の  $A_j$  面から  $A_i$  面（微小表面要素  $dA_i$  を含むリング状の表面要素）への角関

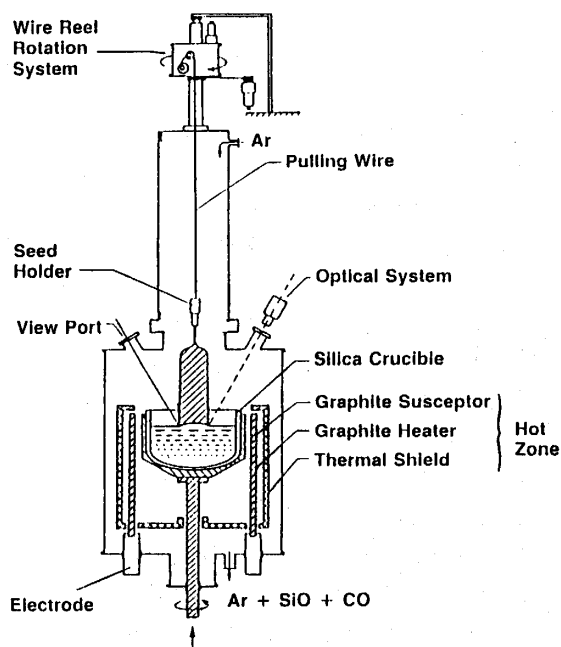


Fig. 1 Schematics of typical Czochralski silicon crystal growing system

係を  $F_{A_j-A_i}$  と記すとき、

$$F_{A_j-A_i} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} F_{dA_i-A_j} dA_i$$

であり、さらに、 $F_{A_j-A_i}$  の値は円周方向に依存しないので、

$$F_{A_j-A_i} = \frac{A_i}{A_j} F_{dA_i-A_j}$$

また次式も成立する。

$$F_{A_i-A_j} = \frac{A_j}{A_i} F_{A_j-A_i} = F_{dA_i-A_j}$$

したがって、各表面要素間に障害物が存在せず、それぞれの表面要素の形状が同心円筒、環状面、円板などの簡単な構造の場合は、それらの角関係に関する文献値をそのまま使用すればよい。しかし、炉内に多数の構造物が存在する場合には、遮蔽効果について十分注意する必要がある。

## 3. 角関係の計算法

数値解析において差分法あるいは有限要素法を用いるとき、計算領域は  $r, \theta, z$  方向の微小要素に分割され、表面微小要素の形状は四角形で近似されている<sup>6)</sup>。したがって、リング状の表面  $A_j$  を  $\theta$  方向に  $d\theta$  毎の微小四角形要素に分割して、個々に計算を行わねばならない。

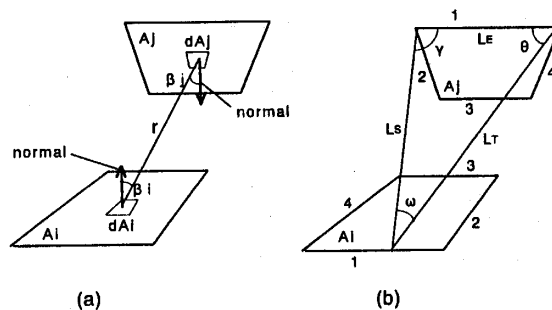


Fig. 2 Geometry for view factor between two quadrilateral surfaces

つまり、図2に示す二つの四角形要素間の角関係  $F_{i,j}$  は次式で定義される。

$$F_{i,j} = \frac{1}{\pi A_i} \iint \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{r^2} dA_i dA_j \quad (1)$$

次のように、ストークスの定理によって線積分に変換して計算することができる。

$$F_{i,j} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint \{ \ln(r) dx_i dx_j + \ln(r) dy_i dy_j + \ln(r) dz_i dz_j \}$$

$$= \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{l=1}^4 \sum_{j=1}^4 \phi(I, J) \oint (L_T \cos \theta \ln(L_T) + L_S \cos \gamma \ln(L_S) + L_E \cos \omega \ln(L_E)) dU \quad (2)$$

ここで

$$\phi_{(I, J)} = l_1 l_j + m_1 m_j + n_1 n_j$$

であり、添え字 I, J は要素 i, j 上の各辺に付けた番号で、l, m, n は各々の辺の方向余弦である。この  $F_{i,j}$  の値は容易に算出可能である。

しかし、上記の  $F_{i,j}$  は、 $A_i$  と  $A_j$  が直接見通せる場合にのみ意味を持つ。

ところが、形状が複雑になって、i, j 面間に存在する障害物によって直接目視できない場合には  $F_{i,j} = 0$  となる。したがって上式で角関係を算出する前に、面 i から面 j が見えるか否かの判定をしておく必要がある。その最も一般的な手続きは以下の様に行われる。

### 3.1 一般的方法

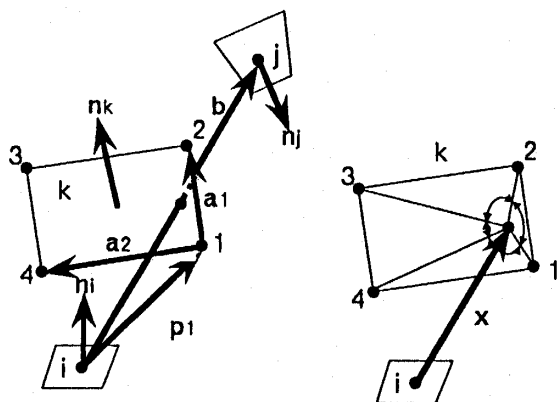


Fig. 3 Geometry for judging whether visible or not

図3において、それぞれの面の法線ベクトルを  $n_i, n_j$ , 両面の中心を結ぶベクトルを  $b$  とする。まず、障害物を考慮しない状況で、見える見えないを判定する。

$b \cdot n_i < 0$  あるいは  $-b \cdot n_j < 0$  : 見えない  
見えないと判断された場合、 $F_{i,j} = 0$  とおき、以下の手続きに進む必要はない。

$b \cdot n_i > 0$  かつ  $-b \cdot n_j > 0$  : 見える  
この場合には、面 i から見える全ての面 k について (ただし面 j を除く)、面 k が面 i, j を結ぶ直線 (ベクトル  $b$ ) を遮るか否かを判定する。

面 k を定めるベクトル  $a_1, a_2$  を

$$a_1 = (x_2 - x_1)e_x + (y_2 - y_1)e_y + (z_2 - z_1)e_z$$

$a_2 = (x_4 - x_1)e_x + (y_4 - y_1)e_y + (z_4 - z_1)e_z$   
とすると、この面の単位法線ベクトルは

$$n_k = \frac{(a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|}$$

である。面 i 上の点 i から面 k 上の点 l へのベクトルを  $p_l$  とすると

$$p_l = (x_l - x_i)e_x + (y_l - y_i)e_y + (z_l - z_i)e_z$$

となる。したがって、点 i から、ベクトル  $b$  と面 k との交点までの距離 ( $|p_l|$ ) と、点 i から点 j までの距離  $|b|$  との比  $t$  は

$$t = (p_l \cdot n_k) / (b \cdot n_k)$$

である。したがって、

$t > 1$  : 面 k は i と j の間には存在しないので、障害物とはならない。

$0 < t < 1$  : 面 k は i と j の間に存在するので、さらに次の判定を行なう。

点 i から、ベクトル  $b$  と面 k との交点へのベクトルを  $x$  とするとき、面 k の 4 頂点からこの交点へ引いた直線間の角度を求め、その総和が  $2\pi$  になるか否かをチェックする。すなわち、

$$\sum_{l=1}^3 \cos^{-1} \left[ \frac{(p_l - x) \cdot (p_{l+1} - x)}{|p_l - x| |p_{l+1} - x|} \right] + \cos^{-1} \left[ \frac{(p_4 - x) \cdot (p_1 - x)}{|p_4 - x| |p_1 - x|} \right] = 2\pi$$

が成立すれば、 $x$  は表面要素、面 k、の内部に存在する (図3)。したがって、面 i から面 j は面 k によって遮られていて、直接見えないので、 $F_{i,j} = 0$  とおく。 $t > 1$  あるいは上式が成立しない場合には、式(2)によって  $F_{i,j}$  を計算する。

$F_{i,j}$  の計算精度を上げるためには円周方向の分割を細かくし表面要素の数を多くする必要がある。目視可否の判断のための計算は、簡単化のために直接目視の可否判断を要素の中心点のみで行なったとしても、きわめて長い CPU 時間を必要とする。

### 3.2 簡略化法 I

3.1 の計算に長時間を要する原因は、目視可否の判断を、全微小表面要素について行なうためである。したがって、炉形状が簡単で、何等かの簡単な付加的な幾何学的選択基準を置ける場合には、計算量が減少し、 $F_{i,j}$  の計算時間を短縮できる。

例として、図4のように、炉内に軸対称 (ロート状など) な単純な形状の障害物 k を 1 個だけ設置した場合を考える。挿入物体の下端での内半径位置を  $(r_{k1}, Z_{k1})$ , 上端の外半径位置を  $(r_{k2}, Z_{k2})$  とする。こ

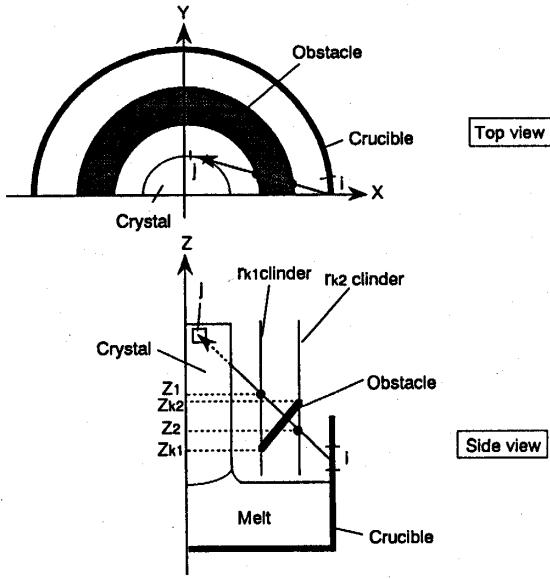


Fig. 4 Simple method for judging whether visible or not

の系での、結晶表面上の表面要素と坩堝内表面あるいは融液表面上の表面要素との間の角関係を計算する場合、両要素の中心点をむすぶ直線が半径  $r_{k1}$  の円筒、半径  $r_{k2}$  の円筒と交差する点の座標を求め、その  $z$  座標を  $Z_1, Z_2$  とすると、

$$(Z_{k1} - Z_1)(Z_{k2} - Z_2) < 0$$

のとき障害となる。よって、 $F_{ij} = 0$  と置くことができ、煩雑な判定のための計算量を減らすことが出来る。

このような単純な条件の導入によって、 $F_{ij}$  の計算時間を 3.1 での一般計算法を全ての表面要素に対して計算させる場合の十分の一程度にまで短縮可能となる。

### 3.3 解析解を併用する方法

3.2 の方法は、複雑な形状の坩堝の場合には適用困難となる。3.1 の方法で計算時間を増加させる原因は、計算精度を確保するためには円周方向の分割数を増やす必要があるが、それによって微小表面要素の数が多くなり、目視の可否判断に多大な負担が掛かった点にある。したがって、リング状表面要素  $A_j$  と微小表面要素  $dA_i$  との間の角関係を、円周方向に分割することなく計算出来れば、計算時間は大幅に短縮可能である。そのため次の方法を試みた。

いま、 $(x_i, y_i, z_i)$  に中心を持つ微小表面要素  $dA_i$  と、 $A_j$  との間の角関係は次式で表わされる。

$$F_{dA_i-A_j} = l_i \frac{(z_j - z_i)dy_j - (y_j - y_i)dz_j}{2\pi L^2}$$

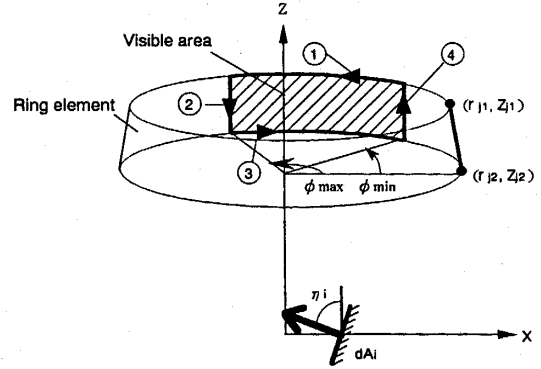


Fig. 5 Visible area on a ring element from a small surface element

$$+ m_i \frac{(x_j - x_i)dz_j - (z_j - z_i)dx_j}{2\pi L^2} + n_i \frac{(y_j - y_i)dx_j - (x_j - x_i)dy_j}{2\pi L^2} \quad (3)$$

ここで  $l_i, m_i, n_i$  は  $dA_i$  の方向余弦である。この表現式を用いると、図 5 に示す  $dA_i$  とリング状表面  $A_j$  との間の角関係を次式で計算できる。なお、本解析法を使用する前提として、一個のリング要素の幅は十分小さいものとする。また、 $dA_i$  の法線は  $z$  軸（坩堝の中心軸）と交わるものとする。 $dA_i$  の法線が  $z$  軸となす角を  $\eta_i$  とするとき、

$$l_i = -\sin \eta_i, \quad m_i = 0, \quad n_i = \cos \eta_i$$

で求められる。ただし、 $dA_i$  の中心からは、リングの一部 ( $\phi_{min} < \phi < \phi_{max} < \pi$ ) のみが直接見えるものとする。その可視部分の積分経路の各辺に図のように番号をつけて表わすこととする。(3)式を適用し、線積分を 4 つの領域にわけて評価すると

$$F_{dA_i-A_j} = F_{dA_i-A_j} \textcircled{1} + F_{dA_i-A_j} \textcircled{2} + F_{dA_i-A_j} \textcircled{3} + F_{dA_i-A_j} \textcircled{4} \quad (4)$$

となる。辺①の積分値は次のように表わされる。

$$F_{dA_i-A_j} \textcircled{1} = -\frac{(\phi_{max} - \phi_{min})}{2\pi} \left\{ \cos \eta_i \frac{z_{j2} - z_i}{r_i} \sin \eta_i \right\} - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{r_{j2}^2 - r_i^2 - (z_{j2} - z_i)^2}{[r_{j2}^2 + r_i^2 + (z_{j2} - z_i)^2]^2 - 4r_{j2}^2 r_i^2} \right\}^{1/2} \cos \eta_i + \frac{(z_{j2} - z_i) \{ r_{j2}^2 + r_i^2 + (z_{j2} - z_i)^2 \}}{r_i [r_{j2}^2 + r_i^2 + (z_{j2} - z_i)^2]^2 - 4r_{j2}^2 r_i^2} \sin \eta_i \} \times \left\{ \tan^{-1} \left( r_j \tan \frac{\phi_{max}}{2} \right) - \tan^{-1} \left( r_j \tan \frac{\phi_{min}}{2} \right) \right\} \quad (5)$$

ここで

$$r_{ji} = \frac{r_{j2}^2 + r_i^2 + (z_{j2} - z_i)^2 + 2r_{j2}r_i}{r_{j2}^2 + r_i^2 + (z_{j2} - z_i)^2 - 2r_{j2}r_i}$$

と略記してある。

辺③での線積分値  $F_{dA_i-A_j}$ ③は、上式の  $r_{j2}, z_{j2}$  をそれぞれ  $r_{j1}, z_{j1}$  へと変更し、符号を反転すればよい。

また、辺②での線積分値は  $\phi_{max}$  が  $z$  によらず一定ならば、次のように表わされる。この仮定は、リング要素  $A_j$  の  $z$  方向の幅が小さい場合には十分成り立つ。

$$F_{dA_i-A_j}② = -\frac{\sin\phi_{max}}{\pi} \frac{[r_i \Delta r \cos\eta_i - (\Delta r(z_{j1}-z_i) - r_{j1}\Delta z)\sin\eta_i]}{r_j'} \times [\tan^{-1} \frac{[\Delta r(\Delta r+r_{j1}-r_i \cos\phi_{max}) + \Delta z(\Delta z+z_{j1}-z_i)]}{r_j'} - \tan^{-1} \frac{[\Delta r(r_{j1}-r_i \cos\phi_{max}) + \Delta z(z_{j1}-z_i)]}{r_j'}] \quad (6)$$

ただし、

$$\Delta r = r_{j2} - r_{j1}, \quad \Delta z = z_{j2} - z_{j1}$$

$$r_j' = [(\Delta r(z_{j1}-z_i) - \Delta z(r_{j1}-r_i \cos\phi_{max}))^2 + r_i^2((\Delta r)^2 + (\Delta z)^2)\sin^2\phi_{max}]^{1/2}$$

である。

辺④での線積分値は上式の  $\phi_{max}$  を  $\phi_{min}$  と置替えて計算し、符号を逆転すればよい。

この計算法を適用するには、リング状表面要素  $A_j$  上の、 $dA_i$  から直接目視される領域、 $\phi_{min} < \phi < \phi_{max}$  を知らねばならない。ここでは、その決定法として以下の手順を採用した。

以下ではまず、直接目視出来ない範囲を  $\phi_{min} \sim \phi_{max}$  してと表わすこととする。

まず、 $dA_i$  から直接目視不可能領域を決定する。この際簡単のために、有限幅のリング状要素  $A_j$  を、その中心を通る円  $O_j$  で代表させて考える。

$dA_i$  の法線が  $z$  軸となす角を  $\eta_i$  (その符号は図6に

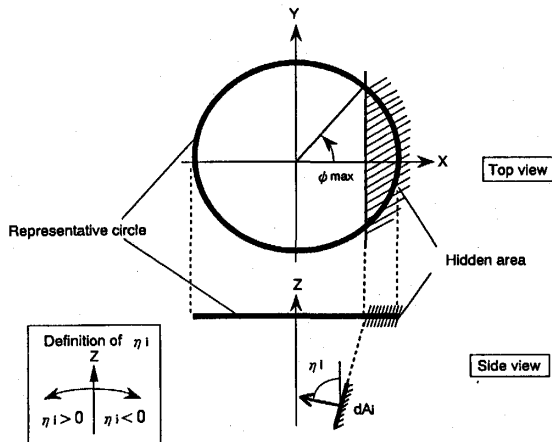


Fig. 6 Hidden area from a small surface element, hidden by itself

示す通り) とするとき、円  $O_j$  上の

$$\eta_i < 0 \text{ ならば: } \phi_{min} = \phi^\circ \sim \phi_{max} = \pi$$

$$\eta_i > 0 \text{ ならば: } \phi_{min} = 0 \sim \phi_{max} = \phi^\circ$$

の範囲は、 $dA_i$  から直接目視できない。ここで

$$\phi^\circ = \cos^{-1} \left\{ \frac{r_i + (z_j - z_i) / \tan \eta_i}{r_{kj}} \right\} (0 \leq \phi^\circ \leq \pi)$$

ただし、以下のような特例がある。

$$\textcircled{1} \begin{cases} (\eta_i = 0 \text{ and } z_j - z_i > 0) \\ \text{or} \\ (\eta_i = \pm \pi \text{ and } z_j - z_i < 0) \end{cases} : \phi_{min} = \pi, \phi_{max} = \pi$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} (\eta_i = 0 \text{ and } z_j - z_i \leq 0) \\ \text{or} \\ (\eta_i = \pm \pi \text{ and } z_j - z_i \geq 0) \end{cases} : \phi_{min} = 0, \phi_{max} = \pi$$

$$\textcircled{3} (\eta_i > 0 \text{ and } r_i + (z_j - z_i) / \tan \eta_i \geq r_j) : \phi_{min} = 0, \phi_{max} = 0$$

$$\textcircled{4} (\eta_i < 0 \text{ and } r_i + (z_j - z_i) / \tan \eta_i \leq -r_j) : \phi_{min} = \pi, \phi_{max} = \pi$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} (\eta_i > 0 \text{ and } r_i + (z_j - z_i) / \tan \eta_i \leq -r_j) \\ \text{or} \\ (\eta_i < 0 \text{ and } r_i + (z_j - z_i) / \tan \eta_i \geq r_j) \end{cases} : \phi_{min} = 0, \phi_{max} = \pi$$

また面  $A_j$  の法線の方によっても判断しなければ

$$\eta_j < 0 \text{ ならば: } \phi_{min} = \phi^\circ, \phi_{max} = \pi$$

$$\eta_j > 0 \text{ ならば: } \phi_{min} = 0, \phi_{max} = \phi^\circ$$

$$\text{ここで } \phi^\circ = \cos^{-1} \frac{r_j - (z_j - z_i) / \tan \eta_j}{r_i}$$

但し  $0 \leq \phi^\circ \leq \pi$

ただし、以下の特例を設ける。

$$\textcircled{1} \begin{cases} (\eta_j = 0 \text{ and } z_j - z_i \geq 0) \\ \text{or} \\ (\eta_j = \pm \pi \text{ and } z_j - z_i \leq 0) \end{cases} : \phi_{min} = 0, \phi_{max} = \pi$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} (\eta_j = 0 \text{ and } z_j - z_i < 0) \\ \text{or} \\ (\eta_j = \pm \pi \text{ and } z_j - z_i > 0) \end{cases} : \phi_{min} = 0, \phi_{max} = \pi$$

$$\textcircled{3} (\eta_j > 0 \text{ and } r_j - (z_j - z_i) / \tan \eta_j \geq r_i) : \phi_{min} = \pi, \phi_{max} = \pi$$

$$\textcircled{4} (\eta_j < 0 \text{ and } r_j - (z_j - z_i) / \tan \eta_j \leq -r_i) : \phi_{min} = 0, \phi_{max} = 0$$

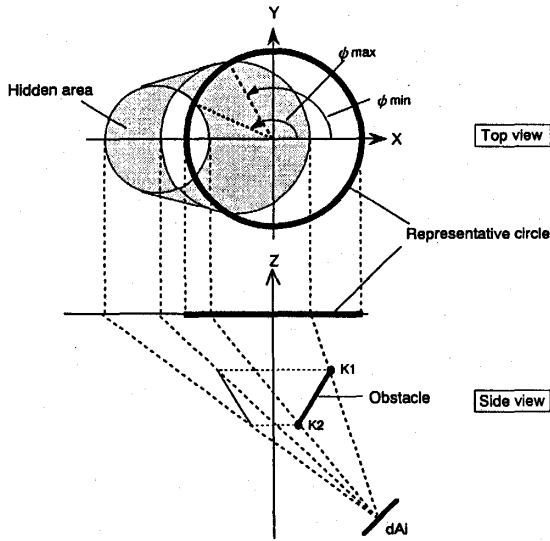


Fig. 7 Area hidden by an obstacle

$$\textcircled{5} \begin{cases} (\eta_j > 0 \text{ and } r_j - (z_j - z_i) / \tan \eta_j \leq -r_i) \\ \text{or} \\ (\eta_j < 0 \text{ and } r_j - (z_j - z_i) / \tan \eta_j \geq r_i) \end{cases}$$

$$: \phi_{\min} = 0, \phi_{\max} = \pi$$

この両条件を共に満足する  $\phi$  の範囲が、途中に障害物が存在しなくとも、直接目視できない領域である。

次に、図7に示すように、 $dA_i$  と  $A_j$  との間に、ある高さ  $\Delta z (= |z_{k1} - z_{k2}|)$  を持つリング状の障害物  $k$  が存在する場合を考える。

まず次の条件を満たす場合には、物体  $k$  は  $dA_i - A_j$  間の障害物とならない。

$$\min(z_{k1}, z_{k2}) \geq \max(z_i, z_j) : k \text{ は } dA_i, A_j \text{ より}$$

$$\text{or } \max(z_{k1}, z_{k2}) \leq \min(z_i, z_j) \text{ 上か下に位置する。}$$

$$\min(r_{k1}, r_{k2}) \geq \max(r_i, r_j) : k \text{ は大きな中空リング。}$$

これ以外の場合には、以下のようにして目視不能領域  $\phi_{\min} \sim \phi_{\max}$  を決定する。ただし、以下の操作における物体  $k$  の上下端の  $z$  座標について次のように取り決める。

もしも  $\min(z_{k1}, z_{k2}) \leq \min(z_i, z_j)$  ならば、

$\min(z_{k1}, z_{k2})$  の代わりに  $\min(z_i, z_j)$  を用いる。

また  $\max(z_{k1}, z_{k2}) \geq \max(z_i, z_j)$  ならば、

$\max(z_{k1}, z_{k2})$  の代わりに  $\max(z_i, z_j)$  を用いる。

まず、特殊な場合として、 $z_i = z_j$  の場合を考える

$$\textcircled{1} \begin{cases} (r_j < r_i \text{ and } r_k = r_j) \\ \text{or} \\ (r_j > r_i \text{ and } r_k = r_j) \end{cases}$$

$$: \phi_{\min} = \pi, \phi_{\max} = \pi$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} (r_j < r_i \text{ and } r_k > r_j) \\ \text{or} \\ (r_j > r_i \text{ and } r_k > r_j) \end{cases}$$

$$: \phi_{\min} = 0, \phi_{\max} = \pi$$

$$\textcircled{3} \text{ その他の場合: } \phi_{\min} = \cos^{-1}\left(\frac{r_k}{r_i}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{r_k}{r_j}\right),$$

$$\phi_{\max} = \pi$$

一般的な場合については次のように処理する。

任意の  $x y$  平面 ( $z = z_{km}$ ) による  $k$  の切断面  $O_{km}$  の形状は円形である。これを、 $dA_i$  の中心に置いた点光源によって、 $A_j$  の中心を通る  $x y$  平面 ( $z = z_j$ ) に投影した形状も円形である (図7)。 $z_{km}$  を  $z_{k1}$  から  $z_{k2}$  まで動かした時の、 $O_{km}$  が  $z_j$  平面上に形成する陰影部の集合と  $O_j$  とが重なる部分が、障害物  $k$  によって遮蔽される部分である。

平面  $z_{km}$  による  $A_k$  の切断面の  $z_j$  平面への投影が  $O_j$  と交わる点の  $x$  座標は

$$x(z_{km}) = \frac{r_{km}^2(z_j - z_i) - r_j^2(z_{km} - z_i)^2 - r_i^2(z_j - z_{km})^2}{2r_i(z_j - z_{km})(z_{km} - z_i)} \quad (7)$$

で与えられる。 $A_k$  の上下端 ( $z_{k1}, z_{k2}$ ) での円形断面の投影図形が、円  $O_j$  と交わる点の  $x$  座標をそれぞれ、 $x(z_{k1}), x(z_{k2})$  と表わす。

切断面の位置  $z_k$  を  $z_{k1}$  から  $z_{k2}$  まで変化させたとき  $x(z_k)$  が極値を持つか否かを、次のように検討する。 $O_{km}$  の半径  $r_{km}$  は次式で表される。

$$r_{km} = \frac{(r_{k2} - r_{k1})}{(z_{k2} - z_{k1})} z_{km} - \frac{(r_{k2} z_{k1} - r_{k1} z_{k2})}{(z_{k2} - z_{k1})} = a z_{km} + b$$

この式を式(7)に代入し、 $\partial x / \partial z_{km} = 0$  とおいて、 $z_{km}$  について整理すると、極値を示す  $z_{km}$  は次式の実根として求められる。

$$A z_{km}^2 + 2 B z_{km} + C = 0$$

ただし、

$$A = 2ab(z_j - z_i) + a^2(z_j - z_i)(z_j + z_i) - r_j^2 + r_i^2$$

$$B = a^2(z_j - z_i)z_j z_i - b^2(z_j - z_i) - r_j^2 z_i + r_i^2 z_j$$

$$C = 2ab(z_j - z_i)z_j z_i + b^2(z_j - z_i)(z_j + z_i) + r_j^2 z_i^2 - r_i^2 z_j^2$$

したがって、判別式を  $D = B^2 - AC$  として、

$D < 0$  ならば、極値は取らず、物体  $k$  に遮られて目視不可能な範囲は

$$\phi_{k, \min} = \cos^{-1}\{\max(x(z_{k1}), x(z_{k2}))/r_j\}$$

$$\phi_{k, \max} = \cos^{-1}\{\min(x(z_{k1}), x(z_{k2}))/r_j\}$$

となる。

$D > 0$  ならば、極値を取るのて、上の2次式の実根(これを  $z_{k0}$  とする)を求め、その投影円と  $r_j$  との交点の  $x$  座標を  $x(z_{k0})$  とするとき

$$\phi_{k, \min} = \cos^{-1} \left\{ \frac{\max(x(z_{k0}), x(z_{k1}), x(z_{k2}))/r_j}{r_j} \right\}$$

$$\phi_{k, \max} = \cos^{-1} \left\{ \frac{\min(x(z_{k0}), x(z_{k1}), x(z_{k2}))/r_j}{r_j} \right\}$$

と求められる。ただし、

$$\max(x(z_{k0}), x(z_{k1}), x(z_{k2})) \geq r_j$$

の場合:  $\phi_{k, \min} = 0$

$$\max(x(z_{k0}), x(z_{k1}), x(z_{k2})) \leq -r_j$$

の場合:  $\phi_{k, \min} = \pi$

$$\min(x(z_{k0}), x(z_{k1}), x(z_{k2})) \geq r_j$$

の場合:  $\phi_{k, \min} = 0$

$$\min(x(z_{k0}), x(z_{k1}), x(z_{k2})) \leq -r_j$$

の場合:  $\phi_{k, \min} = \pi$

とする。

$A_j$  と  $dA_i$  の間の全ての表面要素についての、 $\phi_{k, \max}$ ,  $\phi_{k, \min}$  を重ね合わせる事によって、面  $dA_i$  から面  $A_j$  を見ることが出来ない範囲  $\phi_{\max}$ ,  $\phi_{\min}$  が決定される。ただし、一つの  $dA_i - A_j$  に対して、複数の  $\phi_{\max}$ ;  $\phi_{\min}$  の組が存在する可能性がある。角関係の計算に用いる  $\phi_{\max}$ ,  $\phi_{\min}$  の値は、 $0 \sim \pi$  から  $\phi_{\min} \sim \phi_{\max}$  を差し引いて求める。

なお、上記の操作で求めた  $F_{dA_i - A_j}$  は、 $\phi = 0 \sim \pi$  について行なっているので、 $dA_i$  からリング状表面要素  $A_j$  を見込む  $F_{dA_i - A_j}$  としては、その2倍の値を用いばよい。

この計算法をもとにプログラムを作成し、有限長二重円筒など単純な形状の角関係を計算し、既往の値と等しい結果が得られることを確認した。図8に示す断面を有する簡単な形状の軸対称円筒状構造物 (Cz 炉の簡易計算に於て遭遇した形状<sup>7)</sup>) の78個の表面要素間の角関係を算出する場合を例にとると、3.1の方法で計算すると周方向に40以上に細かく分割する必要があった (全ての表面要素  $i$  について  $\sum F_{i,j} = 1.0$  なる関係を1%以内の誤差で満足するための条件)。周方向に40分割した場合、角関係の算出に九州大学大型計算機センターを利用して250秒程度のCPU時間を要した。3.2の方法を採用すると、周集方向には同一分割条件で、2.5秒を要した。3.3の解析解を応用した方法では、1.5秒程度にまで高速化された。また高周波加熱される酸化物結晶用のCz炉のグローバル熱・流動解析など、より複雑な形状の炉系に対しても効率的に利用できた<sup>8)</sup>。現在のプログラムはFORTRANで記述されており、有限要素解析における表面要素数、あるいは差分法における表面上の格子点数、を  $N$  とするとき、 $N \times N$  程度の配列を作業空間として

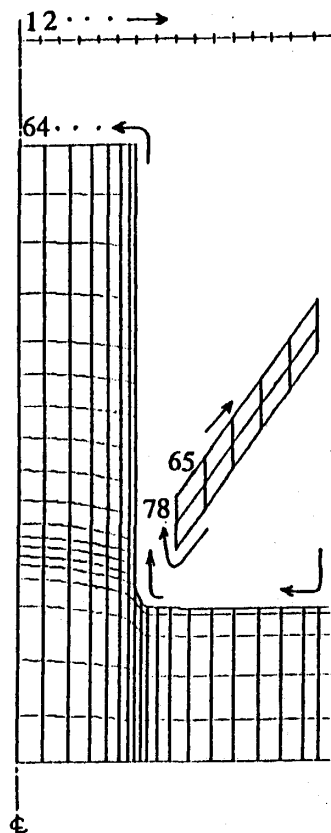


Fig. 8 Sample configuration of surface-elements in a Cz furnace analysis.

There are 78 surface elements which would be at different temperatures but axisymmetrically uniform

使用する。複雑な構造のCz炉などの伝熱計算に本プログラムを用いるとき、ふく射に関与する表面要素数  $N$  が多くなると、必要なメモリー空間は大きくなるが、3.1の方法などに比較するとメモリー量、計算時間いずれをとっても有利となる。

## 結 論

軸対称系における角関係の計算を、比較的簡単に求める新しいアルゴリズムを提案した。本法によって、複雑な形状のCzochralski炉などの輻射解析において、約1000程度の表面要素間の角関係の計算を、従来法の数分の一から数百分の一の演算時間で実行することができる。

なお、本報中では計算機プログラムは示さなかったが、必要な場合には著者へ連絡いただきたい。



軸対称系の角関係

使用記号

a	: ベクトル	
A	: 表面積	[m <sup>2</sup> ]
b	: ベクトル	
e	: 単位ベクトル	
F	: 角関係	[-]
l	: 方向余弦	[-]
L	: 距離	[m]
m	: 方向余弦	[-]
n	: 方向余弦	[-]
n	: 法線ベクトル	
r	: 半径	[m]
x	: 座標	[m]
y	: 座標	[m]
z	: 座標	[m]
$\alpha$	角度	
$\beta$	角度	
$\gamma$	角度	
$\eta$	角度	
$\theta$	円筒座標における周方向の角度	
$\phi$	角度: 目視可能な角度	
$\psi$	角度: 目視不可能な角度	

添 字

i	表面要素 i
j	表面要素 j
k	表面要素 i, j 以外の要素。障害物候補

文 献

- 1) R. Siegel and J. R. Howell ; Thermal Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, NY (1972)
- 2) J. J. Derby and R. A. Brown ; J. Crystal Growth, vol. 74, 605 (1986)
- 3) T. Tsukada, N. Imaishi, M. Hozawa and K. Fujinawa ; J. Chem. Eng. Japan, vol. 20, 146 (1987)
- 4) S. Miyahara, S. Kobayashi, T. Fujiwara, T. Kubo and H. Fujiwara ; J. Crystal Growth, vol. 99, 696 (1990)
- 5) F. Duplet, P. Nicodeme, Y. Ryckmans, P. Wouters and M. J. Crochet ; Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 33, 1849 (1990)
- 6) W. J. Minkowycz *et al* ed. "Handbook of Numerical Heat Transfer", p. 588, John Wiley & Sons, NY (1988)
- 7) K. Honda, N. Imaishi, T. Tsukada and M. Hozawa ; J. Chem. Eng. Japan, vol. 25, 84 (1992)
- 8) T. Tsukada, M. Hozawa and N. Imaishi ; submitted to J. Chem. Eng. Japan.