

# Well-posedness and asymptotic behavior for nonlinear evolution equations in fluid dynamics

藤井, 幹大

<https://hdl.handle.net/2324/5068169>

---

出版情報 : Kyushu University, 2022, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

氏 名	藤井 幹大			
論 文 名	Well-posedness and asymptotic behavior for nonlinear evolution equations in fluid dynamics (流体力学における非線形発展方程式の適切性と漸近挙動)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	瀬片 純市
	副 査	九州大学	教授	福本 康秀
	副 査	九州大学	教授	廣島 文生
	副 査	九州大学	准教授	ブレジナ ヤン (基幹教育院)

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

藤井 幹大氏の学位論文は、準地衡流方程式や異方的 Navier-Stokes 方程式といった、流体力学に現れる種々の非線形偏微分方程式を、適切性(解の存在、一意性、初期値連続依存性)や、解の漸近挙動という観点から考察したものであり、特に、線形部の散逸性が弱い場合や線形部に分散性を伴う場合に、それらの効果が方程式の適切性や解の漸近挙動にどのような影響を与えるか?という観点から考察した。本学位論文で扱った方程式は「2次元準地衡流方程式」、「異方的粘性項をもつ3次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式」、「3次元非圧縮性 Hall 項つき磁気流体方程式」、「3次元圧縮性 Navier-Stokes-Coriolis 方程式」の4つである。

2次元準地衡流方程式の研究は大きく三つに分かれる。第一の研究では消散項を持たず、分散項を持つ場合について考察し、分散係数が大きい場合に長時間解の存在を局所可解性が保証される正則性の枠組みにおいて証明し、さらに分散係数の大きさを無限大とすると対応する線形分散解に漸近することを証明した。第二の研究では優臨界である分数べき Laplacian からなる弱い消散性を持ち分散項も有する場合についてその時間大域解をスケール劣臨界、臨界な Sobolev 空間で構成した。特に、初期値のノルムが大きい場合でも分散係数がそれに応じて大きければ時間大域解が構成できることを示した。第三の研究では分散項がなく優臨界である分数べき Laplacian による消散項をもつ場合について時間周期的外力を与えた場合に時間周期解が一意存在することを証明した。

次に水平方向にのみ粘性を持つ3次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の時刻無限大における挙動を調べた。この方程式は空間鉛直方向の変数に関する粘性がないという意味で通常の Navier-Stokes 方程式より弱い消散性をもつ。藤井氏は速度場の水平成分は2次元の熱核と同様の減衰率をもち、鉛直成分は3次元の熱核と同様の減衰率をもつということを証明した。さらに時刻無限大における解の漸近展開を得た。

Hall 項付き磁気流体方程式は2階の微分をもつ非線形項を保つため、その消散項は通常の Laplacian であるが相対的に消散が弱い準線形の方程式である。まずは、零磁場周りの解を考察しその時間大域的可解性を保証する関数空間のクラスと初期値に対する小ささ条件を改良した。つぎに定磁場周りの摂動問題を考察した。この摂動の方程式では分散性を呈する項が線形部分に現れる。この分散性を制御するために Fourier-Besov 空間や Strichartz 評価を用いて解析を行い、時間大域的適切性を様々な枠組みで証明した。

最後に圧縮性 Navier-Stokes-Coriolis 方程式の回転と音波による分散性に着目し、長時間解をス

ケール臨界である斉次 Besov 空間で構築した。本方程式は固有周波数を与える特性方程式が複雑な 4 次方程式であるため、線形解を Fourier 積分を用いて陽に表示することは得策ではない。そこで非粘性の場合の分散評価と、周波数帯を三段階に分けた時空間ノルムに関するエネルギー法を構築することで困難点を解消し長時間解の存在を証明した。

これらの結果はいずれも、発展方程式の立場から興味深く、また、これらの結果のいくつかは、Journal of Mathematical Fluid Mechanics、Journal of Evolution Equations、Journal of the Mathematical Society of Japan といった高い水準の国際学術誌(査読有)において公表されている (Journal of the Mathematical Society of Japan については掲載決定)。

以上の結果は、偏微分方程式論の分野において価値ある業績と認められる。よって、本研究者は博士(数理学)の学位を受ける資格があるものと認める。