NORTHCOTT NUMBERS FOR WEIGHTED HEIGHTS

岡崎, 勝男

出版情報：Kyushu University, 2022, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：岡﨑 勝男

論 文 名　：NORTHCOTT NUMBERS FOR WEIGHTED HEIGHTS (重み付き高さに対する Northcott 数)

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は Pazuki、Technau, Widmer 3 氏によって導入された有理数体の代数閉包上の高さ函数「重み付き Weil 高さ」の基礎付け、及び更なる発展を目指すものであり：

1. Vidaux, Videla による Northcott 数の分布に関する問いの解決(同志社大学の佐野薫氏との共同研究)；
2. 1 の(Grizzard 氏の意味での)相対化；
3. Talamanca 氏の行列の高さ函数の重み付き版の導入とその基礎付け,

という 3 つのパートから構成される。代数的数の複雑さを測る函数である「(対数的)絶対 Weil 高さ h(・)」は、それが代数体に対してもたらす Northcott 性や Bogomolov 性といった有限性を通じて、整数論に於いて極めて重要な役割を果たす。また、絶対的 Weil 高さを代数的数の次数を乗じる事により補正した「相対 Weil 高さ deg(・)h(・)」もまた、当該分野の様々な文脈で登場する、重要な高さ函数である。先の「重み付き Weil 高さ h_γ(・)」は、乗じる代数的数の次数に更に指数γを付す事により(これを「重み」と呼んでいる)、絶対 Weil 高さ、相対 Weil 高さの 2 つの高さ函数を同時に一般化する、極めて自然な対象である：h_γ(・):=deg(・)^γh(・)。ここで「h_0(・)=h(・)」および「h_1(・)= deg(・)h(・)」の 2 つの関係式が成り立っている事に注意する。さて、h_γに対する先の Northcott 性、Bogomolov 性の定義を確認する。A を代数的数から成る集合、C を正の定数とした時、B(A,γ,C)で「A の元の内、h_γの値が C 未満であるもの全体」を表す事にしよう。A がγ-Northcott 性(以降、γ-(N)と略す)を持つとは、任意の C>0 に対して B(A,γ,C)が有限集合となる事を言う。また、A がγ-Bogomolov 性(以降、γ-(B)と略す)を持つとは、或る C>0 に対して B(A,γ,C)が有限集合となる事を言う。γ-(B)はγ-(N)から直ちに従い、また任意の代数体はγ-(N)を持つ事が判るため(Northcott の定理の帰結)、γ-(N)やγ-(B)の研究は、有理数体の無限次拡大に対する研究が主なものとなる。さて、これ等 2 つの有限性は、我々を以下の定義へと導く：

Nor_γ(A):=inf{γ>0 | B(A,γ,C) は無限集合である}.

これを「A のγに関する Northcott 数」と呼ぶ。γ-(N)やγ-(B)に興味を持つ我々にとって、次の問いは自然なものであると言える：任意の実数γと非負実数 c に対して、Nor_γ(L)=c を満たす有理数体の無限次拡大 L を構成する事は出来るであろうか？これはγ=0 の場合が 2016 年に Vidaux, Videla 両氏により提唱され、その後、前述の Pazuki, Technau, Widmer 3 氏による挑戦にも拘らず、5 年以上未解決であった問題である。本論文の第 1 部(同志社大学の佐野薫氏との共同研究)では、この問いを(γ=1 の場合を除いて)完全に解決している(γ=1 の場合は Lehmer 予想と呼ばれる当該分野の重大な未解決問題を含意するため、今回は断念した)。証明自体は既存の知識の組み合わせではあるが、問題の定式化に際して今後の全ての重み付き高さの研究の基礎となるであろう概念や主

張も提示しているため、当該分野に於いてかなりの価値を持つ結果であると思う。

次に、本論文第 2 部の内容について解説する。Grizzard 氏によって以下の「Bogomolov 性の相対版」が与えられた：体の拡大 L/K が相対 Bogomolov 拡大であるとは、差集合 L\K が Bogomolov 性を持つ事である。ここで、K が Bogomolov 性を持つ時は、L/K が相対 Bogomolov 拡大である事と L が Bogomolov 性を持つ事が同値となるため、相対 Bogomolov 拡大には常に「K は Bogomolov 性を持たない」という仮定を付けるべきである事を補足しておく(K が Bogomolov 性を持つ場合を「自明な相対 Bogomolov 拡大」と便宜的に呼ぶ事にしよう)。本論文では、この定義を重み付き高さに対して拡張した「相対γ-Bogomolov 拡大(以降、γ-(RB)と略す)」を導入した。また、同様に「相対γ-Northcott 拡大(以降、γ-(RN)と略す)」を導入した(γ=0 の場合は自明な例しか得られない事が簡単に証明出来るため、Grizzard 氏の研究では``相対 Northcott 拡大”は導入されていない)。先ず申請者は、γが負の場合は自明なγ-(RB)、γが 0 以下の場合には自明なγ-(RN)しか得られない事を示した。そして、γが 0 以上、正の場合の各々について、第 1 部の主定理の相対化を得た。

最後に、本論文第 3 部の内容について解説する。ここでは、申請者が修士論文で行った行列の高さ函数に関する研究の重み付き高さ版を扱っている。Talamanca 氏によって、代数的数を成分とする正方行列に対して、2 つの高さ函数 h^{op}, h^s が導入された。申請者は修士論文で、体 L の Northcott 性や Bogomolov 性が、L を成分とする行列環の(h^{op}や h^s に関する)Northcott 性や Bogomolov 性へと遺伝するか否かについての研究を行った。Mordell-Weil の定理の証明等からも判る通り、体 L の Weil 高さに関する有限性が、L 上の多様体や代数上の高さ函数に関する有限性へと遺伝するか否かは、重要な問いである。行列については：

1. 体の Bogomolov 性は行列環の h^{op}に関する Bogomolov 性へと遺伝する；
2. 体の Northcott 性は行列環の h^{op}に関する Northcott 性へと遺伝する(これは本質的に Talamanca 氏の仕事である)；
3. 体の Bogomolov 性は行列環の h^s に関する Bogomolov 性へと遺伝するとは限らない；
4. 体が Northcott 性を持てば、行列環は h^s に関する Bogomolov 性を持つ,

という 4 つの事実が得られている事に注意する。第 3 部では、先ず h^{op}, h^s 各々の重み付き版 h^{op}_γ, h^s_γを定義した。そして、以上 4 つの結果の重み付き版の証明、或いは反証を行った。1, 2 は重み付き版でも全く同様の結果が得られた。1 の重み付き版の証明は筆者の修士論文の議論とほぼ同様であるが、2 は非自明な議論を含んでいる。3 は「体が Bogomolov 性を持っていても、任意のγ<1 に対して行列環が h^s_γに関する Bogomolov 性すら持たない例」を構成し、3 のある意味での一般化を与えた。また、第 1 部に於いて「(1 の冪根を有限個しか含まない)体がγ-(B)を持てば、任意のδ>γに対してδ-(N)を持つ」という結果を示しているため、この結果は 4 の重み付き版への反例も与えている事になる。この結果の証明も基本的には筆者の修士論文の議論と同様である。最後に、0 以上 1 未満の任意の実数γに対して「L 成分の行列環が h^s_γに関して Bogomolov 性を持つ様な体 L の例」を構成した。最後の結果の証明は、佐野薫氏によって示された体論的な事実に強く依っている事を補足しておく。