Hardy-Littlewoodの特異級数のRiesz平均における誤差項

Suriajaya, Ade Irma
Faculty of Mathematics, Kyushu University

出版情報：RIMS Kokyuroku. 2196, pp.43-57, 2021-08. Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University
バージョン：

Hardy-Littlewoodの特異級数のRiesz平均における誤差項

(Error estimates for the Riesz mean of Hardy-Littlewood singular series)

九州大学数理学研究院　アデイルマスリアジャヤ / チャチャ

Ade Irma Suriajaya / Chacha
Faculty of Mathematics, Kyushu University

序文

本研究は，Daniel A. Goldston 氏 (San José State University / サンノゼ州立大学) との共同研究であり，部分的に科研費 (課題番号：18K13400) の助成を受けたものである．

要旨

Hardy と Littlewood は，6 以上かつ n 以下の偶数を二つの奇素数の和により書き表す表現の個数が $n/((\log n)^2)$ とある特殊な級数の積に漸近すると予想した．その特殊な級数は Hardy と Littlewood の特異級数（Hardy-Littlewood singular series）と通称され，その挙動も調べられてきた．特に，実数 x 以下を走る正整数 k に対し，$x-k$ という重みをつけた Hardy と Littlewood の特異級数の「Cesàro 和」と名付けられる平均の漸近公式は注目される．その漸近公式における誤差項の上から評価がたくさん調べられてきたが，得られた上から評価は誤差項の実際の大きさを大きく上回ると考えられている．そこで，整数 $m \geq 2$ に対して，より滑らかな重み $(x-k)^m$ を考察することにより，誤差項の漸近公式が示せ，条件的に精密な評価が得られる．この重みを付けた平均は「Riesz 和」と呼ばれている．特に，評価が精密であることを示すために，誤差項の下から評価は上から評価と同じオーダーであることを示した．一方，講演者らは得られた誤差項の下から評価が $m=1$ に対しても成り立つことに気づき，Hardy と Littlewood の特異級数の Cesàro 平均の下から評価も得られ，従来知られた評価が精密でないことを明らかにした．

この報告書では，以上述べた研究背景からはじめ，Hardy と Littlewood の特異級数の Riesz 平均の漸近公式における誤差項の明示公式及びそれに基づいて得られた精密な評価を簡約に解説する．詳しい内容については本論文 [GS21, GS20] を参照するとよい．

2010 *Mathematics Subject Classification*: 11N05, 11M26.
キーワード: ゴールドバッハ問題，素数，特異級数，リーマンゼータ関数

1 ゴールドバッハ問題及びゴールドバッハ表現の特異級数

1922年に G. H. Hardy と J. E. Littlewood [HL22] は

$$4 = 2 + 2, \qquad 10 = 3 + 7 = 5 + 5, \qquad 30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$$

のように，正の整数をいくつかの素数の和として書き表す方法を考察した．特に，上記の例のように正の整数を二つの素数の和として書き表せることは 278 年前にゴールドバッハが提案した問題である．偶素数は 2 しかないため，2 を除いた素数を考えれば，それら二つの和が常に偶数となり，このような二つの奇素数の組み合わせが，2 と 4 を除いた正の偶数全体を成すと予想されている．言い換えれば，4 より大きい偶数が必ず二つの奇素数の和として書き表せるという予想である．この予想は「ゴールドバッハ予想」と通称され，278 年も渡り証明されていない．

Hardy と Littlewood [HL22] はゴールドバッハ予想をより一般に，正の整数をいくつかの素数の和としての書き表し方の個数を調べ，3 つの素数の和及び 4 つの素数の和の場合に対して，条件付きで漸近公式を示した．その考察に基づき，十分大きな偶数が全て二つの奇素数の和で書けると予想し，その和として表示する方法の個数の漸近公式も予想した．これが 6 以上の全ての偶数に対して成り立つことは，ゴールドバッハ予想の主張であることに注意せよ．以降，上記の後者で述べたような，「ゴールドバッハ表現」と呼ばれる，正の偶数を二つの奇素数の和で書き表す表現の個数に注目する．

補足. ゴールドバッハ予想が成り立てば，6 以上の偶数は二つの奇素数の和として書けるため，それぞれに 3 を足しておけば，9 以上の奇数が三つの奇素数の和として書き表せることが従う．後者は近年解決された「弱いゴールドバッハ予想」と呼ばれたものである．また，ゴールドバッハ予想が成り立つことにより，6 以上の整数が必ず三つの素数の和として書き表せる．このことが次のように容易に確かめられる：$6 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$ であるため，6 を三つの素数の和としても書き表すことができ，ゴールドバッハ予想が成立すれば，8 以上の偶数を二つの奇素数の和で必ず書けるため，$8 = 3 + 5$ により，偶数 $a \geq 8$ に対して，奇素数 p_1, p_2 に対して，$a = p_1 + p_2$ として表したとき，p_1 と p_2 のいずれが 5 以上であることがわかる．

$$5 = 2 + 3, \qquad 7 = 2 + 5$$

であることに注意すれば，ゴールドバッハ予想が成り立てば，8 以上の偶数が必ず三つの奇素数の和で書き表せる．

全段落で述べたように，偶素数は 2 しかないため，2 以外の素数を任意に二つ取り，足し合わせたものが常に偶数である．実際，二つの素数の和で書き表せない奇数がたくさんある．従って，正整数をいくつかの素数の和で書き表す表現として，全ての正整数が素数の和で分解できるための素数の個数は三つ以上である．これの成否を問うのはゴールドバッハ問題である．

※　以降，文字 $p, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ が全て素数を表す．

$N_2(n)$ を偶数 n を二つの奇素数の和として書き表す方法の数とする． Hardy と Littlewood [HL22, Conjecture A] は $N_2(n)$ に対して，

$$N_2(n) \sim 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|n\\p>2}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\frac{n}{(\log n)^2} \tag{1.1}$$

が成り立つと予想した．ここで，$f(x) \sim g(x)$ が

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

を意味する． (1.1) の右辺における素数の積はこの報告書で注目したい Hardy と Littlewood の singular series（特異級数）である．実際，メビウス関数

$$\mu(n) = \begin{cases}(-1)^k, & n = p_1p_2\dots p_k\ (p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_k),\\ 0, & \exists p \text{ s.t. } p^2|n,\end{cases}$$

オイラーの φ-関数

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{1\le k\le n\\ k\text{と}n\text{は互いに素}}} 1 = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

及びラマヌジャン和

$$c_q(n) := \sum_{\substack{1\le a\le q\\ a\text{と}q\text{は互いに素}}} e^{\frac{2\pi i a n}{q}}$$

に対して，

$$\mathfrak{S}(k) := \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}c_q(-k) \tag{1.2}$$

と書くと，$\mathfrak{S}(k)$ を

$$\mathfrak{S}(k) = \begin{cases}2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|k\\p>2}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right), & k>0 \text{ は偶数},\\ 0, & k>0 \text{ は奇数}\end{cases} \tag{1.3}$$

に書き換えることができる．よって，(1.1) が

$$N_2(n) \sim \mathfrak{S}(n)\frac{n}{(\log n)^2}$$

と書き換えられる．即ち，偶数 n を二つの奇素数の和として書き表す方法の個数は

$$\mathfrak{S}(n)\frac{n}{(\log n)^2}$$

に漸近する．

ゴールドバッハ問題から出発し，偶数 k を二つの素数 $p_1 \leq p_2$ の和 $k = p_1 + p_2$ で書けたとすると，$p_2 - p_1 = k$ となり，差が k である素数の組み (p_1, p_2) は無限にあるかどうかの問題も考察できる．$k = 2$ の場合は有名な「双子素数の予想」である．Hardy と Littlewood は同じ論文 [HL22] で，差が偶数である素数の組みが無限個あると予想し，具体的には，偶数 $k > 0$ に対して，$P_k(n)$ を $p, p+k < n$ を満たす素数の組み $(p, p+k)$ の個数とすると，

$$P_k(n) \sim \mathfrak{S}(k)\frac{n}{(\log n)^2}$$

と予想した [HL22, Conjecture B].

次の節以降，漸近公式の誤差項を主な対象とし，関数のオーダー評価，即ち，無限大に発散する速さを表すような関数の比較に使われる記号を紹介する．関数 $f(x)$ と非負関数 $g(x)$ に対して，

$$f(x) = O(g(x))$$

は，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$f(x) \leq Cg(x)$$

が $x \to \infty$ のときに成り立つことを意味し，それをより簡約に

$$f(x) \ll g(x)$$

とも書く.

2　ゴールドバッハ表現の特異級数 $\mathfrak{S}(k)$ の平均

前節で紹介した特異級数 $\mathfrak{S}(k)$ に対して，級数表示 (1.2) を用いて，最初の二つの項を展開すると，

$$\mathfrak{S}(k) = 1 + e^{-\pi ik} + \sum_{q=3}^{\infty}\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2}c_q(-k)$$

により，k が奇数であるとき，$\mathfrak{S}(k)$ は平均的に 0 の値を取り，k が偶数であるときは，$\mathfrak{S}(k)$ は平均的に 2 の値を取ることがわかる．J. B. Friedlander と D. A. Goldston [FG95] が $\mathfrak{S}(k)$ の平均を調べ，

$$\sum_{k\leq x}\mathfrak{S}(k) = x - \frac{1}{2}\log x + O\left((\log x)^{\frac{2}{3}}\right)$$

を示した．また，重み付きで $\mathfrak{S}(k)$ の Cesàro 平均と通称される $\sum_{k\leq x}(x-k)\mathfrak{S}(k)$ も研究され，

$$S_1(x) := \sum_{k\leq x}(x-k)\mathfrak{S}(k) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\log x + \frac{1}{2}(1 - c_E - \log 2\pi)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \tag{2.1}$$

が示された（[FG95, Proposition 2] または [MS02] を参照）．ここで，c_E はオイラー定数である． R. C. Vaughan [Vau01] が (2.1) における誤差項を，適当な定数 $c > 0$ に対して，

$$\ll x^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c\frac{(\log 2x)^{\frac{3}{5}}}{(\log\log 3x)^{\frac{1}{5}}}\right)$$

に改良し，リーマン予想が成り立つことを仮定すれば，誤差項が

$$\ll x^{\frac{5}{12}+\varepsilon}, \qquad \forall\varepsilon > 0$$

まで改良できることも証明した． (2.1) における誤差項は $x^{1/2}$ のオーダーより少ししか改良できていないが，講演者と Goldston [GS20] は $S_1(x)$ の誤差項が

$$\Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{4}})$$

であることを示した．即ち，

$$E_1(x) := S_1(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\log x + \frac{1}{2}(1 - c_E - \log 2\pi)x\right) \tag{2.2}$$

とおくと，

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{E_1(x)}{x^{\frac{1}{4}}} > 0 \qquad \text{及び} \qquad \liminf_{x\to\infty}\frac{E_1(x)}{x^{\frac{1}{4}}} < 0$$

が成り立つ．これは誤差項 $E_1(x)$ の実際のオーダー，即ち，

$$E_1(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) \qquad \text{かつ} \qquad E_1(x) = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{4}}) \tag{2.3}$$

が両方成り立つと予想され，従来知られている Vaughan [Vau01] による評価

$$E_1(x) \ll x^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c\frac{(\log 2x)^{\frac{3}{5}}}{(\log\log 3x)^{\frac{1}{5}}}\right) \qquad \text{や，条件付き評価} \qquad E_1(x) \ll x^{\frac{5}{12}+\varepsilon}$$

は遥かに大きいものである．

$S_1(x)$ より滑らかな重みを付けた平均を考えれば，誤差項がかなり改善できると期待し，講演者と Goldston [GS21] は $m \geq 1$ と $x \geq 2$ に対して，$\mathfrak{S}(k)$ の Riesz 平均

$$S_m(x) := \sum_{k\leq x}(x-k)^m\,\mathfrak{S}(k)$$

を考察してみた．以降，m を固定して，$S_m(x)$ を考える．

3 ゴールドバッハ表現の特異級数 $\mathfrak{S}(k)$ の Riesz 和 $S_m(x)$

$\mathfrak{S}(k)$ に付随するディリクレ級数

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{S}(k)}{k^s}$$

を考える．これが $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対してしか収束しないが，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ を用いて，$F(s)$ が

$$F(s) = \frac{4}{2^{s+1}+1}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)}\prod_{p>2}\left(1+\frac{2}{(p-2)(p^{s+1}+1)}\right)$$

という表示で $\mathrm{Re}(s) > -1$ に解析接続できる [GS20, 第 2 節]．実際，最も右側にある素数からなる和の零点の集積点により $\mathrm{Re}(s) = -1$ が $F(s)$ の自然境界となる [Vau01, 543ページ]．関数

$$\mathcal{G}(s) := \prod_{p>2}\left(1+\frac{2}{(p-2)(p^{s+1}+1)}\right)$$

と定数

$$C_2 := \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

を用いれば，

$$F(s) = \left(\frac{4C_2}{2^{s+1}+1}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)}\mathcal{G}(s)$$

と書ける．ここで，定数 C_2 は $\mathfrak{S}(k)$ の積表示 (1.3) にも現れた定数であることに注意せよ．また，$C_2 = 0.66016\ldots$ であり，正の定数であることも補足しておく．

次に，$S_m(x)$ の積分表示を示すために次の補題を用いる．

補題 1. ([Ing32, Theorem B] を参照) 正整数 m と定数 $c > 0$ に対して，$x > 0$ のとき，

$$\frac{m!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+m}}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}\,ds = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1, \\ (x-1)^m, & x \ge 1 \end{cases}$$

が成り立つ．

以上の補題を用いれば

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{m!}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{F(s)x^{s+m}}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}\,ds \\ &= \frac{m!}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{4C_2\zeta(s)\zeta(s+1)\mathcal{G}(s)x^{s+m}}{(2^{s+1}+1)\zeta(2s+2)s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}\,ds \\ &=: \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\mathcal{F}(s)\,ds \end{aligned} \tag{3.1}$$

が直ちに得られる．そこで，

$$\mathcal{F}(2+it) \ll \frac{x^{2+m}}{(|t|+3)^{m+1}}$$

が容易に確かめられ，$m \ge 2$ と $T \ge x^2$ に対して，(3.1) の積分範囲を T で切ることができ，

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\mathcal{F}(s)\,ds + O(1) \tag{3.2}$$

となる．

続いて，$F(s)$ の定義できる範囲 $\mathrm{Re}(s) > -1$ を考慮し，(3.2) の積分経路を左半平面に移行する．そこで，$\zeta(s)$ 及び $1/\zeta(s)$ の上から評価が必要である．その議論の概略を述べる．まず，$\zeta(s)$ の上から評価として，よく知られている

$$\text{(3.3)} \qquad \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して，} \qquad \zeta(\sigma + it) - \frac{1}{\sigma - 1 + it} \ll_\epsilon |t|^{\mu(\sigma)+\epsilon},$$

$$\mu(\sigma) \leq \begin{cases} 0, & \sigma > 1, \\ (1-\sigma)/2, & 0 \leq \sigma \leq 1, \\ 1/2 - \sigma, & \sigma < 0 \end{cases}$$

（[Tit86, §5.1] やリーマンゼータ関数に関する任意の教科書を参照）を用いればよい． $1/\zeta(s)$ の評価に対して，$\zeta(s)$ の非零領域 [Tit86, Theorem 3.8] と関数等式を用いた標準的な評価 [Tit86, 式 (3.11.8)] 及び [MV07, Corollary 10.5] により，その非零領域内の範囲で

$$\frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \ll (|t| + 3)^{\epsilon + \sigma - \frac{1}{2}}$$

と抑えられる．$\mathrm{Re}(s) > -1$ までの残りの範囲では，K. Ramachandra and A. Sankaranarayanan [RS91, Theorem 2] を用いれば，十分に大きい $T > 0$ と定数 $C > 0$ に対して，

$$\min_{T \leq t \leq T + T^{1/3}} \max_{\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2} \frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \exp(C(\log\log T)^2)$$

が成り立つ．従って，$T \leq T^* \leq 2T$ を満たす適切な T^* と $-1 \leq \sigma \leq 2$ に対して，

$$\text{(3.4)} \qquad \frac{1}{\zeta(2(\sigma \pm iT^*) + 2)} \ll (T^*)^\epsilon$$

とできる．

※　以降，$\rho = \beta + i\gamma$ が $\zeta(s)$ の非自明な零点（$\mathrm{Im}(s) \neq 0$ における零点）を表す．β はその実部，γ はその虚部を表す．

(3.2) の被積分関数 $\mathcal{F}(s)$ の特異点 $s = 1$, $s = 0$ と $s = \rho/2 - 1$ における留数を以下でまとめる [GS21, Lemma 2.2]．

1. $\displaystyle \operatorname*{Res}_{s=1} \mathcal{F}(s) = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$
2. m-番目の調和数 $H_m := \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m}$ とオイラー定数 c_E に対して，
$$\operatorname*{Res}_{s=0} \mathcal{F}(s) = -\frac{x^m}{2}\left(\log x - H_m + c_E + \log 2\pi\right).$$
3. $\zeta(s)$ の非自明な零点 ρ の重複度を m_ρ と書くと，$m_\rho = 1$ のとき，
$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{\rho}{2}-1} \mathcal{F}(s) = \frac{2C_2 m! \zeta(\frac{\rho}{2} - 1)\zeta(\frac{\rho}{2})\mathcal{G}(\frac{\rho}{2} - 1)}{(2^{\frac{\rho}{2}} + 1)\zeta'(\rho)(\frac{\rho}{2} - 1)(\frac{\rho}{2})(\frac{\rho}{2} + 1)\cdots(\frac{\rho}{2} + m - 1)} x^{\frac{\rho}{2}+m-1}$$

となり，一般に，$m_\rho = \ell$ であるとき，ρ と m のみに依存する定数 $A_j(\rho, m)$ が存在して，

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{\rho}{2}-1} \mathcal{F}(s) = x^{\frac{\rho}{2}+m-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j(\rho, m)(\log x)^j \tag{3.5}$$

と書ける．

これでようやく，(3.2) の積分経路を左半平面に移行する準備ができた． (3.4) で定めた T^* に対して，$1/\zeta(2s+2)$ の $s = \rho/2 - 1$ かつ $|\gamma|/2 \leq T^*$ における極を全て積分領域内に含まれるように，(3.2) の積分路を $\mathrm{Re}(s) = b$ に移す．具体的には，$|\gamma|/2 \leq T^*$ を満たす $\zeta(s)$ の全ての零点 ρ が $\beta/2 > a/\log T^*$ を満たすように $a > 0$ を定め，$b = -1 + \frac{a}{\log T}$ と書いたとき，$2 \pm iT^*$ と $b \pm iT^*$ を頂点とする四角い領域を考える．留数定理により，

(3.6)

$$\begin{aligned}
S_m(x) &= \operatorname*{Res}_{s=1} \mathcal{F}(s) + \operatorname*{Res}_{s=0} \mathcal{F}(s) \\
&\qquad + \sum_{|\gamma| \leq 2T^*} \operatorname*{Res}_{s=\rho/2-1} \mathcal{F}(s) + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT^*}^{b-iT^*} + \int_{b-iT^*}^{b+iT^*} + \int_{b+iT^*}^{2+iT^*}\right) \mathcal{F}(s)\, ds + O(1) \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} + -\frac{x^m}{2}(\log x - H_m + c_E + \log 2\pi) \\
&\qquad + \sum_{|\gamma| \leq 2T^*} \operatorname*{Res}_{s=\rho/2-1} \mathcal{F}(s) + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT^*}^{b-iT^*} + \int_{b-iT^*}^{b+iT^*} + \int_{b+iT^*}^{2+iT^*}\right) \mathcal{F}(s)\, ds + O(1).
\end{aligned}$$

上式の右辺の最初二つの項を $S_m(x)$ の主要項とし，残りの部分は本題の誤差項である．まとめると，m-番目の調和数 H_m とオイラー定数 c_E に対して，

$$S_m(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^m}{2}(\log x - H_m + c_E + \log 2\pi) + E_m(x) \tag{3.7}$$

と書き，[GS21] で示した誤差項 $E_m(x)$ の評価を紹介する．

補足. (3.7) で定義した $E_m(x)$ は $m = 1$ のとき，(2.2) で定義した $E_1(x)$ に一致する．

4　$\mathfrak{S}(k)$ の Riesz 平均における誤差項 $E_m(x)$

(3.6) と (3.7) により，

$$E_m(x) = \sum_{|\gamma| \leq 2T^*} \operatorname*{Res}_{s=\rho/2-1} \mathcal{F}(s) + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT^*}^{b-iT^*} + \int_{b-iT^*}^{b+iT^*} + \int_{b+iT^*}^{2+iT^*}\right) \mathcal{F}(s)\, ds + O(1) \tag{4.1}$$

と書けるが，積分が小さいことを示す．

$$\mathcal{F}(s) = \frac{4C_2\zeta(s)\zeta(s+1)\mathcal{G}(s)x^{s+m}}{(2^{s+1}+1)\zeta(2s+2)s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}, \quad \mathcal{G}(s) = \prod_{p>2}\left(1 + \frac{2}{(p-2)(p^{s+1}+1)}\right)$$

であることを思い出そう．分子に出てくるゼータ関数に対して，(3.3) を用いればよく，分母にあるゼータ関数に関しては，前節により，$s = \sigma \pm iT^*$ かつ $-1 \leq \sigma \leq 2$ に対して，

$$\frac{1}{\zeta(2s+2)} \ll (T^*)^{\epsilon}$$

が成り立ち，$s = b + it$, $|t| \leq T^*$ に対して，

$$\frac{1}{\zeta(2s+2)} \ll (|t|+3)^{2b+\frac{3}{2}+\epsilon}$$

成り立つ．また，任意の $\epsilon > 0$ と T に対して，$b \leq \sigma \leq 2$ かつ $|t| \ll T$ の範囲で，

$$\mathcal{G}(s) \ll T^{\epsilon}$$

である [GS21, Lemma 3.1]．$T \geq x^5$ とし，これらの評価を用いて，$a(\rho, m)$ を ρ が $\zeta(s)$ の一位の零点であるとき，

$$a(\rho, m) := \frac{2C_2 m! \zeta(\frac{\rho}{2}-1)\zeta(\frac{\rho}{2})\mathcal{G}(\frac{\rho}{2}-1)}{(2^{\frac{\rho}{2}}+1)\zeta'(\rho)(\frac{\rho}{2}-1)(\frac{\rho}{2})(\frac{\rho}{2}+1)\cdots(\frac{\rho}{2}+m-1)}$$

とおき，ρ が $\zeta(s)$ の $m_\rho = \ell$ 位の零点であるとき，(3.5) で定まった $A_j(\rho, m)$ に対して，

$$a(\rho, m) = \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j(\rho, m)(\log x)^j$$

とおくと，次の結果を得る．

定理 1. ([GS21, Theorem 1]) $m \geq 2$，任意の $\epsilon > 0$ と十分大きな x に対して，

$$E_m(x) = x^{m-1} \sum_{|\gamma| \leq U} a(\rho, m) x^{\frac{\rho}{2}} + O(x^{m-1+\epsilon}) \tag{4.2}$$

かつ $x^5 \leq U \leq 2x^5$ を満たす U が存在する．

定理 1 で得られた $E_m(x)$ の漸近公式は $m \geq 2$ の場合に限って成り立つ．実際，$m = 1$ のとき，以上の議論で述べたように $\mathcal{F}(s)$ が十分に小さくならず，(4.1) における積分が $\zeta(s)$ の非自明な零点 ρ を渡る和の $x^{\frac{\rho}{2}+m-1}$ オーダーによって抑えられない．

$\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ が全て $\beta = \frac{1}{2}$ を満たす（リーマン予想）と仮定すれば，$\mathcal{F}(s)$ の $s = \rho/2 - 1$ における特異点は全て直線 $\mathrm{Re} = -\frac{3}{4}$ 上にあり，それを避けるように前節で取った $b > -1$ の代わりに b_1 を $-\frac{3}{4} < b_1 < -\frac{1}{2}$ となるように取れば，(3.2) 及び留数定理により，

$$\begin{aligned}
S_m(x) &= \operatorname*{Res}_{s=1} \mathcal{F}(s) + \operatorname*{Res}_{s=0} \mathcal{F}(s) + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT^*}^{b_1-iT^*} + \int_{b_1-iT^*}^{b_1+iT^*} + \int_{b_1+iT^*}^{2+iT^*}\right)\mathcal{F}(s)\,ds + O(1) \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} + -\frac{x^m}{2}(\log x - H_m + c_E + \log 2\pi) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT^*}^{b_1-iT^*} + \int_{b_1-iT^*}^{b_1+iT^*} + \int_{b_1+iT^*}^{2+iT^*}\right)\mathcal{F}(s)\,ds + O(1)
\end{aligned}$$

となり，(3.7) により，

$$E_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT^*}^{b_1-iT^*} + \int_{b_1-iT^*}^{b_1+iT^*} + \int_{b_1+iT^*}^{2+iT^*}\right)\mathcal{F}(s)\,ds + O(1)$$

となる．前節で用いた評価をそのまま使い，同様に，$T \geq x^5$ かつ $m \geq 2$ であるとき

$$\left(\int_{2-iT^*}^{b_1-iT^*} + \int_{b_1+iT^*}^{2+iT^*}\right)\mathcal{F}(s)\,ds \ll 1$$

となり，左端 $\sigma = b_1 + it$, $|t| \leq T^*$ 上で

$$\mathcal{F}(b_1 + it) \ll (|t|+3)^{-2b_1-m-1}T^{\epsilon}x^{m+b_1}$$

となるが，$T = x^5$ とすれば，左端上の積分は

$$\int_{b_1-iT^*}^{b_1+iT^*}\mathcal{F}(s)\,ds \ll x^{m+b_1+\epsilon}$$

に抑えられる． b_1 が限りなく $-\frac{3}{4}$ に近く取れるので，次の定理が得られる．

定理 2. ([GS21, Theorem 2]) リーマン予想が成り立つ，即ち，$\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ が全て $\beta = \frac{1}{2}$ を満たすと仮定する． $m \geq 2$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$E_m(x) \ll x^{m-\frac{3}{4}+\varepsilon}$$

が成立する．

定理 2 の評価における $\varepsilon > 0$ を落とすことは全く容易ではなく，実際，定理 1 と照らし合わせれば，リーマン予想の仮定により，

$$E_m(x) \ll x^{m-\frac{3}{4}}\sum_{|\gamma|\leq U}|a(\rho,m)| + O(x^{m-1+\epsilon}), \qquad x^5 \leq \exists U \leq 2x^5$$

が成り立つが，$\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ を渡る和 $\sum_\gamma |a(\rho,m)|$ の評価が $E_m(x)$ の精密な評価を決める．そこで，$\sum_\gamma a(\rho,m)$ が絶対収束すれば，

$$E_m(x) \ll x^{m-\frac{3}{4}}\sum_{\gamma}|a(\rho,m)| \ll x^{m-\frac{3}{4}} \tag{4.3}$$

が直ちに導ける．

1989 年に S. M. Gonek [Gon89] と D. Hejhal [Hej89] が独立に，$\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ が全て一位である仮定の下で，

$$\sum_{0<\gamma\leq T}\frac{1}{|\zeta'(\rho)|^2} \ll T \tag{4.4}$$

を予想した．この予想が成立すれば，(4.2) における和 $\sum_\gamma a(\rho,m)$ が絶対収束し [GS21, 第 5 節]，(4.3) の観察により，次のことがわかる．

定理 3. ([GS21, Theorem 3]) $\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho=\beta+i\gamma$ が全て $\beta=\frac{1}{2}$ を満たす（リーマン予想），かつ，一位であるとする．それに加えて，Gonek-Hejhal 予想 (4.4) が成立すると仮定すれば，

$$\sum_{\gamma} a(\rho,m)=\sum_{\gamma}\frac{2C_2 m!\zeta(\frac{\rho}{2}-1)\zeta(\frac{\rho}{2})\mathcal{G}(\frac{\rho}{2}-1)}{(2^{\frac{\rho}{2}}+1)\zeta'(\rho)(\frac{\rho}{2}-1)(\frac{\rho}{2})(\frac{\rho}{2}+1)\cdots(\frac{\rho}{2}+m-1)}$$

が絶対収束し，$c_m:=\sum_{\gamma}|a(\rho,m)|$ とおくと，$m\geq 2$ に対して，

$$|E_m(x)|\leq(1+o(1))c_m x^{m-\frac{3}{4}}\ll x^{m-\frac{3}{4}} \tag{4.5}$$

が成り立つ．

補足. 定理 3 の条件を少し弱めても，$m\geq 3$ とすれば，(4.5) が成り立つようにできる．詳細は本論文 [GS21, Theorem 3] を参照．

定理 3 もやはり $m\geq 2$ に対してしか成り立たないが，これが $m=1$ に対して成り立てば，我々が期待している (2.3) の評価に一致する．残念ながら，以上の議論でわかるように $m\geq 2$ という条件を落とすことができない．実際，厳密な確認が必要であるが，m を整数だけではなく，実数として考えれば，$m>\frac{3}{2}$ であれば定理 1–3 が成り立つようにできるだろう．しかし，それにしても，肝心な $m=1$ に対しては，

$$E_m(x)\ll x^{m-\frac{3}{4}} \tag{4.6}$$

の評価を得るために強力な新しい手法が必要であろう．次の節で，この評価 (4.6) は $m\geq 2$ に対して実際に精密であることを示す．

5　$E_m(x)$ の下から評価

定理 4. ([GS21, Theorem 4]) $m\geq 1$ に対して，

$$E_m(x)=\Omega_{\pm}(x^{m-\frac{3}{4}}),$$

即ち，

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}}>0 \qquad \text{と} \qquad \liminf_{x\to\infty}\frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}}<0$$

が成り立つ．

定理 4 は無条件であり，$m\geq 1$ に対して成り立つことに注意せよ．これより，定理 3 の評価（$m\geq 2$）が精密であることがわかる．

定理 4 を示すには，次の A. E. Ingham [Ing42] 及び R. J. Anderson と H. M. Stark [AS80] による補題を用いる．

補題 2. ([AS80] または [BD04, Theorem 11.12] を参照)
$A(x)$ を $1 \le x \le X$ において有界なリーマンか積分関数とし，

$$\widehat{A}(s) := \int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

は $\mathrm{Re}(s) > \sigma_1$ において収束し，$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ まで解析接続できるとする．$0 < \check{\gamma}_1 < \check{\gamma}_2 < \check{\gamma}_3 < \ldots$ を満たす実数列 $\{\check{\gamma}_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，$\check{\gamma}_0 = 0$, $\check{\gamma}_{-n} = -\check{\gamma}_n$ とおく．また，それぞれに対応する複素数の数列 $r_0 \in \mathbb{R}$, $r_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $r_{-n} = \overline{r}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して，

$$S_T(x) = x^{\sigma_0} \sum_{|\check{\gamma}_n| \le T} r_n x^{i\check{\gamma}_n}, \qquad \widehat{S}_T(s) = \sum_{|\check{\gamma}_n| \le T} \frac{r_n}{s - (\sigma_0 + i\check{\gamma}_n)}$$

とおく．$\widehat{A}(s) - \widehat{S}_T(s)$ はある $T > 0$ に対して，$\mathrm{Re}(s) \ge \sigma_0$, $-T \le \mathrm{Im}(s) \le T$ へ解析接続できるとすると，

$$S_T^*(x) := \sum_{|\check{\gamma}_n| \le T} \left(1 - \frac{|\check{\gamma}_n|}{T}\right) r_n x^{i\check{\gamma}_n} = r_0 + 2\,\mathrm{Re} \sum_{0 < \check{\gamma}_n \le T} \left(1 - \frac{\check{\gamma}_n}{T}\right) r_n x^{i\check{\gamma}_n}$$

とおけば，任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{\sigma_0}} \le S_T^*(x_0) \le \limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{\sigma_0}}$$

が成り立つ．

補足. この補題は E. Landau が 1905 年に証明したディリクレ級数の解析接続と実特異点の関係を表す補題 [MV07, Lemma 15.1] の一般化である．

補題 2 を $E_m(x)$ に適用する．まず，$E_m(x)$ のメリン変換を求める．

$$\int_1^\infty \frac{S_m(x)}{x^{s+m+1}}\, dx = \sum_{k=1}^\infty \mathfrak{S}(k) \int_k^\infty \frac{(x-k)^m}{x^{s+m+1}}\, dx = \frac{m!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)} F(s)$$

に (3.7) を代入すれば，

$$\int_1^\infty \frac{E_m(x)}{x^{s+m+1}}\, dx = \frac{m!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)} F(s) - \frac{\frac{1}{m+1}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2} - \frac{\frac{1}{2}(H_m - \gamma - \log 2\pi)}{s}$$

が得られる．ここで，$\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n$ を $\zeta(s)$ の非自明な零点として，補題 2 を

$$A(x) = \frac{E_m(x)}{x^m}, \quad \sigma_0 = -\frac{3}{4}, \quad \check{\gamma}_n = \frac{\gamma_n}{2}, \quad r_0 = 0, \quad r_n = a(\rho_n, m)$$

に対して適用すれば，

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} \le 2\ \mathrm{Re} \sum_{0 < \gamma_n \le 2T} \left(1 - \frac{\gamma_n}{2T}\right) a(\rho_n, m)(x_0)^{i\frac{\gamma_n}{2}} \le \limsup_{x \to \infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}}$$

が得られる．

$\zeta(s)$ の上半平面における実軸に最も近い非自明な零点 $\rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ ($\gamma_1 = 14.134725\ldots$) を用いて，$T = 10$ とおけば，

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} \leq 2\left(1 - \frac{\gamma_1}{20}\right) \mathrm{Re}\left(a(\rho_1, m)(x_0)^{i\frac{\gamma_1}{2}}\right) \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}}$$

が得られる．そこで，

$$a(\rho_1, m)(x_0)^{i\frac{\gamma_1}{2}} = \pm|a(\rho_1, m)| \neq 0$$

となるような x_0 が取れるため，

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} > 0 \qquad \text{と} \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} < 0$$

となり，定理 4 が示せた．

最後に，$\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ の虚部 γ が $\mathbb{Z}$ 上一次独立であるならば，クロネッカーの定理により定理 4 の証明における x_0 をより自由に選ぶことができ，

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}}$$

の下限及び

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}}$$

の上限がより精密にわかる．具体的な結果は次の定理のようにまとめられる．

定理 5. ([GS21, Theorem 5]) $\zeta(s)$ の任意の有限個の相異なる零点の虚部の組みが $\mathbb{Z}$ 上一次独立であるとする．

1. $\sum_\gamma |a(\rho, m)|$ が発散すれば，

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} = \infty \qquad \text{かつ} \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} = -\infty$$

   が成り立つ．

2. $m \geq 2$, $c_m = \sum_\gamma |a(\rho, m)|$ が収束すれば、

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} \geq c_m \qquad \text{かつ} \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} \leq -c_m$$

   が成り立つ．

$m \geq 2$ のときは，$\zeta(s)$ の非自明な零点 ρ を渡る和 $\sum_\gamma |a(\rho, m)|$ が収束すると限らないため，定理 5 の条件の下では，定理 5 の 1 か 2 のいずれかが成り立つのである．一方，$m = 1$ であるとき，$\zeta(s)$ の非自明な零点 ρ を渡る和

$$\sum_\gamma |a(\rho, m)| = \sum_\gamma |a(\rho, 1)| = \sum_\gamma \left| \frac{2C_2\zeta(\frac{\rho}{2} - 1)\zeta(\frac{\rho}{2})\mathcal{G}(\frac{\rho}{2} - 1)}{(2^{\frac{\rho}{2}} + 1)\zeta'(\rho)(\frac{\rho}{2} - 1)\frac{\rho}{2}} \right|$$

が発散するため，定理 5 により次のことが言える．

系. ([GS21, Theorem 5]) $\zeta(s)$ の任意の有限個の相異なる零点の虚部の組みが $\mathbb{Z}$ 上一次独立であるとすると，

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_1(x)}{x^{\frac{1}{4}}} = \infty \qquad \text{かつ} \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{\frac{1}{4}}} = -\infty$$

が成り立つ．

この結果は，講演者と Goldston [GS20] が証明した

$$E_1(x) = \Omega_\pm(x^{\frac{1}{4}})$$

の条件付き改良となる．

$m \geq 2$ の場合に戻り，定理 3 と定理 5 の結果を合わせれば，条件付きで

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} \qquad \text{と} \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}}$$

の値が特定できる． $\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ が全て $\beta = \frac{1}{2}$ を満たす（リーマン予想），かつ，一位であるとし，更に，任意の有限個の相異なる γ の組みが $\mathbb{Z}$ 上一次独立であるとする． Gonek-Hejhal 予想 (4.4) が成立すれば， $c_m := \sum_\gamma |a(\rho, m)|$ が収束し，定理 3 により，

$$|E_m(x)| \leq (1 + o(1))c_m x^{m-\frac{3}{4}}$$

であり，定理 5 により，

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} \geq c_m \qquad \text{と} \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} \leq -c_m$$

が成り立つため，

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} = c_m \qquad \text{と} \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{E_m(x)}{x^{m-\frac{3}{4}}} = -c_m$$

となることがわかる．

参考文献

[AS80] R. J. Anderson and H. M. Stark, *Oscillation theorems*, Analytic number theory (Philadelphia, Pa., 1980), 79–106, Lecture Notes in Math. **899**, Springer, Berlin-New York, 1981.

[BD04] P. T. Bateman and H. G. Diamond, *Analytic Number Theory, An Introductory Course*, World Scientific, Singapore, 2004.

[FG95] J. B. Friedlander and D. A. Goldston, *Some Singular Series Averages and the distribution of Goldbach numbers in short intervals*, Illinois J. Math. **39** (1995), no. 1, 158–180.

[GS21] D. A. Goldston and A. I. Suriajaya, *A singular series average and the zeros of the Riemann zeta-function*, to appear in Acta Arith., preprint arXiv:2007.16099.

[GS20] D. A. Goldston and A. I. Suriajaya, *The error term in the Cesàro mean of the prime pair singular series*, arXiv:2007.14616 (submitted).

[Gon89] S. M. Gonek, *On negative moments of the Riemann zeta-function*, Mathematika **36** (1989), 71–88.

[HL22] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1922), no. 1, 1–70. Reprinted as pp. 561–630 in *Collected Papers of G. H. Hardy*, Vol. I, Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 1966.

[Hej89] D. Hejhal, *On the distribution of* $\log|\zeta'(\frac{1}{2}+it)|$, Number Theory, Trace formula and Discrete Groups, Symposium in Honor of Atle Selberg, Oslo, Norway, July 14-21, 1987, edited by K. E. Aubert, E. Bombieri, and D. Goldfeld, Academic Press, San Diego, 1989, 343–370.
Math. Comp. **87** (2018), no. 310, 1013–1028.

[Ing32] A. E. Ingham, *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics **30**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932.

[Ing42] A. E. Ingham, *On two conjectures in the theorem of numbers*, Amer. J. Math. **64** (1942), 313–319.

[MS02] H. L. Montgomery and K. Soundararajan, *Beyond pair correlation*, Paul Erdős and his mathematics, I (Budapest, 1999), 507–514, Bolyai Soc. Math. Stud., 11, Janos Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

[MV07] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **97**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[RS91] K. Ramachandra and A. Sankaranarayanan, *Notes on the Riemann zeta-function*, J. Indian Math. Soc. **57** (1991) 67–77.

[Tit86] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon (Oxford), 1986.

[Vau01] R. C. Vaughan, *On a variance associated with the distribution of primes in arithmetic progressions*, Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), 533–553.

Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395
JAPAN

E-mail address: `adeirmasuriajaya@math.kyushu-u.ac.jp`

九州大学数理学研究院　Ade Irma Suriajaya

以上