

熱的に乱れた格子系とソリトン

矢嶋, 信男
九州大学応用力学研究所 : 教授

<https://doi.org/10.15017/4785243>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 66, pp.369-378, 1988-10. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



熱的に乱れた格子系とソリトン

矢 嶋 信 男

概 要

熱的に揺らいでいる非線形格子内のソリトンの振舞いをランジュバン化した戸田モデルに対して特異摂動法と数値計算を併用することによって調べた。ソリトンのエネルギーが熱エネルギーに比べて十分大きければ、その減衰は主として摩擦力によって決まるが、熱浴の温度効果は減衰率を低下させることが明らかになった。また、熱的揺動の中からソリトンが発生する可能性を検討し、高温の場合にはソリトンモードが熱現象に寄与する可能性があることを示した。

Key words: Soliton, Toda Lattice, Thermalization

1. 序 論

多くの分野でソリトン研究が依然として活発に行われているが、その理由の一つは、それが分散媒質における安定基準モードとしての役割を担うのではないかとの期待に基いている。もともとソリトンの近代的研究は Zabusky-Kruskal¹⁾ の計算から始まっている。彼らは Korteweg-de Vries (KdV) 系というごく特殊な場合ではあったが、系内のエネルギーの大部分が安定なソリトンの形で運ばれていることを見出した。彼らの先駆的な仕事のあとで、ソリトン解は KdV 系に固有のものでなく、非線形波動系におけるより一般的な存在であることが示された。もちろん、非線形系においてはソリトン以外にも、小波(さざなみ: ripple)も存在している。しかし、多くの場合この小波は、波動エネルギーのごくわずかな部分しか運ばないので、ほとんど微小振幅の線形波であると見なすことができる。したがって、エネルギーの大きな波動現象ではソリトンがエネルギー輸送の担い手になり得るのではないかとの期待が生まれるのである。ところが、現実の系では不均一性や不純物、さらには外力や熱揺動などが存在するため、それらとの相互作用の結果、ソリトンは伝播しながら変形や減衰をするであろう。したがって、このような変形もしくは減衰効果を調べておくことは、エネルギー輸送現象におけるソリトン概念の有効性をさぐる上できわめて重要である。

熱現象におけるソリトンの役割は、これまでも高分子などの1次元非線形系の統計力学の問題との関連において ϕ^4 モデルや Sine-Gordon 模型を用いて議論されてきた^{2)~5)}。一方、戸田格子は、その古典的な分配関数が厳密に計算できるため⁶⁾⁷⁾、ソリトン系の言葉で熱現象を翻訳するための好個の素材として

研究の対象とされてきた⁸⁾⁹⁾。それにもかかわらず、この問題には、熱現象に対するソリトンと小波の寄与など、未解決の点が残されている。じっさいに戸田格子系の熱力学を確立する上でこの物理的な課題は興味のある問題であろう。しかしながら、ここでは問題をよりダイナミカルな観点から捉えるために、熱浴に浸された戸田格子内でのソリトンの振舞いを調べることにする。これは熱的平衡にある戸田格子系の熱力学的性質だけでは決まらない。ソリトンエネルギーの緩和をとまなうので、本質的に非平衡過程のダイナミクスを含んでいる。この問題は素朴ではあるが、エネルギー輸送現象においてソリトンがどのように関わっているかを直接示している点ですぐれている。したがって、熱的に乱れた系におけるソリトンモードの役割を解明する上で基本的な意味を持つものと考えられる。

§2では熱的に揺らいでいる非線形ソリトン系のモデルとしてランジュバン化された戸田格子が導入される。揺らぎ力と温度の間には散逸揺動定理が仮定される。非摂動系に対する逆散乱法を拡張して、ランダム力によるソリトンの減衰率を求める摂動公式が導かれる。§3では、この離散的な方程式を有限小振幅・長波長の仮定のもとに連続体近似に書き直すことによって、ランジュバン化されたKdV方程式を導き、この式を用いて、ソリトンエネルギーの減衰率が求められ、また熱的揺らぎの中からソリトンが発生する可能性が調べられる。§4では数値計算の結果を示す。とくに、外部から入射したソリトンの波形変化から求めたエネルギー減衰率が求められ、§3の結果と比べられる。併せて、十分に温度が高いときには熱的な揺らぎの中からソリトンが生成されている計算例を示す。そこでは、ソリトンのパルスが相関を保ちながら運動している様子が見られる。これは熱現象の担い手としてのソリトンの役割を示すものであろう。§5はまとめに当てられている。

2. 熱浴内の戸田格子とソリトン

ここでは、戸田格子を考える。 n 番目の粒子の座標と運動量を、それぞれ Q_n, P_n とする。戸田格子であるから、近接粒子間には指数関数型の力が作用している。この系は熱浴に入っているので、各粒子にはランダムな揺らぎ力 F_n と摩擦力 $-\nu P_n$ が働いている。したがって、

$$dQ_n/dt = P_n \quad (1)$$

$$dP_n/dt = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad (2)$$

が成り立つ。 F_n と $-\nu P_n$ の間には次のタイプの散逸揺動定理

$$\langle F_m(t) F_n(t') \rangle = 2\nu T \delta_{mn} \delta(t - t') \quad (3)$$

を仮定しておく。ここで、カッコは揺らぎ量についてのアンサンブル平均を意味する。 δ_{mn} はクロネッカーの記号である。また、質量や位置ならびに時間変数は適当に規格化されているものとする。

まず $\nu = F_n = 0$ の場合を考えよう。Toda¹⁰⁾によれば、この場合にはソリトン解の存在が可能である。それは、

$$\exp[Q_{n-1} - Q_n] - 1 = S \operatorname{sech}^2[\kappa n - \Omega t] \quad (4)$$

の形をしている。ただし、

$$S = \sinh^2 \kappa, \quad \Omega = \sinh \kappa = S^{1/2} \quad (5)$$

である。このときソリトンのエネルギーは

$$E_{sol} = \sinh(2\kappa) - 2\kappa \quad (6)$$

と表される。

ここで Flaschka にならって

$$a(n) = \frac{1}{2}e^{-(Q_n - Q_{n-1})/2}, \quad b(n) = -\frac{1}{2}P_{n-1} \quad (7)$$

を導入して、次の固有値問題を考える¹¹⁾。

$$a(n)u(n+1) + a(n-1)u(n-1) + b(n)u(n) = \lambda u(n) \quad (8)$$

$u(n)$ は固有値 λ に対応した固有関数である。(7) を使うと、(1), (2) は

$$da(n)/dt = [b(n+1) - b(n)]a(n) \quad (9a)$$

$$db(n)/dt = 2[a(n)^2 - a(n-1)^2] - F_{n-1}/2 - \nu b(n) \quad (9b)$$

と書くことができる。境界条件は $n \rightarrow \pm\infty$ で $Q_n = P_n \rightarrow 0$ に相当して

$$a(n) = 1/2, \quad b(n) = 0 \quad (n \rightarrow \pm\infty) \quad (10)$$

とする。

もし $F_n = 0, \nu = 0$ であれば、通常の逆散乱理論によれば、離散的固有値 λ_m は時間的に不変になって、

$$d\lambda_m/dt = 0 \quad (11)$$

となる。固有状態 λ_m はソリトン解に対応していて、その振幅は

$$S_m = \lambda_m^2 - 1 \quad (12)$$

で与えられる。

$F_n \neq 0, \nu \neq 0$ のときには、(11) は成立しない。(7) を (1) と (2) に入れて (8) を使うと、

$$d\lambda_m/dt = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\nu b(n) + F_n/2] u_m(n)^2 \quad (13)$$

が得られる。これは、熱浴内でのランダムな力の影響を受けてソリトンの振幅が変化することを意味している。(13) を近似的に評価してソリトン振幅の変化率を求めることは容易であるが、ここではやらない。というのは、逆散乱法における摂動近似の収束についてはまだ十分納得のできる段階になっていないからである。

いま、振幅 S が十分に小さいときを考えよう。(5) の定義から $\kappa \ll 1$ と期待される。すなわち、

$$S \simeq \kappa^2, \quad \Omega \simeq \kappa(1 + \kappa^2/6) \quad (14)$$

さらに、 $|Q_n - Q_{n-1}| \ll 1$ として (4) 式の指数関数を展開すると

$$(Q_n - Q_{n-1}) \simeq -\kappa^2 \operatorname{sech}^2[\kappa\{n - (1 + \kappa^2/6)t\}] \quad (15)$$

が得られる。ソリトンのエネルギーは

$$E_{sol} \simeq 4\kappa^3/3 \simeq 4S^{3/2}/3 \quad (16)$$

と書くことができる。

このソリトンのエネルギーは 1 格子点当たりいくらのエネルギーに相当しているかを見積っておこう。ソリトンに関与している格子点の数はほぼ κ^{-1} の程度であるから、これで (16) をわると 1 格子点あたりのソリトンエネルギー ε_{sol} が得られて

$$\varepsilon_{sol} \simeq 4\kappa^4/3 \simeq 4S^2/3 \quad (17)$$

となる。もしこのエネルギーが温度 T と同じ程度であれば、ソリトンは熱的揺動の中に埋もれてしまう。一方、 $\varepsilon_{sol} \gg T$ のときには、ランダムな力の下でもコヒーレンスを保ち得るので、ソリトンが熱現象の担い手としての役割を果たすことが期待される。

3. 小 振 幅 近 似

ここでは、(1)~(3) を小振幅近似で書き換えておこう。(15) が示すように、このときソリトンの幅も κ^{-1} に比例して大きくなるので離散変数 n は連続変数に置き換えてもよい。熱的な揺らぎ力によるソリトンの逆戻りがないと仮定して、次のような変数を定義する：

$$\rho = -(Q_n - Q_{n-1}), \quad \xi = (n-t), \quad \tau = t \quad (18)$$

ρ は格子点の密度に比例している。また、 ξ と τ は音速で右向きに走る系における座標変数である。この系ではすべての量は時間的に緩やかに変化するものとして、 τ 依存性は弱いと仮定しておく。これらのことから (1), (2) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \rho}{\partial \xi^3} = \frac{F}{2} - \frac{\nu}{2} \rho \quad (19)$$

と書くことができる。(3) に対応して

$$\langle F(\xi, \tau) F(\xi', \tau') \rangle = 2\nu T \delta(\xi - \xi') \delta(\tau - \tau') \quad (20)$$

が成り立つ。

(19) で $F = \nu = 0$ のときには、ソリトン解として

$$\rho_0 = S \operatorname{sech}^2[\sqrt{S}(\xi - S\tau/6)] \quad (21)$$

が得られる。ここで (18) を考慮して $S = \kappa^2$ とすると、(21) は小振幅解 (15) に一致することを注意しておく。

ソリトン解 (21) に対するランダム力の影響を調べよう。(19) で

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (22)$$

とする。 ρ_1 は F もしくは ν のオーダーの量である。変数を (ξ, τ) から (ζ, τ) に移る。 ζ はソリトン座標で

$$\zeta = \kappa(\xi - \theta(\tau)), \quad d\theta/d\tau = \nu \quad (23)$$

で定義される。ここで κ および ν は τ の関数であるが、その τ 依存性は ν のオーダーで弱いとする。また、 $\rho_0(\zeta, \tau)$ や $\rho_1(\zeta, \tau)$ の τ 依存性も同じく $O(\nu)$ であるとする。(19) で (22) と (23) を考慮すると、 ν について 0 次のところで

$$-\nu \frac{\partial \rho_0}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial \zeta} + \frac{\kappa^2}{24} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial \zeta^3} = 0 \quad (24)$$

ν の 1 次のオーダーで

$$-\kappa \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\nu \rho_1 + \frac{\rho_0}{2} \rho_1 + \frac{\kappa^2}{24} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \zeta^2} \right] + \frac{\partial \rho_0}{\partial \tau} + \frac{d\kappa}{d\tau} \frac{\zeta}{\kappa} \frac{\partial \rho_0}{\partial \zeta} = \frac{F}{2} - \frac{\nu}{2} \rho_0 \quad (25)$$

が得られる。

(24) はソリトン解

$$\rho_0 = \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \zeta, \quad v = \kappa^2/6 \quad (26)$$

を与える。これは解 (21), すなわち (15) と等価である。パラメータ κ の τ 依存性は (25) から決まる。

(25) に ρ_0 をかけて $(-\infty, \infty)$ の範囲で ζ について積分する。 ρ_0 が (24) を満たすことを考慮し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0^2 d\zeta = 4\kappa^4/3 \quad (27)$$

を使うと、

$$(d/d\tau) \log \kappa = -\frac{1}{3}\nu + \frac{1}{4\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta F(\xi, \tau) \operatorname{sech}^2 \zeta \quad (28)$$

となる。

(28) から容易に、

$$(\kappa/\kappa_0)^3 = \exp \left[-\nu\tau + \frac{3}{4} \int_0^\tau \frac{d\sigma}{\kappa^2(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \sigma) \operatorname{sech}^2 \zeta d\zeta \right]$$

が導かれる。(16)を考慮すると、この左辺はソリトンのエネルギー比になっていることが判るので、この平均をとって

$$H(\tau) = \langle E_{sol}(\tau)/E_{sol}(0) \rangle = e^{-\nu\tau} \langle \exp \left[\frac{3}{4} \int_0^\tau d\sigma \kappa^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \sigma) \operatorname{sech}^2 \zeta d\zeta \right] \rangle$$

が得られる。ここで、確率変数 $F(\xi, \tau)$ が正規分布をしていると仮定する。左辺の積分記号内の κ の確率変数依存性を無視すると、キュムラント展開の公式から、

$$\begin{aligned} \langle \exp [\cdots] \rangle &= \exp \left[\frac{9}{16} \int_0^\tau \int_0^\tau d\sigma d\sigma' \frac{1}{\kappa^2(\sigma)\kappa^2(\sigma')} \iint_{-\infty}^{\infty} d\zeta d\zeta' \right. \\ &\quad \left. \times \langle F(\xi, \sigma) F(\xi', \sigma') \rangle \operatorname{sech}^2 \zeta \operatorname{sech}^2 \zeta' \right] \end{aligned}$$

ここで散逸揺動定理 (20) を使うと

$$= \exp \left[\frac{3}{4} \nu \Theta \int_0^\tau d\sigma \frac{1}{H(\sigma')} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \zeta d\zeta \right]$$

となる。 Θ は初期のソリトンエネルギーと熱エネルギーの比で

$$\Theta = T/E_{sol}(0) \quad (29)$$

で定義されている。

これらをまとめて、上の $H(\tau)$ の対数微分をとって

$$(d/d\tau) \log H = -\nu + \nu\Theta/H$$

が得られる。これを解いて、最終的に

$$H(\tau) = e^{-\nu\tau} + \Theta(1 - e^{-\nu\tau}) \quad (30)$$

を得る。これが熱浴内でのソリトンの減衰の仕方を与えている。温度効果によって減衰は抑えられ、熱エネルギー程度のソリトンエネルギーは残る。この傾向は次節で示される数値計算例においても見られる。

ここで、(30)の結果は調和格子に対するエネルギー緩和の公式と全く同じであることを注意しておく。上の計算で積分記号内の κ の確率変数依存性を無視したが、この高次補正を取り入れると違いが見られる。しかし、これは温度が低いところで効かないので、ここではこれ以上考えない。ただ、興味深い

のはエネルギー緩和は同じでも振幅の減衰率は異なってくるということである。というのは線形波ではエネルギーは振幅の2乗に比例するが、ソリトン系では3/2乗に比例するからである。

さて、この節の残りで熱的揺動からのソリトンの発生の可能性を調べておこう。ソリトンが熱から発生するとすれば $E_{sol} \sim T$ であるから、(17) と比べて

$$\kappa \sim T^{1/3}$$

と評価できる。一方、振幅 $S = \kappa^2$ のソリトンが生成されるのに必要な時間 τ_f はソリトン幅 ($\sim \kappa^{-1}$) をその速度 ($\sim \kappa^2$) でわって

$$\tau_f \sim \kappa^{-3} \sim T^{-1}$$

で与えられる。したがって、この時間内に各格子点がランダム力から受ける平均のエネルギー変化は

$$\delta E \sim \langle (\int_0^{\tau_f} F_n(t) dt)^2 \rangle \sim \nu T \tau_f \sim \nu$$

である。また、振幅 S のソリトンの1格子点当りのエネルギーは

$$\varepsilon_{sol} \sim \kappa^4 \sim T^{4/3}$$

である。 $\delta E > \varepsilon_{sol}$ のときには、当然のことではあるが、ソリトンは熱運動のなかに吸収されてしまう。したがって、ソリトンは熱現象の担い手としての役割を果たし得るのは逆のケースであって、

$$T > \alpha \nu^{3/4} = T_c \quad (31)$$

のときである。ここで α は $O(1)$ の定数である。したがって、温度 T がある臨界値 $T_c (\sim \nu^{3/4})$ を超えると、熱的揺らぎの中から発生したソリトンが意味を持ち得ると考えられる。じっさい、§4の計算例が示しているように、温度が高いときにはソリトンのパルスが数多く熱的揺動の中に観察されているが、温度が低い場合にはソリトンのパルスの数は少ない。

4. ソリトンの減衰と発生：数値計算例

方程式系 (1) および (2) をそのまま数値積分する代わりに、Nakazawa にならって次のような変数を導入する¹²⁾。

$$V_n = P_n - G_n(t), \quad G_n(t) = \int_0^t F_n(t') dt' \quad (32)$$

これを (1), (2) および (3) に入れて、

$$dQ_n/dt = V_n + G_n \quad (33a)$$

$$dV_n/dt = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} + \nu(V_n + G_n) \quad (33b)$$

$$\langle G_n(t) \rangle = 0 \quad (34a)$$

$$\langle G_m(t) G_n(t') \rangle = 2\nu T \delta_{mn} t \quad (t \leq t') \quad (34b)$$

が得られる。(34b) には δ 関数的な特異性が現れないので数値計算に便利である。(34b) を用いれば

$$\langle [G_m(t+\tau) - G_n(t)]^2 \rangle = 2\nu T \delta_{mn} \tau \quad (34c)$$

が得られることを注意しておこう。実際の計算では $n = 100$ の周期系に対して Runge-Kutta-Gill 法が用いられた。

Fig. 1 に $t = 0$ で静止していた格子系がランダム力の作用の下で時間とともに熱化してゆく様子が示

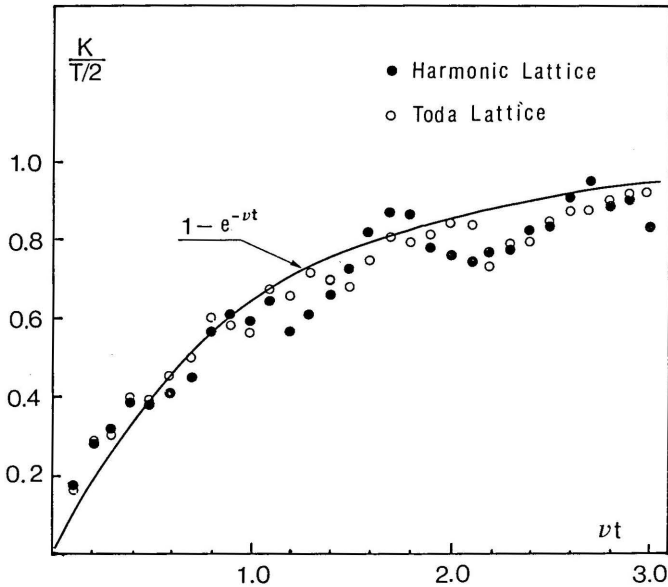


Fig. 1 戸田格子と調和格子における熱平衡への接近

全格子点は $t = 0$ で静止している。 $t < 0$ で $F_n = 0$, $t > 0$ で $F_n \neq 0$ とする。

されている。図には、調和格子と戸田格子の2つの例に対して、1格子点あたりの平均の運動エネルギーの変化が与えられている（熱エネルギー $= T/2$ で規格化されていることに注意せよ）。時間が増加するにつれて、この値は1に近付いている。比較のために線形理論による予想曲線が実線で与えられているが、線形、非線形を問わず、どちらの場合もこの曲線によく一致している。

次にソリトンの減衰率を示す。Fig. 2 にソリトンの熱浴内での減衰の様子が描かれている。図では初期のソリトンのパラメータは $\kappa = \log 8$ に選んでいる。(5)を用いるとこの κ の値に対して、振幅は $S = 15.50$ 、ソリトンの初期エネルギーは $E_{sol} = 27.83$ であることが求められる。また、計算例では $\nu = 0.4$ 、および $T = 0.01, 0.2, 0.5$ にとられている。これらに対して、 $\theta = 3.6 \times 10^{-4}, 7.2 \times 10^{-3}, 0.018$ となる。何れも $\theta \ll 1$ であるので温度効果は小さい筈であるが、実際に図でもそうになっている。 $\nu t < 0.5$ ではデータは $e^{-\nu t}$ の曲線上にのっている。理論式 (30) によれば θ が大きいほど減衰率は小さいが、この傾向は計算例においても確認することができる。ただ理論式に比べて計算データの方が温度効果が大きく出ているが、これが果して誤差によるものか否かについてはより詳細な検討を必要とする。

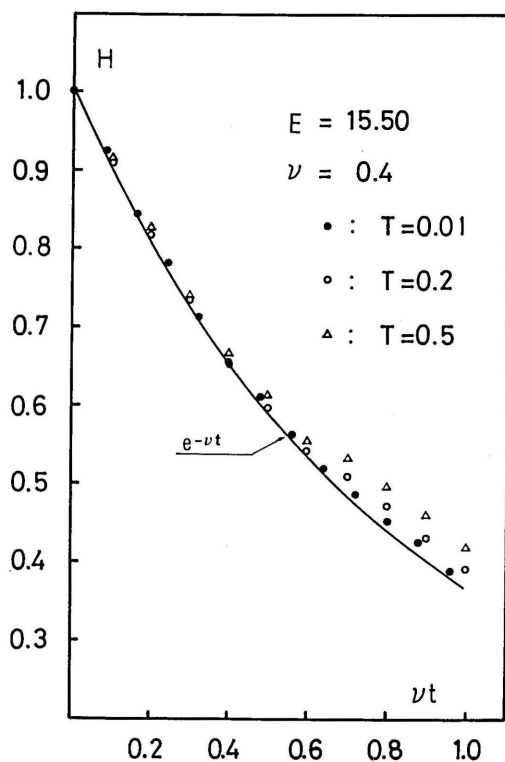


Fig. 2 熱浴内の戸田格子系におけるソリトンエネルギーの減衰

Fig. 3 と Fig. 4 に時間が十分に経過したときの格子点の変位の様子を示す。初期パルスの生き残りの

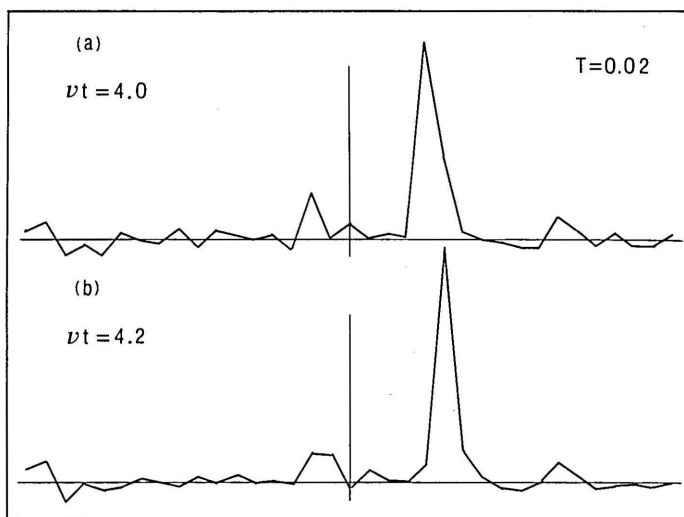


Fig. 3 戸田格子内の波形 (1) $T = 0.02$
(a) $\nu t = 4.0$; (b) $\nu t = 4.2$

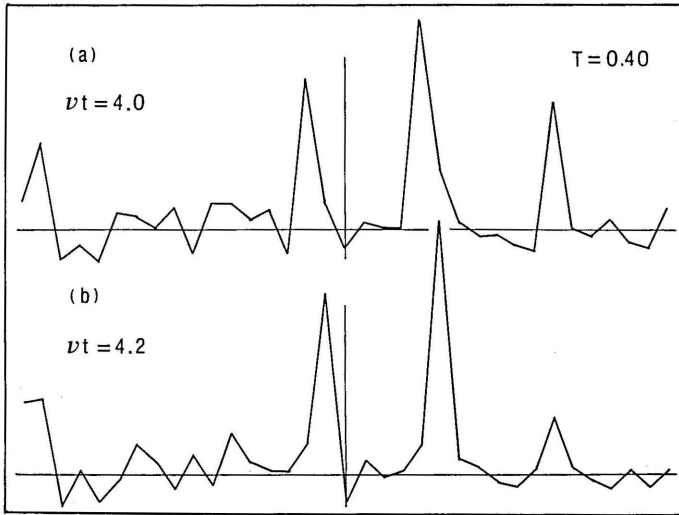


Fig. 4 戸田格子内の波形 (2) $t = 0.4$
(a) $\nu t = 4.0$; (b) $\nu t = 4.2$

他にソリトンのパルスが存在が見られるであろう。しかも格子温度が高いほどパルスの振幅は大きく、その数も多い。しかも、それらはある有限の寿命を持っているようである。すなわち、時間が経過してもパルスは消滅しない。格子温度の低い例ではランダムに発生したパルスの振幅は小さく数も少ない。また、時間が経つと振幅の小さいパルスは消滅して姿を消している。これは、前節で示した傾向に合致している。この理由は次のように解釈される。振幅の小さなソリトンのパルスは幅は広いので長時間にわたって空間相関を保ち続けることは難しいが、振幅の大きなソリトンのパルスではその幅はせまく空間的相関を保ち易いからである。

5. ま と め

ここでは熱浴内に置かれた戸田格子の振舞いのうちで、とくにソリトンの減衰と発生について摂動理論と数値計算の両面から考察した。得られた結果ならびに問題点は以下のとおりである。

- (1) ソリトンの減衰は、主として摩擦による波動エネルギーの熱化に起因する。振幅が減少するにつれて温度効果が効き始める。すなわち、熱的ランダム力の影響を受けて減衰は抑制される。
- (2) 摂動計算の最低次ではソリトンの減衰率は、エネルギーに関する限り、調和格子のそれに一致している。違いは高次キュムラント展開項で現れるが、これは温度が低ければ無視できる。一方、振幅の減衰率は最低次においても戸田格子の場合と調和格子の場合とで異なる。このことは、エネルギー振幅依存性が線形の場合と非線形の場合で異なっていることを考えれば当然である。
- (3) 熱的揺らぎのソリトン発生の可能性を調べ、そのための臨界温度を理論的に求めた。また、計算データにおいてもその兆候が見られることを確かめた。

- (4) ソリトン速度はその振幅に依存するので、振幅がランダム力の影響を受けて揺らぐと、それに応じて軌道にも乱れを生じる。この効果の評価は興味深いが、別の機会に取り上げたい。
- (5) 摂動計算を行うのに逆問題法に依らずに行ったが、ここでの特異摂動法を逆問題法の立場から定式化することも残された課題である。

文 献

- 1) N. J. Zabusky and M. D. Kruskal : Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 240.
- 2) J. A. Krumhansl and J. R. Schrieffer : Phys. Rev. B11 (1974) 3535.
- 3) M. J. Rice, A. R. Bishop, J. A. Krumhansl and S. E. Trullinger : Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 432.
- 4) N. Gupta and B. Sutherland : Phys. Rev. A14 (1976) 1970.
- 5) K. Maki and H. Takayama : Phys. Rev. B20 (1979) 3223 ; 20 (1979) 5002.
- 6) M. Toda : Prog. Theor. Phys. Suppl. 59 (1976) 1.
- 7) M. Toda and N. Saitoh : J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1983) 3703.
- 8) H. Büttner and F. G. Mertens : Solid State Commun. 29 (1979) 663.
- 9) F. G. Mertens and H. Büttner : Solitons, (1986, Springer ; ed. S. E. Trullinger, V. E. Zakharov and V. L. Pokrovsky) 723.
- 10) M. Toda : J. Phys. Soc. Jpn. 22 (1967) 431 ; 23 (1967) 501.
- 11) H. Flaschka : Prog. Theor. Phys. 51 (1974) 703.
- 12) H. Nakazawa : Prog. Theor. Phys. Suppl. 45 (1970) 231.

(昭和 63 年 5 月 31 日 受理)