

導波路パラメータ制御法および波面整合法による光 波制御回路設計に関する研究

橋本, 俊和

<https://hdl.handle.net/2324/4784651>

出版情報 : Kyushu University, 2021, 博士 (工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

博士論文

導波路パラメータ制御法および波面整合法による
光波制御回路設計に関する研究

2022年2月

九州大学大学院 総合理工学府量子プロセス理工学専攻

光エレクトロニクス研究室

橋本俊和

概要：

光通信を始めとして、光を用いた情報処理やセンシング等、様々な場面で光が使われている。特に光をそのまま信号処理や情報処理することで、光信号の広帯域性、低遅延性、低消費電力性等を活かした信号処理や情報処理が可能となると期待されている。光の受動部品は、電子回路のプロセッサのように可変な振る舞いを高速に行うことは困難であるが、広帯域性、低遅延性を維持して光信号を光のまま信号処理する光フィルタとして、光通信の中で用いられている。具体的な光の受動部品としては、光強度の分岐回路やアレイ導波路格子による波長合分波器、光信号を局発光と干渉させて振幅と位相の情報を光強度として取り出す光 90 度ハイブリッド回路などがある。それらの光部品は光導波路構造を用いた光導波路回路により構成されている。光導波路を用いることで光信号の分岐や位相等の制御が可能となり、遅延も光導波路回路の長さを調整することで正確に制御できることから、デジタル信号処理で実現されるフィルタ機能を光周波数領域で実現可能となる。しかし、光導波路回路で複雑な信号処理を行うと、要素回路を多段につなぎ合わせて大規模な回路を構成する必要があり、回路サイズが大きくなることや、要素回路を多段につなぎ合わせたことで要素回路の損失が積み重なって損失の大きな回路になってしまう等の課題が生じる。回路サイズが大きくなるという課題を解決する 1 つの手段として期待されているのが Si の半導体プロセスを用いて光導波路回路を実現する Si フォトニクスである。従来、光導波路回路は石英ガラス（屈折率として約 1.45）等で作られてきたが、Si の高い屈折率（通信波長 1.3～1.6 μm に対して約 3.5）を用いることで要素回路が格段に小型化され、要素回路を組み合わせることで大規模な回路をつくるのが可能となっている。しかし、光導波路回路は干渉を使って動作させるため要素回路のサイズは最も小さいものでも光の波長と同等程度（通信波長だと 1.3～1.6 μm 程度）に制限されるため、電子回路のような数ナノサイズの要素回路を実現することは困難である。また、要素回路を多段につなぎ合わせることで損失が積算されて大きな損失になるという課題も残されることになる。このサイズと損失の増大という課題の

ため、光導波路回路に対して、電子回路のように要素の小型化と要素を組み合わせて大規模な回路を実現する、というアプローチには限界があるように思われる。

そのような限界を克服する一つの方法としては、回路要素に分けて要素を組み合わせる従来の導波路技術に代えて、光の波面に情報を載せて、波の状態で扱い、光の回路全体で信号処理・情報処理を行うというアプローチが考えられる。本博士論文においては、光の回路全体で信号処理・情報処理を行う光回路を光波制御回路と呼ぶことにする。従来の光導波路回路では、光の広がりや伝搬方向の1次元に制限して、パルスや時間領域で位相や強度が変化する信号として扱うのに対して、光波制御回路では空間の自由度を1次元に制限せずに波面に情報を載せるため多くの自由度を使うこと可能となる。逆にいえば、波面の自由度を制御するためには、そのための光回路にも必然的に多くの自由度をもたせることになるので、多自由度の光回路を決定する設計手法が必要であり、導波構造および要素回路の少数のパラメータを決定して要素回路を組み合わせて機能を実現するという従来の設計手法とは異なる設計手法が求められる。本研究では、光回路上の回路全体の屈折率分布を、光回路の自由度として、回路全体の屈折率分布という大きな自由度を設計するための新たな設計手法を提案し、数値計算によりその有効性を示す。

光波制御回路の設計として、光回路全体の屈折率分布を扱うには、大規模な計算が必要である。大きな自由度と大規模な計算に起因して光波制御回路設計の課題としては、主に(1)計算規模の問題と、(2)「良い」光波制御回路をどうやって求めるか、という2つの課題があると考えられる。光波制御回路は、光回路全体で動作させるため、Si フォトニクス導波路回路要素を組み合わせた回路全体(回路長で mm から cm オーダーの回路)と同程度の領域の屈折率分布を設計対象とする必要がある。このサイズは波長と比較して大きく、大規模な計算が必要となるため、極力計算量を抑制する必要がある。たとえば、有限差分時間領域法 (Finite-difference time-domain method; FDTD method) を用いたトポロジー最適化による光回路の設計では、設計に相当する光回路形状の最適化において、多くの計算リソ

ースを必要とする FDTD 法を反復計算するため、ワークステーション程度の計算機で現実的に扱える領域サイズは、光の回路長で百 μm オーダー以下程度ではないかと思われる。この領域サイズは Si フォトニクス of 導波路回路要素の最適化には十分であるが、光波制御回路には不十分である。このように、光波制御回路の設計では光回路全体を計算対象とするために必要な計算量が膨大になるというのが (1) の計算規模の問題である。

また、光波制御回路の設計で得られる屈折率分布は、一般には一意に決まらないため、小型になる、あるいは、作製誤差の影響を受けにくい等の要望を反映した「良い」光回路を生成できることが望ましい。しかし、そのため手法は確立しておらず、一意には決まらない屈折率分布をどのように絞込んでいくかが (2) の「良い」光波制御回路をどう求めるかという課題である。

以上の課題に対応する光波制御回路の設計手法として、本研究では、FDTD 法を用いたトポロジー最適化よりも大規模化に適し、さらに、「良い」光波制御回路を実現するために、設計手法の物理的な解釈を可能にして物理的な制約条件を課しやすくすることを目指して、2つの手法を提案する。一つは光導波路を拡張して、光導波路の屈折率分布を与えるパラメータを伝搬方向に対して変化させ、導波路中の光の波面を制御する手法で、本研究では導波路パラメータ制御法と呼ぶ。本研究の導波路パラメータ制御法では、グレーデッドインデックスファイバに代表される断面構造の動径方向に対して 2 次関数となっている屈折率分布の導波路について、2 次関数のパラメータが伝搬方向に変化する導波路回路を扱う。もう一つは、本研究において波面整合法とよんでいる手法で、導波路構造に限定せずに、屈折率分布を自由な形状として、その屈折率分布を後述する手順で決定する手法である。本研究では、それぞれの設計手法について、光回路の屈折率分布を決めるための関係式を導き、それに基づいて屈折率分布を決定する。導波路パラメータ制御法においては、光導波路中の光を Gauss 分布として Gauss 分布のパラメータと光導波路のパラメータの関係性を方程式として導出し、その方程式をもとに設計方針を式で与えて屈折率分布を決定し、光導波路中の光の

挙動を制御できること示す。波面整合法については、反復計算により屈折率分布を更新して所望の入力から出力が得るための、屈折率分布の更新式として波面整合式を導出する。波面整合式は、物理的に解釈すると、入力から順伝搬させた光と出力から逆伝搬させた光の位相差を減らすように屈折率分布を更新し、最終的に波面の位相を一致させるという手順を与えるため、この屈折率分布の決定手法を波面整合法と呼んでいる。この手法は FDTD 法と比較して計算量が格段に少ないビーム伝搬法 (Beam Propagation Method : BPM) を用いて、BPM の光伝搬の計算中に、逐次、光回路を再構成していく形にアルゴリズムを実装することが可能であり、大規模な光回路の設計にも適用可能である。本研究では、さらに、経路積分による解釈や、波面整合法では決められない系のパラメータ (設計の自由度) を設計に取り入れるための考察も行う。2つの光波制御回路の設計手法 (導波路パラメータ制御法と波面整合法) それぞれについて、いくつかの光回路設計に適用して、光伝搬のシミュレーションで従来の光導波路との特性比較等により有効性を確認する。さらに、深層ニューラルネットワーク (Deep Neural Network : DNN) と波面整合法とが、学習方法のみならず、ネットワークの特性としても類似性があることを示す。DNN と波面整合法の類似性は、近年研究が活発な DNN において提案されている莫大な学習パラメータで規定される候補となるネットワークの中から適切なネットワークを選び出すための様々な手法の波面整合法への適用可能性を示唆するものと考えられる。本研究では、ドロップアウトと呼ばれる DNN の手法を用いることで、波面整合法の過剰適応が抑制されることを確認し、波面整合法への DNN 手法の適用可能性を示す。

以上のとおり、本研究では2つの光波制御回路の設計手法を提案し、設計の自由度や設計手法の物理的な解釈、DNN の手法を取り込んだ光波制御回路設計の可能性等を示す。さらに、提案した設計手法の有効性を確認するため、基本的な光回路設計への適用および数値計算による特性の検証を行う。最後に、本提案手法を発展させる方向性について考察を行う。

内容

概要	1
1. はじめに	8
1-1. 背景～平面光波回路とその応用領域～	8
1-2. 本研究の位置づけと目的	12
1-3. 光波制御回路の課題とアプローチ	16
1-4. 本博士論文の構成	20
2. 光の伝搬と光回路	22
2-1. 発展方程式による光の伝搬の記述	22
2-2. ベクトルによる表現	24
2-3. ビーム伝搬法	27
3. 導波路パラメータ制御法と光回路設計への適用	31
3-1. 2乗分布導波路と Gauss 分布のパラメータ	33
3-2. 導波路パラメータ制御法と応用例	39
3-3. 導波路パラメータ制御法のシングルモード導波路への応用	50
3-4. 導波路パラメータ制御法の課題と今後の展望	61
4. 波面整合法と光回路設計への適用	66
4-1. 光の伝搬に対する屈折率分布による変分法～波面整合法の導出	67
4-2. 設計の自由度と波面整合法による光回路設計	81
4-3. 波面整合法による設計例	93
4-4. 入出力の位相の自由度を使った波面整合法の設計	110
4-5. 波面整合法の改良～深層ニューラルネットワーク手法の応用	115
4-6. 波面整合法に関する課題と今後の展望	125
5. まとめと今後の展望	126
参考文献	129
Appendix	136
A.1 有限差分 BPM の式	136
A.2 2次元以上の Gauss 分布パラメータの発展方程式	137
A.3 入力と出力の組が独立でない場合の波面整合法の簡略化	138
A.4 複数ポートへの出力における自由度について	140
A.5 随伴法	140

付表 1 使用する用語

用語	意味
光波制御回路	波面を扱うことのできる多自由度の光回路。波面に情報を乗せて複雑な信号処理や情報処理を並列的に行うことで大規模計算を可能にする。
光導波路回路	光を1次元的に導波させる回路、及び、それ組み合わせた光回路。通信で使われる光スプリッタや波長合分波器等も含む。大規模な光回路を構成する場合は、要素をつなぐことで構成する。
光のフィールド	光の電磁界分布。本博士論文においては、近似として、位相と合わせて複素数のスカラー値の分布で光のフィールドを表す。
平面光波回路 (PLC)	半導体回路と同様に微細加工技術によりウエハ上に作製した光回路。PLC は Planar Lightwave Circuit の略。本博士論文においては、特にことわらなければ、石英系のガラス材料による誘電体の平面光波回路とする。
Si フォトニクス	広義には Si 系の半導体加工技術を使って実現した光回路。本博士論文では Si 細線の光回路のことを示す。
発展方程式	時間のような1つのパラメータに沿って、変化する系の方程式。本博士論文では伝搬方向 z に沿って変化する系の変化する系の方程式。
有限差分時間領域法 (FDTD 法)	Maxwell 方程式を差分により離散化して時間領域に発展させて電磁界分布を数値的に計算する方法 (Finite Difference Time Domain 法)
ビーム伝搬法 (BPM)	周波数領域で単一の周波数の電磁界分布を、Maxwell 方程式を伝搬方向の発展方程式に変換して数値的に計算する方法 (Beam Propagation Method)。
2乗屈折率分布	伝搬方向に垂直な方向 x の2乗で変化する屈折率の分布。
Gauss 分布	$f(x) = e^{-x^2/w^2}$ を規格化した分布。 w^2 は分散を表す。本博士論文第3章では光のフィールドを Gauss 分布で近似して、混乱がなければ光のフィールドを Gauss 分布とのみ記載する。
導波路パラメータ制御法	光導波路中の光のフィールドの振る舞いを指定して、伝搬方向にパラメータが変化する光導波路の屈折率分布を決定する設計手法。
波面整合法 (WFM)	入力側から順伝搬させた光のフィールドと出力側から逆伝搬させた光のフィールドの位相が合うように屈折率分布を更新して光回路を設計する手法 (Wavefront Matching Method)。
(波面整合法の) 設計の自由度	波面整合法ではきまらない光学系の自由度 (例えば屈折率分布の領域、制限条件等)。深層ニューラルネットワークとの対比でハイパーパラメータとも呼ぶ。
深層ニューラルネットワーク (DNN)	人工ニューラルネットワークで多層のもの (Deep Neural Network)。

付表 2 使用する主な記号

内容		記号	他記号との関係・備考（この論文での典型値）
真空中の光速		c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
光の波長		λ	典型値：通信波長 $1.55 \text{ }\mu\text{m}$
光の角周波数		ω	$\omega = 2\pi c/\lambda$
光の真空中の波数		k_0	$k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$
屈折率 または 屈折率分布		n	
参照屈折率		n_{ref}	典型値：1.45（石英ガラス $1.55 \text{ }\mu\text{m}$ 付近の近似値）
伝搬定数		β	$\beta = k_0 n_{\text{ref}}$
比屈折率差		Δ	$\Delta = (n^2 - n_{\text{ref}}^2)/(2n_{\text{ref}}^2)$
伝搬方向の座標		z	
伝搬法に対して横の座標		x	
時間		t	
線形代数の記号	横ベクトル あるいは ブラベクトル	$\langle a = (a_0^*, \dots, a_{N-1}^*)$	
	縦ベクトル あるいは ケットベクトル	$ a\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$	
	内積	$\langle a b \rangle = (a_0^*, \dots, a_{N-1}^*) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i^* b_i$	
	2 項積	$ a\rangle_{N_a} \langle b _{N_b} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{pmatrix} (b_0^*, \dots, b_{N-1}^*)$ $= \begin{pmatrix} a_0 b_0^* & \cdots & a_0 b_{N_b-1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_a-1} b_0^* & \cdots & a_{N_a-1} b_{N_b-1}^* \end{pmatrix}$ 成分表示： $ a\rangle_{N_a} \langle b _{N_b}$ の i, j 成分 $= a_i b_j^*$	
	その他	行列 M の i 行 j 列 成分 を M_{ij} と表す。 逆に $[M_{ij}]$ で行列 M を表す。	

1. はじめに

この章の概要

本研究の背景として、光回路として想定している平面光波回路技術を用いた光導波路回路と応用領域について紹介する(本文 1-1)。光導波路回路の応用領域の発展には光回路の高度化が必要であり、その高度化に対応する光回路の形態として光波制御回路と呼ぶ光回路の形態を提案する(本文 1-2)。そして、本研究のテーマである「導波路パラメータ制御法および波面整合法による光波制御回路設計に関する研究」において設定する課題とアプローチを述べる(本文 1-3)。本章の最後に本博士論文の全体の構成を述べる(本文 1-4)。

1-1. 背景～平面光波回路とその応用領域～

本研究は光回路の設計技術に関するものであり、その結果については誘電体の光回路全般に適用可能であるが、設計においては、物性値や構造を指定する必要があるため、特定の物理系として石英系の平面光波回路(PLC: Planar Lightwave Circuit ただ単に PLC 記載するときは石英系の PLC を指すものとする)を念頭に議論をすすめていく。また、本博士論文において光波制御回路と呼ぶ光回路が必要となる背景のひとつに光ファイバ通信の高度化がある。そこで、まず、光ファイバ通信を通して発展してきた PLC 技術と光ファイバ通信の関係について、簡単にまとめることとする。

PLC は、光ファイバの製造法である VAD (Vapor-phase Axial Deposition) 法を発展させて、Si 基板または石英基板上に火炎堆積法 (FHD: Flame Hydrolysis Deposition) により石英ガラス粒子を堆積し、数～十数 μm の膜を形成し、その石英ガラス膜を反応性イオンエッチングにより微細加工して、光導波路構造の回路を形成したものである [1]。光導波路構造は、埋め込み層 (クラッド) と呼ばれる低屈折率部分と、クラッドに囲まれたコアと呼ば

れる高屈折率部分からなり、コアの部分に集中して光信号が伝搬する。PLC の場合は光ファイバと同様にコアには Ge 等の元素をドーピングしてクラッドよりも屈折率が高くなるように調整する。ドーパント量はコアとクラッドの間の屈折率差を割合（比屈折率差、記号として Δ を用いる）で表す。ガラス中での凝集力等の影響を受けずに均一にドーパントをコア内に分布させるには、一般に、 $\Delta=1\%$ 程度で、高いものでも数%以下のものとなる。コアサイズは、シングルモードファイバ（伝搬モードとして単一のモードのみとなる光ファイバで Δ としては 0.2%程度）の場合は、直径で約 $10\mu\text{m}$ 程度である。このような光回路の特徴としては、光の閉じ込めが弱い、ということがあげられる。誘電体光導波路の場合は、光のフィールド（電磁界の空間分布のパターン）の振幅が伝搬方向に対して垂直方向にコアからクラッド中に振動せずに指数関数的に減衰することが知られていて、波として伝搬しないのでエバネッセント波とよばれる。減衰率の逆数が染み出し量となる。金属の導波管の場合は、抵抗がない理想的な場合は伝導電子により完全に遮蔽され導波管の外側には染み出しがない状態となる。抵抗がある場合でも、誘電体光導波路と比較すると表面から金属内に極わずかしかり込みない。また、誘電体光導波路でも、Si フォトニクスや半導体導波路のリッジ導波路と呼ばれるものも、比屈折率差 Δ が大きく、導波路コアの外側にはほとんど光のフィールドがない光の閉じ込めが強い状態になる。光の閉じ込めが強い場合は、境界面＝導波路側面でほぼ完全に光のフィールドを反射させる必要があるため、導波路加工時に発生する微妙な形状の荒れの影響を受けやすい。それに対して、閉じ込めの弱い PLC の場合は光のフィールドがコアの外にも存在できるので、コアの形状が乱れても、コアの形状に応じて染み出し量を変化させながら光が伝搬するので、荒れの影響を受けにくく、導波路側面の荒れによる損失が少なくなる。その結果、PLC により、石英系ガラスという材料の低損失性と弱い閉じ込め導波路という構造の低損失性の両面の恩恵をうけて 0.02dB 以下程度低損失な光導波路を実現可能となっている [1]。

PLC 技術は、光ファイバ通信向けのデバイスに应用されている。光ファイバ通信向けデバイスに PLC 技術が用いられる理由に、光回路としての低損失性に加えて、以下の 2 点もあげられる。1 つ目は、光ファイバとの親和性である。光ファイバも PLC もどちらも石英系の光導波路であり、シングルモードという条件で比屈折率差 Δ を同じにすれば、コアのサイズや光のフィールドの広がりほぼ同様になり、光ファイバと PLC とを付き当てて接続してもほぼ損失のない光結合が実現される。2 つ目は、PLC の材料が石英系のガラスであることである。石英系のガラス材料は低コストで、安定性、耐候性がある。さらに、PLC の製造方法としても半導体チップと同様にウエハプロセスで作製可能であるため製造コストを抑えて量産が可能である。これらの PLC の生産性や安定性といった性質は、光ファイバ通信網を張り巡らせるために必要な大量の敷設を支える量産性や長期間に渡って通信の信頼性を維持する耐久性として、実用上、非常に重要な性質である。実際に光ファイバ通信に PLC が使われている例としては以下がある。基幹網の波長多重伝送 (WDM: Wavelength Division Multiplexing) において波長ごとに信号を分離・統合するための分光素子であるアレイ導波路格子や、光加入者網 (光アクセス網) において光ファイバの信号を分岐・合波させる光スプリッタや、ネットワークノードにおいて光送受信器の光信号を切り替えるためのマルチキャスト光スイッチ、などが代表的なものである [1]。近年の大容量光ファイバ通信においては、1 波長あたりの周波数利用効率を拡大するために光の位相や振幅や偏光に情報を乗せる複雑な信号フォーマットが導入されている。複雑なフォーマットをもった信号の変調や復調においては、広帯域性が要求されるため光信号のままフィルタリング等の信号処理を行う必要があり、その一部が PLC で実現されている [2, 3]。たとえば、デジタル信号処理とコヒーレント受信を組み合わせたデジタルコヒーレント伝送向けには、局発光と干渉させて振幅、位相および偏光の情報を取り出す、両偏波光ハイブリッド (DPOH : Dual Polarization Optical Hybrid) と呼ばれる干渉回路が、PLC で実現されている。

光ファイバ通信の伝送容量は、WDM、さらには1波長あたりの周波数利用効率を向上させる通信方式の導入により、1年あたり1.4倍のペースで伸びてきた。WDMあるいは周波数利用効率の向上は、光ファイバ全体で見れば、ファイバ中の信号全体の信号強度を増大させることに相当し、信号強度-ノイズ強度比から決まる伝送容量限界（Shannon 限界）のうち信号強度の部分を改善してきたことになる。近年では光信号のパワーの増大により発生する非線形効果が伝送容量を抑制してしまう限界（非線形 Shannon 限界）の約100Tbps/coreに近づきつつあり、あらたな伝送技術が求められている。その一つが空間多重伝送である。空間多重伝送は、従来の1つのコアで1つの伝搬モードで伝送するシングルモード伝送に対して、複数コア（マルチコア）、複数モード（マルチモード）の光ファイバを使った伝送技術である。前者はコア数を増やして1つのコアあたりのエネルギー密度を下げ、後者はコア径を拡大してコアの中の単位断面積あたりのエネルギー密度を下げることにより伝送容量を拡大するものである。さらに、マルチコアの光ファイバの場合は、コア間の距離を遠くしてほぼ光学的に結合しないものと、コア間の距離を近づけて光学的に結合させてスーパーモードと呼ばれる伝搬モードを使って伝搬させるものなど様々な伝送モードの活用が提案されている。マルチコアファイバについては、マルチコア対応の展開用の光ファイバ（ファンアウトファイバ）を用いて光回路に結合させればよいので、PLCの集積性を生かして多ポートのPLC回路等を適用することが想定される。一方、マルチモードファイバについては、一般に断面の屈折率分布として様々なものがあり、PLCのような光導波路とマルチモードファイバに整合させるためには以下の方法が提案されている。PLCのコアそのものを拡大させてPLCもマルチモード回路としてモード合分波させるような方法や、Siフォトニクスと呼ばれる高屈折率差の光回路では高角度で光を跳ね上げるグレーティングを形成し基板面内にマルチモードパターンを作ってマルチモード光ファイバと結合させる方法等である[4,5]。いずれの方法も研究段階であり、今後の光ファイバ通信システムの発展に伴いこれ

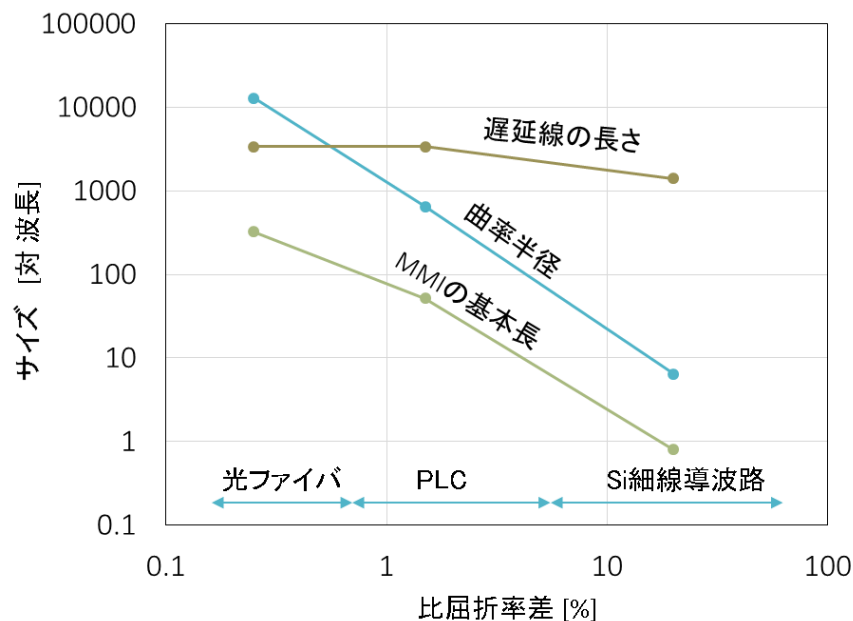
らの空間多重伝送等の技術に対するニーズが明確になり、技術の精査や使い分けが進展するものと考えられる。

以上のように、光ファイバ通信において伝送容量を拡大するために様々な伝送方式が提案されてきた。そこでは、信号の分離・合成を行う必要があり、光の周波数領域や直交する光のフィールド(光の空間分布)の分離・合成となると電子回路では困難な領域であるため、物性または物理現象を用いて、光のフィールドの分離・合成等の光信号処理を行うことが必要となる。PLCは後者の物理現象(干渉や誘電体構造による光のモード制御等)を実現するデバイスとして用いられ、光ファイバとの親和性および安定性から様々なシステムに用いられてきている。現在も活発に研究が進められている光ファイバ通信においても、複雑な信号フォーマットに対応した光信号処理や空間多重伝送におけるモード制御への適用等の技術検討が進んでおり、それに対応したPLC技術のさらなる発展が期待されている。

1-2. 本研究の位置づけと目的

前節で述べたとおり、波長、空間、位相、偏光、伝搬モード等の様々な光の属性を扱うことが光回路に求められている。従来は、光導波路中で伝搬方向に1次元的に伝搬する光信号の干渉等を用いることで、様々な光回路の機能を実現してきた。たとえば、文献[1]では、光信号処理回路としてのPLC技術が紹介されており、デジタル信号処理に相当する光周波数領域の信号処理が実現可能であることが示されている。また、通信以外でも、センシング、光ピンセットのような光のフィールドを自在に扱いたいというニーズや、人工知能(AI: Artificial Intelligence)に必要な計算やノイマン型の計算機では困難な計算を光回路で実現するようなニーズも高まってきており、複雑な光の信号処理・情報処理と拡張性の両方が求められ始めている。これらのニーズに対応して光導波路回路で大規模で複雑な信号処理を行うには、要素回路を多段につなぎ合わせて大規模な回路を構成する必要があり、回路サイズが大きくなることや、要素回路を多段につなぎ合わせたことで要素回路の損失が積

み重なって損失の大きな回路になってしまう等の課題が生じる。図 1-1 に光導波路回路による典型的な光回路サイズを示した。横軸が比屈折率差で、各屈折率に対する光導波路として、0.25%を光ファイバ、1.5%を PLC、20%を Si 細線導波路とした。これらの比屈折率差の値は、決まったものでなく、具体的な光導波路をイメージするために、おおよその比屈折率差の値に対して光導波路の種類を示したものである。縦軸については、光回路の要素の通信波長 $1.55\mu\text{m}$ に対する特徴的な回路サイズを示しており、通信波長で規格化している。文献 [6, 7] を参考に、曲率半径および MMI の基本長をプロットしている。図中にパラメータの値と併せて 0 次モードと 1 次モードで π 位相をずらすための MMI の基本長 (MMI の幅はシングルモード導波路幅の 2 倍とした) や 1nm で π 位相をずらすための式も併せて記載した。 λ は波長で n は屈折率である。Si フォトニクスを用いることで従来の光導波路回路よりも格段に小型化された光部品を実現することが可能となることがわかる。しかし、光導波路回路は干渉を使って動作させるため、図 1-1 のとおり、要素回路のサイズは光の波長と同等程度 (通信波長だと $1.3\sim 1.6\mu\text{m}$ 程度) 以下にはならないため、電子回路のような数ナノサイズの光回路を実現することは困難である。さらに遅延線に関しては Si フォトニクスの集積性の効果はなく屈折率に応じて短くできる程度である。図 1-1 では 1nm の波長を分離するための回路を例にとっているが、光ファイバ通信の信号を処理する場合、THz の周波数でも波長としては mm 程度であることを考えると、さらに長い回路が必要となるため、小型化の制限要因となる。さらに回路規模の観点からも光導波路回路型の光回路は制限を受ける。たとえば Si フォトニクスで光マトリクススイッチを構成した場合、要素回路を組み合わせることで損失が積算されるため、損失として許容可能な規模のものとしては 32×32 チャンネル程度である。許容可能な規模の光スイッチのチップを連結してさらに大規模な光スイッチを構成することも可能であるが、光導波路の交差が課題となり、その交差を回避するために光ファイバで接続すると、今度は小型化や組み立てが困難となる。



	比屈折率差 [%]	曲率半径 R [mm]	コア直径 W [μm]	MMI基本長 $4n(2W)^2/(3\lambda)$ [μm]	$\Delta\lambda = 1\text{nm}$ 波長分離遅延 $\pi\lambda^2/n\Delta\lambda$ [μm]
光ファイバ	0.25	20	10	498.9	5205
光導波路	1.5	1	4	79.8	5205
Siフォトニクス	20	0.01	0.5	1.2	2187

図 1-1 導波路型の光回路

このような制限を回避する光回路として、回路要素に分けて組み合わせることでスケールさせる従来の導波路技術に代わって、光を波の状態で扱い回路全体で特性を出す光回路が考えられる。このような光回路を本研究においては光波制御回路と呼ぶことにする。光波制御回路は、光を波の状態で扱うことで、波面を点光源に分解して、その点光源からの光の回折および干渉で新たな波面が生成される、という Huygens の原理を解釈し直し、波面を構成する点光源を並列化された光信号とみなして、その信号を制御して、信号処理・情報処理を行うことで、光導波路回路では困難な機能集積や大規模化を可能にすることを目指すものである。図 1-2 は導波路の要素回路と波面を制御する光波制御回路のイメージである。光波

制御回路は、波面を制御することになるため、必然的に多くの自由度をもつことが必要となる。そのため、導波構造および要素回路の少数のパラメータを決定して要素回路を組み合わせる機能を実現するという従来の設計手法とは異なる、多自由度全体を設計する新たな設計手法が必要となる。波面を制御する多自由度全体を設計する光波制御回路設計手法の創出が本研究の目的である。

光波制御回路を実現するには、空間光学系でレンズやホログラムを用いて実現する方法も考えられるが、近年発達の著しい半導体ウエハプロセスによる微細加工技術を使うことで、さまざまな光の分布を作り出し、従来にはない光信号処理・情報処理やセンシング技術の創出が期待できる。自由度の大きな光回路を作製することは、作製技術の観点で既に実現された状況にある。PLCのような石英系光導波路技術を用いると、光導波路コアのパターンとしてシリコンウエハ上に半導体の集積回路と同様に微細加工技術により自由なパターンを形成することができる。たとえば、 $1\mu\text{m}$ 程度のパターンで $10 \times 10 \text{ cm}$ 程度の領域を使うとするとコアとクラッドのような 2 値のパターンとして 2 の 10^{10} 乗のパターンを考えることができる。問題は、その自由度を使いこなす設計技術は確立されていないことであり、微細加工技術のもつ自由度を十分に使いこなせる設計技術の創出が望まれる。

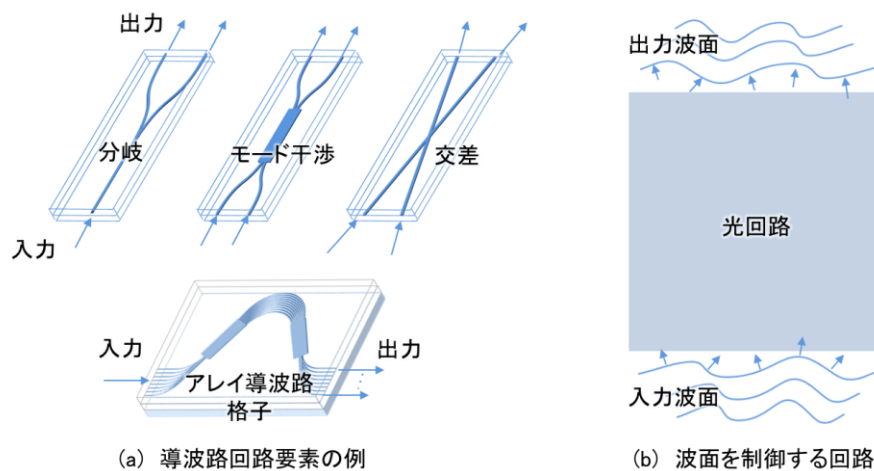


図 1-2 導波路の要素回路と波面を制御する回路のイメージ

1-3. 光波制御回路の課題とアプローチ

光波制御回路の設計の主な課題としては、(1) 計算規模の問題と、(2) 「良い」光波制御回路をどうやって求めるか、の2点が考えられる。光波制御回路は、屈折率分布を設計対象として光回路全体で動作させることを目指すので、サイズとしてはSi フォトニクス of 導波路回路要素を組み合わせた回路全体 (回路長で mm から cm オーダーの回路) と同程度以上の領域を対象とする必要があり、光の波長に対して大規模な計算 (波長の $10^3 \sim 10^4$ 倍) が必要となる。この光波制御回路の設計では光回路全体を計算対象とするために必要な計算量が膨大になるというのが (1) 計算規模の問題である。例えば、本研究と同様に屈折率分布を最適化するトポロジー最適化による光回路の設計 [9, 10] では有限差分時間領域法 (Finite-difference time-domain method; FDTD method) が用いられている。FDTD 法では領域全体について 10 分の 1 波長程度のセルサイズで 1 ステップにつき領域全体を計算する。時間発展により入力から出力まで光が伝搬するまで計算を行う必要があるため、全空間について回路長を 1/10 波長で割った回数程度の計算が必要であり、計算に必要な計算リソースや計算時間は膨大になる。さらに、最適化においては、一般には反復計算が必要となるため、FDTD 法を用いたトポロジー最適化で扱える領域は回路長で、たかだか百 μm オーダー以下に限定されてしまう。この領域サイズは、Si フォトニクスにおける導波路回路要素の最適化には適しているが、光波制御回路には不十分であり、さらに効率の良い計算方法が求められる。また、光波制御回路は、光回路のとして大きな自由度を持たせたことにより、さまざまな光回路の形状を取り得て、一意には決まらない場合がほとんどである。そのため、小型になる、あるいは、作製誤差の影響を受けにくい等、「良い」光回路を生成できる、あるいは、非常に多く候補のなかから「良い」光回路を選別できることが望まれる。しかし、そのため手法が確立しておらず、一意には決まらない屈折率分布をどのように絞込んでいくかが (2) の「良い」光波制御回路をどう求めるかという課題となる。

そこで、本研究ではこの2点に着目して、

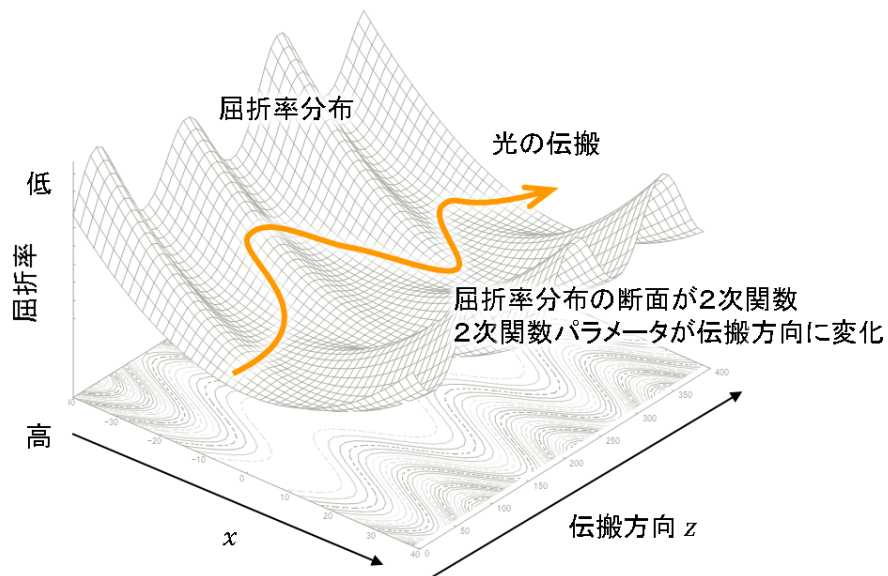
(目標1) FDTDを用いたトポロジー最適化よりも大規模化に適した光波制御回路設計手法を提供すること

(目標2) 「良い」光波制御回路を実現するために、物理的に解釈しやすい光波制御回路設計手法を提供すること

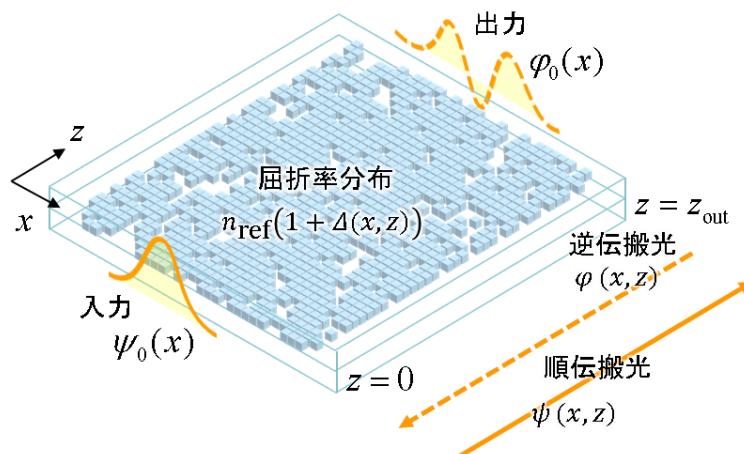
を目標として、2つの方向からアプローチする。ひとつは光導波路を拡張して、光導波路の屈折率分布を与えるパラメータを伝搬方向に対して変化させ、導波路中の光の波面を制御する導波路パラメータを決定する手法で、本研究では導波路パラメータ制御法と呼ぶ。導波路パラメータ制御法においては、グレーデッドインデクスファイバに代表される断面構造が動径方向に対して動径方向の座標の2次関数で変化する屈折率分布の導波路について、2次関数のパラメータが伝搬方向に変化する導波路回路を扱う。もうひとつは、本研究では波面整合法と呼んでいる手法で、導波路構造に限定せずに、屈折率分布を作製可能な範囲で自由な形状として、その屈折率分布をこのあと説明する手順で決定する手法である。

導波路パラメータ制御法においては、光導波路中の光を Gauss 分布として Gauss 分布のパラメータと光導波路のパラメータの関係を方程式として導出し、その方程式をもとに簡単な設計方針から光導波路中の光の挙動を制御できること示す。波面整合法については、反復計算により屈折率分布を更新して所望の入力から出力を得るための、屈折率分布の更新式として波面整合式と呼ぶ関係式を導出する。波面整合式は、物理的に解釈すると、入力から順伝搬させた光と出力から逆伝搬させた光の位相差を減らすように屈折率分布を更新し、最終的に波面の位相を一致させるという手順を与えるため、この屈折率分布の決定手法を波面整合法と呼んでいる。導波路パラメータ制御法と波面整合法の屈折率分布のイメージを図 1-3 に示す。

導波路パラメータ制御法と波面整合法の詳細は第3章と第4章で示すが、(目標1)(目標2)に関連して簡単に触れておくと下記のようなになる。



(a)導波路パラメータ制御法により設計する屈折率分布のイメージ



(b)波面整合法により設計する屈折率分布のイメージ

図 1-3 本研究における光回路設計対象の屈折率分布構造とアプローチ

まず、導波路パラメータ制御法では、光のフィールドを指定して、すなわち伝搬方向に変化する Gauss 分布のパラメータを与えて、光導波路のパラメータとの関係式から、光導波路のパラメータを決定するので、反復計算はなく、またパラメータの方程式を数値計算により解けばよいので、光のフィールドについて偏微分方程式を数値計算により求める等は一切必要ないため、大規模な光回路を求めるための計算量は FDTD 法を用いる場合と比較するとほぼ無視できる程度である。その意味で（目標 1）について問題なく達成されている。（目標 2）については、光のフィールドも屈折率分布についてもどちらもモデルを想定してそのパラメータを決定する設計方式であるため、任意の入出力関係を実現することはできない。より複雑な系を扱うためには、さらなる検討が必要であり、その点に関しては第 3 章の最後で考察を行う。

波面整合法については、は FDTD 法と比較して計算量が格段に少ないビーム伝搬法 (BPM: Beam Propagation Method) を用いて計算することが可能である。BPM は、単一波長の光の一方向の伝搬に限定されるが、FDTD の時間領域の 1 ステップの計算と同等の計算量で全域を計算可能である。したがって FDTD のセルサイズを波長の 10 分の 1 程度に設定したとすると、FDTD を用いる場合は入力から出力まで光を伝搬させる必要があるので、BPM と FDTD と比較すると、BPM の法が、対象となる回路長を 1/10 波長で割った数程度の高速化が期待できることになる。たとえば 100 μm 程度の光回路で、波長を 1 μm とすると約 1000 倍程度高速な計算が可能となる。さらに BPM で光伝搬の計算中に、逐次、光回路を更新していく形に波面整合法のアルゴリズムを実装可能であり、より高速化な計算が可能となっている。以上のとおり、波面整合法においても（目標 1）が達成できることがわかる。表 1-1 は FDTD を用いた最適化手法と波面整合法との特徴の比較である。波面整合法以外は Si フォトニクスへの適用を想定して、かつ、小さな光回路を実現することを目的とした研究であるため、計算領域の比較は必ずしも適切とは言えないが、波面整合法の方が回路の長さになると 2 桁程度大きな回路を扱っている。波面整合法における（目標 2）については、第 4 章において

詳細に記載するが、屈折率分布の更新に物理的な観点で適切な制限を与えられるように、波面整合法に用いる波面整合式を経路積分等の複数の方法で導出し、異なる観点から波面整合法の解釈を可能にする。また、波面整合法では決められない系のパラメータ（設計の自由度）の影響について考察を行う。さらに、波面整合法の対象となる屈折率分布は莫大な自由度をもった光学系であるがゆえに挙動を完全に把握するのは困難である。そこで、同じ自由度系としての深層ニューラルネットワーク（Deep Neural Network : DNN）と波面整合法の対応関係を調べて、近年活発に研究が行われている DNN のネットワークを制御するための手法の適用可能性を検討する。

表 1-1 光回路の最適化手法の比較

	適用領域例	強み	弱み
波面整合法  T. Hashimoto (2005) [12]	PLCのスプリッタ回路の最適化等 (100x500 μm)	BPMを用いて計算が速い (現実的な回路サイズ: 2mm程度 →PLCに適用可能)	任意の方向の光伝搬は扱えない
トポロジー最適化  J.Lu, et al. (2013)[9]	Siフォトニクス WDM回路 偏波スプリッタ (2.8x2.8 μm)	任意の方向の光伝搬で最適化可能	FDTDのため計算時間が長い (現実的な回路サイズ: 数十 μm 程度)
非線形ダイレクトバイナリサーチ法  B. Shen, et al. (2015)[11]	Siフォトニクス 偏波スプリッタ (2.4x2.4 μm)	最適化探索アルゴリズムを適用	FDTDのため計算時間が長い (現実的な回路サイズ: 数 μm 程度)

1-4. 本博士論文の構成

本博士論文の構成を図 1-4 に示す。本章が本研究の背景および位置づけ・アプローチを示す章となっている。第 2 章では用語や記号の定義を兼ねて、光の伝搬と光回路を記述するために Maxwell 方程式から本博士論文の中で用いる発展方程式を導出する。その発展方程式

に基づき、光回路の数値解析で用いられる手法で、本博士論文の光伝搬の数値シミュレーションにも用いるビーム伝搬法 (BPM : Beam Propagation Method) を記述する。BPM の数学的な記述方法は波面整合法を記述する際にも用いることとなる。ここまでが第 2 章となる。次に、伝搬方向に変化する光導波路を拡張した屈折率分布の設計手法 (導波路パラメータ制御法) と導波路に限定しない自由な屈折率分布の設計手法 (波面整合法) について第 3 章と第 4 章にそれぞれ記述する。第 3 章では導波路パラメータ制御法として、第 2 章で導出した発展方程式をもとにパラメータの発展方程式を導出し、そのパラメータの発展方程式を適用した光回路設計例について述べる。第 4 章では光のフィールド制御として Maxwell 方程式から導出した発展方程式をもとに波面整合法と呼ばれる光回路設計手法を導出し、光回路に適用して、波面整合法の有効性を検証する。さらに深層ニューラルネットワークと対比させ、深層ニューラルネットワーク手法の応用による特性改良を提案する。最後に第 5 章では上記の方法についてまとめるとともに、課題や今後の展開について述べる。

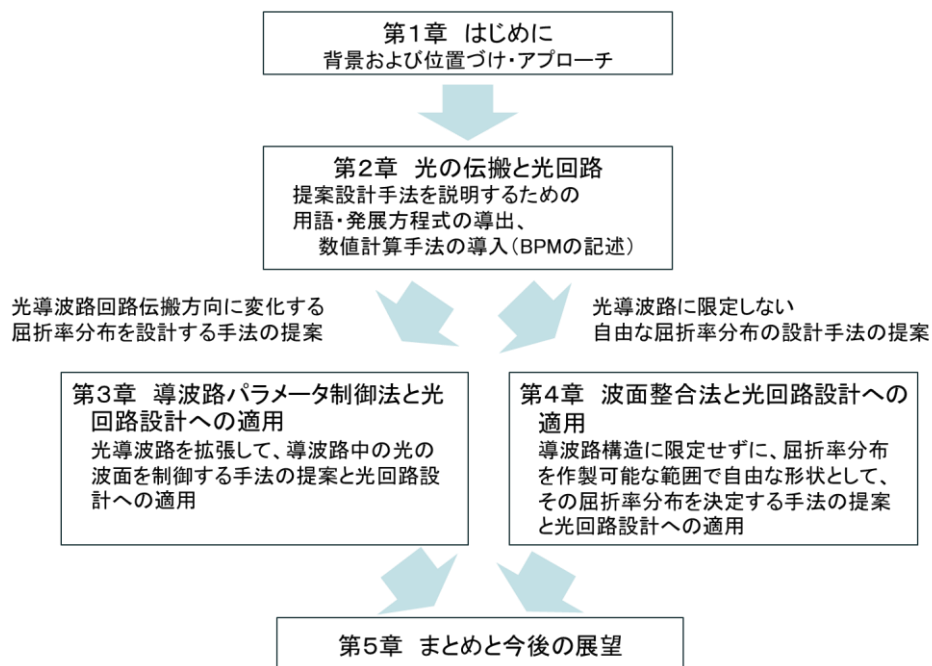


図 1-4 本博士論文の構成

2. 光の伝搬と光回路

この章の概要

光回路中の光の伝搬を記述するために光の伝搬方程式を求める。光は電磁場として Maxwell 方程式に従うが、光回路中を伝搬する場合で、特に、反射等を考慮しなくて良い場合は、伝搬方向への発展方程式として記述できる。伝搬方向への発展方程式はある断面のフィールドの値を初期値として全領域のフィールドの値が一意に決まるので、例えば、Maxwell 方程式を差分法で計算する FDTD 法と比較して計算量が大幅に低減される。また、結果として導かれる式は Schrödinger 方程式と同等の表現式になるので、量子力学で使われている様々な手法を用いることが可能となる。さらに、物理系としての好ましい性質（フィールドのノルムが保存される等）により議論を進めやすくなるというメリットがある。

本章では、記号や用語を定義しながら、第 3 章以降の議論で使用する発展方程式を Maxwell 方程式から導く（本文 2-1）。さらに、得られた発展方程式を元にビーム伝搬法とよばれる光伝搬の数値計算手法を説明する。本博士論文においては、ビーム伝搬法は、光の伝搬の数値シミュレーションに用いられることに加えて、波面整合法を記述する際の基本の基本的な式を与えるので詳細に記述する。まず、光のフィールドを空間的に離散化して各座標の値を並べたベクトルで表して、ベクトルに対する簡単な操作等をまとめる（本文 2-2）。その後、そのベクトルの表記を用いてビーム伝搬法を記述する（本文 2-3）。

2-1. 発展方程式による光の伝搬の記述

電磁場は、Maxwell 方程式に従う。偏光や媒質の異方性を取り入れるにはベクトル場として扱う必要がある。本研究の光回路として想定するガラス媒質は、異方性が少なく、偏光状態の遷移も少なく、かつ、非線形性も弱い。そこで、計算を簡単にするとともに、議論の見

通しを良くするため、本博士論文においては、光のフィールドを単一波長のスカラー波で考えていく。まず、Maxwell 方程式をから下記の波動方程式を得る。

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{n}{c} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right] \Psi(x, z) = 0 \quad (\text{式 2-1})$$

ここで記号は付表 2 (6 ページ) に示したもので、 n が屈折率で空間の座標 (x, z) の関数となっている。 c は真空中の光速で、 t は時間である。 $\Psi(x, z)$ を単一波長のスカラー波として、さらに $\Psi(x, z)$ が、 z 方向への平面波 $\exp[i(\beta z - \omega t)]$ と、この平面波に比較してゆっくりと変動する振幅 $\psi(x, z)$ の積として

$$\Psi(x, z) = \exp[i(\beta z - \omega t)] \psi(x, z)$$

と表されると仮定する。これは緩慢変化包絡線近似 (SVEA : Slowly Varying Envelope Approximation) ばれる [13, 14]。 $\Psi(x, z)$ を式 2-1 に代入して $\psi(x, z)$ の方程式を求めると

$$i \frac{\partial}{\partial z} \psi = \left[-\frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - k_0 \Delta n_{\text{ref}} \right] \psi - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \psi$$

とまとめられる。これに $\beta \partial \psi / \partial z$ に対して $\partial^2 \psi / \partial z^2$ は十分小さいとして、 $\partial^2 \psi / \partial z^2$ を無視する近似 (Fresnel 近似あるいは近軸近似とばれる [13, 14]) を適用すると

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial z} \psi = (K + V) \psi \\ K = -\frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2, V = -\beta \Delta(x, z) \end{cases} \quad (\text{式 2-2})$$

が得られる。この式はいわゆる Schrödinger 方程式で、量子力学の式と考えると K が運動エネルギー、 V がポテンシャルエネルギーを表しており、比屈折率差 $\Delta(x, z)$ の値が大きいほどポテンシャルエネルギーが低いという式になっている。伝搬方向に対して横方向の波数を k_x と置いて平面波 $\psi(x, z) = \exp[ik_x x] f(z)$ を $\Delta(x, z) \equiv 0$ とした自由空間の方程式に代入する

と $i(\partial/\partial z)f(z) = (k_x^2/2\beta)f(z)$ が得られて、これを解いて、 $\Psi(x,z) = \exp[i(\beta z - \omega t)]\psi(x,z)$ に代入すると

$$\Psi(x,z) = \exp\left[i\left(k_x x + \left(\beta - k_x^2/2\beta\right)z - \omega t\right)\right] \approx \exp\left[i\left(k_x x + \sqrt{\beta^2 - k_x^2}z - \omega t\right)\right]$$

となる。 $k_z = \sqrt{\beta^2 - k_x^2}$ とすると、 $k_x^2 + k_z^2 = \beta^2$ が成り立ち、平面波の波数の x 方向成分と z 方向成分に分けたことに対応していることがわかる。逆に、 $k_x \ll k_z$ の範囲で考えて $k_x x + k_z z = k_x x + (\beta - k_x^2/(2\beta))z$ で良い近似となっていることが Fresnel 近似あるいは近軸近似に対応する。光導波路を考えると比屈折率差 $\Delta(x,z)$ が高いところが光導波路コアとなって、この部分に光のフィールドが集中する。これは量子力学では、ポテンシャルエネルギーが低いところに粒子の存在確率が集中することに対応している。そして、ポテンシャルエネルギーの低いところに存在確率が集中すると、「不確定性原理」により、波数が大きくなって運動エネルギーの項が大きくなるので、運動エネルギーの上昇とポテンシャルエネルギーによるエネルギーを下げるはたらきが釣り合う状態が実現される。この「不確定性原理」は量子力学的なものとする必要はなく波全般、あるいは単にフーリエ変換の性質と考えることができ、光導波路中の光のフィールドも同じように考えることができる。たとえば、屈折率差を変化させずコアの幅だけ細くしていくと、あるところから光のフィールドは広がるというようなことを説明できる。本博士論文においては、以降、陽には量子力学との対応を強調しないが、Schrödinger 方程式で記述されることからわかるように光導波路の解析に量子力学的な手法を適用することができる。

2-2. ベクトルによる表現

発展方程式(式 2-2)は微分方程式であり、光のフィールド ψ を関数として解析的な取り扱いをすれば良いが、数値計算や演算操作を簡潔に記載するために光のフィールド ψ を各点での値を成分とするベクトルで表し、式 2-2 の K や V の演算子をベクトルで表した光の

フィールド ψ に作用する行列として表す。本博士論文全体を通して、ビーム伝搬法の計算をこの記述法で表し、第4章においても、これらの記号を用いて議論をすすめる。ビーム伝搬法はベクトルで表したときの内積に積分等を用いる解析的な表現でも示すことは可能であるが、この節の表示方法を用いることにより、積分記号を多用することなく、簡潔な記述が可能となる。

まず、座標を離散化する。 x の座標を、簡単のために1次元として、等間隔 Δx で離散化して場所を番号で表す。番号も x で表して、 x 番目の点と表す。紛らわしい場合は j 番目の点というような表し方をする。表 2-1 に示すように、 x 番目だけ1で x 番目以外が0となっている縦ベクトルを $|x\rangle$ と表す。成分の数に相当するベクトルの次元は、実際に数値計算するとき配列のサイズとして意識する必要がある。本博士論文の中では、ベクトル表記のままの数式がほとんどなので、ベクトルの次元を陽に意識する必要はないが、ここではベクトルの次元を N とする。関数 $\psi(x, z)$ は伝搬方向の座標 z を固定して x 番目の値を $\psi(x, z)$ とすると、離散化した座標上のベクトルは $|\psi\rangle = \sum_x \psi(x, z) |x\rangle$ と表される。さらに、 $|\psi\rangle$ を表 2-1

の波数空間の基底 $|k\rangle$ で表すと、

$$|\psi\rangle = \sum_x |k\rangle \langle k|\psi\rangle, \quad \langle k|\psi\rangle = \sum_x \psi(x, z) \langle k|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x \psi(x, z) e^{-ikx} \quad (\text{式 2-3})$$

と表され、Fourier 変換がベクトルの空間の基底から波数空間の基底への基底変換に対応することがわかる。

次に、演算子 K, V を離散化する。これらの演算子はベクトルをベクトルに写像するので行列で表される。 K は z によらない行列であるの対して、 V は z に依存する行列となるので、必要に応じて $V(z)$ と表す。 $V(x, z)$ と書いている場合は、光のフィールド ψ を関数と考えて、その関数の変数である座標 (x, z) を演算子 V にも適用していることになる。光のフィール

ドをベクトル $|\psi\rangle$ で表す場合は、座標 x はベクトル成分の場所を指定しているので、 V を行列とする場合は、座標 x を含まずに $V(z)$ とだけ表す。

一般に行列 M の i 行 j 列成分を m_{ij} とすると $M = \sum_{x,x'} m_{xx'} |x\rangle\langle x'|$ と表される。実際、2項式

$$|x\rangle\langle x'| \text{の } i \text{ 行 } j \text{ 列成分は } (|x\rangle\langle x'|)_{ij} = \delta_{ix} \delta_{jx'} \text{ であるから } \left(\sum_{x,x'} m_{xx'} |x\rangle\langle x'| \right)_{ij} = \sum_{x,x'} m_{xx'} \delta_{ix} \delta_{jx'} = m_{ij} \text{ と}$$

なる。一方、物理量を表す演算子 M をHermite行列として、 M の固有値 ε_α と固有ベクトル $|\alpha\rangle$ の組が与えられれば、 $M = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ と表される。 M が固有ベクトル $|\alpha\rangle$ をもつことは

$$M|\alpha\rangle = \left(\sum_{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'} |\alpha'\rangle\langle\alpha'| \right) |\alpha\rangle = \sum_{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'} |\alpha'\rangle \delta_{\alpha'\alpha} = \varepsilon_\alpha |\alpha\rangle \text{ となることから確かめられる。物理量を表}$$

す演算子 M を、固有ベクトル $|\alpha\rangle$ で $M = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ と分解できれば、固有ベクトル $|\alpha\rangle$ ごと

に独立に考えればよいので発展方程式を解くことが容易になる。そこで演算子 K, V の固有ベクトルと固有値を求める。 $V = -\beta\Delta(x, z)$ は $|x\rangle$ が固有ベクトルで固有値が $-\beta\Delta(x, z)$ であることがわかる。 $K = -\partial_x^2 / (2\beta)$ については、まずは、離散化する前の連続量の固有方程式を考える。 $f(x) = A \exp(ikx)$ (A は適当な係数)と置くと、 $K f(x) = k^2 / (2\beta) f(x)$ となつて、 $f(x)$ が固有関数となる。これを離散化したものが表2-2の $|k\rangle$ に他ならないから、 $|k\rangle$ を基底として K を対角化することを考えればよい。

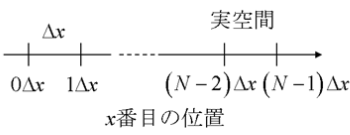
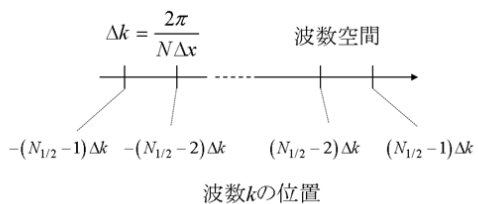
$$\sum_x \partial_x^2 f(x) |x\rangle \approx \sum_x \frac{1}{\Delta x^2} (f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)) |x\rangle$$

と差分式で近似して、離散化した座標で考えると

$$\partial_x^2 |k\rangle \approx \sum_x \partial_x^2 \frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}} |x\rangle = \frac{2}{\Delta x^2} (\cos(k\Delta x) - 1) \sum_x \frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}} |x\rangle \approx -k^2 |k\rangle$$

となる。したがって、 $K|k\rangle \approx k^2/(2\beta)|k\rangle$ となる。以上で、光のフィールドと発展方程式がベクトルと行列で表されたので、次節は離散化により行列とベクトルで表された光のフィールドの発展方程式を用いてビーム伝搬法を説明する。

表 2-1 数値計算に使うベクトル

数値計算に使う座標	ベクトルによる表現	成分
(a)実空間の座標ベクトル 	$ x\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{0番目} \\ \vdots \\ \text{x-1番目} \\ \text{x番目} \\ \text{x+1番目} \\ \vdots \\ \text{N-1番目} \end{matrix}$	$ x\rangle$ の <i>i</i> 成分 $\delta_{i,x}$
(b)波数空間の座標ベクトル 	$ k\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \omega_k^0 \\ \omega_k^1 \\ \vdots \\ \omega_k^{N-1} \end{pmatrix} = \sum_x \frac{\omega_k^x}{\sqrt{N}} x\rangle = \sum_x \frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}} x\rangle$ $\omega_k \stackrel{\text{def}}{=} \exp((-ik\Delta x))/\sqrt{N}$ $N_{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} N/2$ $k \stackrel{\text{def}}{=} -(N_{1/2}-1)\Delta k, -(N_{1/2}-2)\Delta k, \dots, (N_{1/2}-1)\Delta k$	$ k\rangle$ の <i>j</i> 成分 ω_k^j

2-3 ビーム伝搬法^[13,14]

前節の定義を用いて方程式 $i\partial_z \psi = (K+V(z))\psi$ の数値解析手法であるビーム伝搬法 (BPM : Beam Propagation Method) を説明する。数値計算を行うためのベクトル空間の基底のとり方により、数値計算法として、Fourier 変換 BPM (FT-BPM : Fourier Transform BPM) や有限差分 BPM (FD-BPM : Finite Differential-BPM) が得られる。FT-BPM の記述方法が第 3 章の波面整合法を記述する際の数学的な表現方法を与えるので FT-BPM を中心に以下に説明する。

微小ステップ Δz だけ $i\partial_z |\psi(z)\rangle = (K+V(z))|\psi(z)\rangle$ を形式的に積分した

$$|\psi(z+\Delta z)\rangle = e^{-i(K+V(z))\Delta z} |\psi(z)\rangle \quad (\text{式 2-4})$$

を考える。指数関数は行列の関数で

$$\exp(X) = I + X + X^2/2! + X^3/3! + \dots$$

を表していて、これを使うと差分方程式

$$|\psi(z + \Delta z)\rangle - |\psi(z)\rangle = -i(K + V(z))\Delta z |\psi(z)\rangle + O(\Delta z^2)$$

が得られる。指数関数については収束性等が議論されるべきであるが、本博士論文においては、物理的に有限のエネルギーで、空間的な広がりも有限な系を考えるので、すべて収束する。 $z=0$ の初期値 $|\psi(0)\rangle$ から z だけ進んだフィールド $|\psi(z)\rangle$ は式 2-4) を繰り返して、

$$|\psi(z)\rangle = e^{-i(K+V(z-\Delta z))\Delta z} e^{-i(K+V(z-2\Delta z))\Delta z} \dots e^{-i(K+V(\Delta z))\Delta z} e^{-i(K+V(0))\Delta z} |\psi(0)\rangle \quad (\text{式 2-5})$$

で与えられる。1 ステップ分の計算 $|\psi(z + \Delta z)\rangle = e^{-i(K+V(z))\Delta z} |\psi(z)\rangle$ を計算できれば、1 ステップ分の計算を逐次繰り返すことにより光のフィールドの伝搬が計算できることになる。そこで微小ステップについて具体的な計算方法を与える。

(1) FT-BPM

式 2-4 を次のように近似する

$$|\psi(z + \Delta z)\rangle = \exp(-i(K + V)\Delta z) |\psi(z)\rangle \approx \exp(-iK\Delta z) \exp(-iV\Delta z) |\psi(z)\rangle \quad (\text{式 2-6})$$

K, V がスカラーであれば正しい式であるが、行列なので近似式となり、指数関数をテイラー展開して

$$\begin{aligned} \exp((A + B)\Delta z) &\approx 1 + (A + B)\Delta z + O(\Delta z^2) \approx (1 + A\Delta z)(1 + B\Delta z) + O(\Delta z^2) \\ &= \exp(A\Delta z)\exp(B\Delta z) + O(\Delta z^2) \end{aligned}$$

となるので、 Δz について 1 次の精度正しい式となっている。ここでは詳細に立ち入らないが、さらに分割方法を工夫すると精度があげられることが知られている [15]。式 2-3 で行列 M を単位行列 I とすると、任意の正規直交完全系 $\{|\alpha\rangle\}$ に対して固有値 ε_α はすべて 1 と

るので $I = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|$ と表せる。これを単位行列の分解あるいは「1の分解」と呼ぶ。

$K = -\partial_x^2 / (2\beta)$ と $V = -\beta\Delta(x, z)$ の固有ベクトルの集合は正規直交完全系になるので、1の分解 $I = \sum_k |k\rangle\langle k| = \sum_x |x\rangle\langle x|$ が成り立ち、式2-6の指数関数の間にいれると $K|k\rangle = k^2 / (2\beta) |k\rangle$,

$V|x\rangle = -\beta\Delta(x, z)|x\rangle$ であるから、

$$\begin{aligned}
 & |\psi(z + \Delta z)\rangle \\
 & \approx \left(\sum_{x'} |x'\rangle\langle x'| \right) \exp(-iK\Delta z) \left(\sum_k |k\rangle\langle k| \right) \exp(-iV\Delta z) \left(\sum_x |x\rangle\langle x| \right) |\psi(z)\rangle \quad (\text{式 2-7}) \\
 & \approx \underbrace{\sum_{x'} |x'\rangle \sum_k \langle x'|k\rangle \exp(-ik^2\Delta z / (2\beta)) \sum_x \langle k|x\rangle \exp(i\beta\Delta(x, z)\Delta z) \psi(x, z)}_{\text{逆Fourier変換}} |x\rangle
 \end{aligned}$$

となる。 $\sum_k |k\rangle\langle k|$ が、式2-3の左側の式に対応していて、Fourier変換するという操作になる。同様に $\sum_x |x\rangle\langle x|$ が逆Fourier変換するという操作に対応している。この式を左から順次解釈していくとFT-BEMの1ステップ分のアルゴリズム (Δz だけフィールドを伝搬させるアルゴリズム) になる。

Step 1. 入力 $|\psi(z)\rangle$ に屈折率分布による位相の重み $\exp(i\beta\Delta(x, z)\Delta z)$ を掛ける

Step 2. Fourier変換を行う

Step 3. 自由空間での伝搬により発生する位相分布 $\exp(-ik^2\Delta z / (2\beta))$ を掛ける

Step 4. 逆Fourier変換を行う

となる。実際はFourier変換を高速に行えるように高速Fourier変換を適用する等の工夫が行われる。

(2) FD-BPM

FT-BPM 対して、FD-BPM は式 2-6 で $|\psi(z+\Delta z)\rangle = \exp(-i(K+V)\Delta z)|\psi(z)\rangle$ となっている \exp の部分を Cayley 近似[16]して (あるいは元の発展方程式に Crank-Nicolson 法[17]を適用して) 、

$$\exp(-i(K+V)\Delta z) \approx \frac{I - i(K+V)\Delta z/2}{I + i(K+V)\Delta z/2} = 2(I + i(K+V)\Delta z/2)^{-1} - I \quad (\text{式 2-8})$$

とする。割り算の演算は逆行列を作用させることに対応する。この場合は $K+V$ の固有ベクトルは一般には簡単には得られないので、逆行列を数値計算で求めて掛ける演算を行う。 K は差分式で近似すると行列としては 3 重対角行列となって Thomas アルゴリズム[18]などの効率的な逆行列演算を適用できるので、実際の計算では FD-BPM が使われることが多い。実際の数値計算の式を Appendix 1 に記載する。次章以降の数値計算による光の伝搬の検証は FD-BPM を用いて計算したものである。

3. 導波路パラメータ制御法と光回路設計への適用

この章の概要

この章では光導波路中の光のフィールドの振る舞いを指定して、伝搬方向にパラメータが変化する光導波路の屈折率分布を決定する設計手法である導波路パラメータ制御法を示す。さらに、導波路パラメータ制御法を用いて、所望の光のフィールドから光回路を決定する方法を示し、確認のため、導波路パラメータ制御法により得られた光回路について、設定した所望の光のフィールドが得られることを確認する。

本研究においては、導波路パラメータ制御法は、光のフィールドおよび屈折率分布としてはできるだけ単純で解析的な取り扱いが容易なものから始めて、それを拡張して一般化していくというアプローチをとる。出発点となる、単純で解析的な取り扱いが可能な光のフィールドとして Gauss 分布を採用する（以下、光のフィールドという説明をつけなくても混乱しない場合は単に Gauss 分布と呼ぶ）。屈折率分布としては、伝搬方向に対して垂直方向（横方向）の座標について 2 次式になる屈折率分布で、パラメータが伝搬方向に変化する光導波路回路（以下、2 乗分布導波路）とする。その光のフィールドと屈折率分布をもとに伝搬方向にパラメータが変化する所望の Gauss 分布をもとに発展方程式が成立するように、屈折率分布のパラメータを決定することを考える。

本文 3-1 では屈折率分布と光のフィールドの Gauss 分布、それぞれのパラメータが伝搬方向 z に対して変化するとして、発展方程式（式 2-2）を満たすように、パラメータの方程式を求める。パラメータが伝搬方向 z に対して変化することは、光のフィールドが「動き」をもつということに他ならないから、その「動き」を制御するための方法をいくつかの例を通して示す（本文 3-2）。さらに、Gauss 分布を矩形のシングルモード導波路中の伝搬モードの近似と考えると、矩形のシングルモード導波路におけるビームの「動き」への適用可能性

を検討する（本文 3-3）。光のフィールドが Gauss 分布にならないような場合については本章の最後の節で考察を与える（本文 3-4）。

光のフィールドとして Gauss 分布、屈折率分布として 2 乗分布導波路をとることは解析的な取り扱いが容易で議論をする上で都合が良いだけでなく、今後、実用上も重要になると思われるので、その点について、各論の前に触れておく。

光導波路の屈折率分布の形状としては様々なものが考えられる。商用化されている光ファイバでは、ほとんどは、ステップインデックス (SI: Step Index) 型かグレーデッドインデックス (GI: Graded Index) 型のどちらかである。光ファイバの屈折率分布は、多くは伝搬方向に一定のものを考えるので、伝搬方向に垂直な光導波路回路断面の屈折率分布形状で規定される。図 3-1 に伝搬方向に垂直な断面の屈折率分布形状の例を示す。SI 型の場合は階段状に屈折率分布形状が変化しているのに対して、GI 型の場合は、コアの屈折率分布形状が連続的に変化する。GI 型のコア部分の屈折率分布形状は断面方向の座標のべき乗の関数で表され、モード分散を最小化する値として 2 乗付近が用いられる [19, 20]。コアのサイズおよび屈折率差が大きい場合は複数の伝搬モードが存在するマルチモード導波路となる。マルチモード導波路では各モードの伝搬定数が異なるため、複数のモードが励振された場合は、伝搬していくにつれ、位相がずれて、出発点の光のパルス形状は保たれず、信号のモード成分の到達のタイミングが異なり広がったパルスとなる。したがって、モードを個別に扱えない場合は、マルチモードファイバは伝送帯域が制限されることになり、近距離伝送に限られて使用されてきた。しかし、近年、複数のモードに個別に情報を乗せて、各モードの情報を伝送後にデジタル処理技術により分離して取得する空間多重伝送も提案されるようになり、あらためてマルチモード導波路の利用が検討されている [22]。マルチモード伝送方式においては、デジタル処理技術による分離に加えて、光回路を用いて伝搬モードの合波と分離を行う必要がある。伝搬モードの合波と分離を行う光回路では光

導波路中でモードが干渉して光のフィールドはスペckルパターンのように複雑な動きをする。そのような動きを制御することは重要な課題であり、導波路パラメータ制御法は複雑な動きをする光のフィールドの制御の出発点になり得るものと考えられる。以下の節で導波路パラメータ制御法について具体的に述べていく。

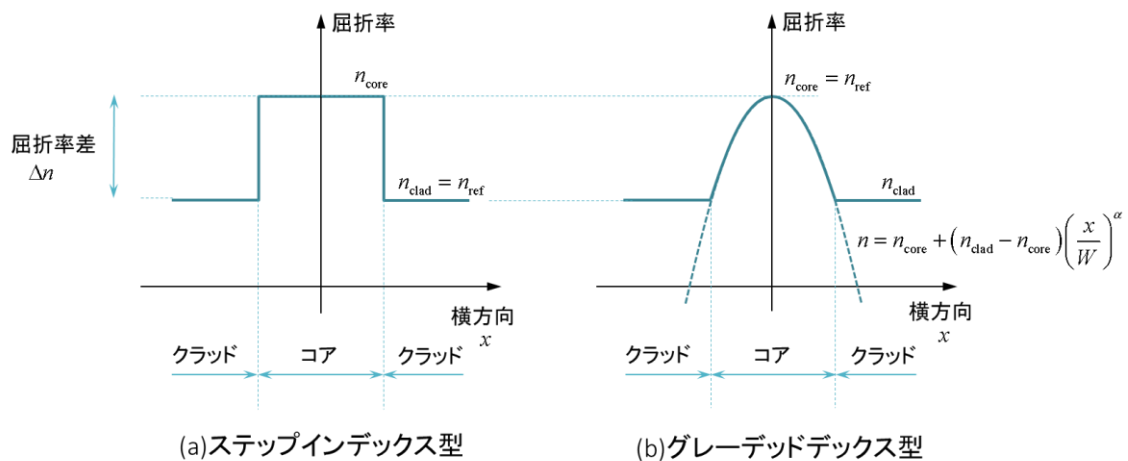


図 3-1 屈折率プロファイルの例

3-1. 2 乗分布導波路と Gauss 分布のパラメータ

Gauss 分布の運動を考えるために、伝搬方向の座標 z の関数をパラメータとして持つ Gauss 分布を考える：

$$\psi(x, z) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{w(z)^2}} \exp \left[-\left(\frac{x - \chi(z)}{w(z)} \right)^2 + i\phi(z) \right]. \quad (\text{式 3-1})$$

パラメータが実数の場合は $\chi(z)$ がビームの中心位置で、 $|\psi(x, z)|^2$ が光の強度分布を表すので、中心 $\chi(z)$ から $w(z)$ だけ離れた位置でピーク値に対して e^{-2} 倍の強度になるフィールド半径を与える。Gauss 分布の運動を考えるためには、このあと記述するとおり、パラメータを複素数の範囲で考える必要がある。パラメータ $w(z)$ が複素数とすると、フィールド半径

は x^2 の係数の実部の平方根で $\text{Re}(w(z)^{-2})^{-1/2}$ となる。フィールド径という用語は直径と半径で区別が付きにくいので本論ではフィールド半径と呼ぶことにする。ビームの中心位置は $\text{Re} \chi(z)$ となる。次に、光の伝搬を表す方程式を考える。2 乗分布導波路として第 2 章で導いた発展方程式(式 2-2)において屈折率分布を与える比屈折率差 Δ が x の 2 乗となるものを考えて

$$i \frac{\partial}{\partial z} \psi = (K+V) \psi \quad \left(K = -\frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2, V = \frac{2}{\beta w_e(z)^4} (x - \xi(z))^2 \right) \quad (\text{式 3-2})$$

とする。 z を固定したときに、右辺の基底モードの光の分布は Gauss 分布となり規格化定数

を除いて $\exp \left[-\left(\frac{x - \xi(z)}{w_e(z)} \right)^2 \right]$ となる。 $\xi(z)$ は屈折率分布の中心位置を表し、 $w_e(z)$ は基底状態の Gauss 分布の広がり幅（強度がピーク値に対して $1/e^2$ となる位置）、すなわちフィールド半径に対応している。基底モードに対しては光が集中している領域となり導波路幅に対応すると考えられるので、以降、 $w_e(z)$ を 2 乗分布導波路の実効導波路幅（省略可能な場合は単に導波路幅）と呼ぶことにする。これらのパラメータ $\xi(z)$ および $w_e(z)$ は屈折率分布として与えられるものであるから、増幅や減衰がない系であれば、すべて実数であることが要請される。屈折率分布の広がり = 実効導波路幅を基底状態の Gauss 分布のフィールド半径 $w_e(z)$ で記述する必要はないが、Gauss 分布のフィールド半径 $w_e(z)$ を用いることで、この後に導出するパラメータの方程式等で、光のフィールドの Gauss 分布のフィールド半径 $w(z)$ と同じ次元の項同士で比較が容易になり、その結果、解釈が容易になる。なお、式 3-2 の x は 1 次元の数であるが高次元の場合も同様の議論が可能である。高次元の場合については、Appendix A.2 に記載する。

次に、式 3-1 の Gauss 分布が式 3-2 の発展方程式の解であるための条件を求める。解であるためには、式 3-1 を式 3-2 に代入して、両辺の x の係数が一致する必要がある。そこで、式 3-1 を式 3-2 に代入して、両辺の x の係数を比較すると、下記の式が得られる。

$$x^2 \text{の係数から } \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{w^2} = \frac{2}{i\beta} \left(\frac{1}{w^4} - \frac{1}{w_e^4} \right) \quad (\text{式 3-3})$$

$$x^1 \text{の係数から } \frac{\partial}{\partial z} \chi = \frac{2}{i\beta} \frac{w^2}{w_e^4} (\chi - \xi) \quad (\text{式 3-4})$$

$$x^0 \text{の係数から } \frac{\partial}{\partial z} \phi = \frac{-1}{\beta w_e^4} \left(\text{Re} \frac{w_e^4}{w^2} + i \frac{1}{2} \text{Re} w^2 + (\chi - \xi)^2 \right) \quad (\text{式 3-5})$$

これらの式を用いた光回路の設計（2 乗分布導波路のパラメータの決定）の例を示す前に、これらの式から直接導かれることについて下記にまとめる：

- (1) 式 3-3 からフィールド半径の初期値が $w(0)=w_e$ で w_e が定数であれば、フィールド半径の式の右辺は 0 となり $w(z)=w_e$ となる。すなわち固有モードのフィールド半径は保たれる。式 3-4 から中心位置 $\chi(z)$ についても同様のことが言える。
- (2) フィールド半径 $w(z)$ と中心位置 $\chi(z)$ は一般には複素数値になる。式 3-1 の Gauss 分

布において、指数関数の中 $-\left(\frac{x-\chi(z)}{w(z)}\right)^2 + i\phi(z)$ の位置 x の係数に着目すると各パラメータの虚部を次のように解釈できる。フィールド半径 $w(z)$ は式 3-1 の指数関数の式

において $\left(\frac{x-\chi(z)}{w(z)}\right)^2 = \text{Re} \frac{1}{w(z)^2} (x-\chi(z))^2 + i \text{Im} \frac{1}{w(z)^2} (x-\chi(z))^2$ とあらわされるので、

$\left(\text{Re} \frac{1}{w(z)^2}\right)^{-1/2}$ が真のフィールド半径、 $\left(\text{Im} \frac{1}{w(z)^2}\right)^{1/2}$ が近軸光線近似の範囲で波面（同

一位相面)の曲率を与える。中心位置 $\chi(z)$ の虚部 $\text{Im} \chi(z)$ は位置 x の 1 次の係数を与えることから位相の勾配、すなわち、波面の傾きを与える。

- (3) フィールド半径 $w(z)$ の式 3-3 と中心位置 $\chi(z)$ の式 3-4 において、2 乗分布導波路の導波路幅 w_e と中心位置 ξ を定数とすると、その値を中心に振動する式となる。式 3-4 は中心位置 $\chi(z)$ の線形微分方程式で、その形から明らか。式 3-3 の微分方程式を解いて、

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{w_e^2} \frac{(w_e^2 + w_0^2) \exp\left(i \frac{4z}{\beta w_e^2}\right) + (w_e^2 - w_0^2)}{(w_e^2 + w_0^2) \exp\left(i \frac{4z}{\beta w_e^2}\right) - (w_e^2 - w_0^2)} \quad (\text{式 3-6})$$

が得られる。ここで、 w_0 は $w(z=0)$ の値としている。この解から周期 $\frac{\pi\beta w_e^2}{2}$ で振動することがわかる。この式は屈折率分布レンズ (GRIN Lens : Graded-Index Lens) のピッチとよばれる振動周期を再現している。

- (4) 図 3-2(b) に示すように、 $w_e \rightarrow \infty$ のとき自由空間の屈折率分布となる。このとき式 3-

6 より $\frac{1}{w^2} = \frac{1}{w_0^2 + i2z/\beta}$ となる。これは Gauss 分布の自由空間の伝搬に相当する。

- (5) 図 3-2(c) に示すように、 ξ/w_e^4 を一定値に保ちながら $w_e \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \infty$ の場合を考える

と $\Delta(x, z) = qx + \text{const.}$ となる。ここで $q = \frac{4\xi}{\beta w_e^4}$ となる定数である。const. は z を固定

したときに x に依存しない位相を与える項で無視する。このとき中心位置 $\chi(z)$ の方

程式は(式 3-4)より $\frac{\partial}{\partial z} \chi = \frac{qw^2}{i2} = -i \frac{q}{2} (w_0^2 + i2z/\beta)$ となるので $\chi(z) = -i \frac{qw_0^2}{2} z + \frac{qz^2}{2\beta}$

が得られる。 χ_0 は $\chi(z=0)$ の値である。 $\frac{qz^2}{2\beta}$ がビームの中心位置で、 z が大きくな

る、すなわち光が伝搬するにつれて屈折率の高い方にビームの中心が移動していく

ともに位相の勾配が発生する様子がわかる。

伝搬の方程式 $i \frac{\partial}{\partial z} \psi = (K+V)\psi \left(K = -\frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2, V = -\beta \Delta(x, z) = -\frac{2}{\beta w_e(z)^4} (x - \xi(z))^2 \right)$

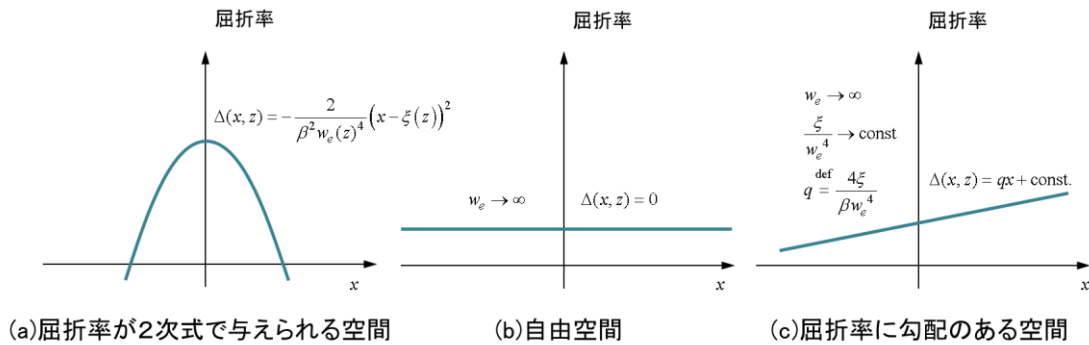


図 3-2 2乗分布導波路で表現可能な屈折率分布

次に、この方程式が正しい発展方程式となっているかを数値計算との比較で確認した。図 3-2 は伝搬方向に本検討のためにあたえた複雑に変化する屈折率分布に対して、数値計算 (BPM) により求めたフィールドの振幅と、式 3-3~5 を用いてパラメータを数値計算して、そのパラメータを Gauss 分布に代入して得られたフィールドの振幅を並べてプロットしたものである。計算に用いたパラメータは図中に記した。数値計算と式 3-3~5 から得られた結果との差は図 3-2(c) のカラーマップの数値範囲が示すとおり、振幅の最大値の 1/50 以下程度の差である。この差は振幅の差であるから光の強度で考えると十分に一致していると言える。なお、図 3-2(c) の左上端に大きめの差が見られる。この差は、パラメータの方程式を用いた計算方法では横方向の計算領域というものがそもそもなく、境界条件の処理に起因する誤差が存在しないのに対して、本計算の BPM においては標準的な Perfect Matching Layer と呼ばれる無反射吸収条件を適用しているために発生する誤差があり、その差分が見えるためである。また光が集中している部分での誤差が大きいことも確認できる。BPM ではその計算式は (式 2-6) で表され Cayley 変換の式となっていて、波数が小さい領域で良い近似計算となっているため光の集中があり大きな波数の光が発生する場所では精度劣化が発生すると考えられる。これに対して、パラメータの方程式を用いた計算方法はそのような

影響がないため、パラメータの方程式を用いた計算方法の方がより正確な値となって、その差が見えていると考えられる。

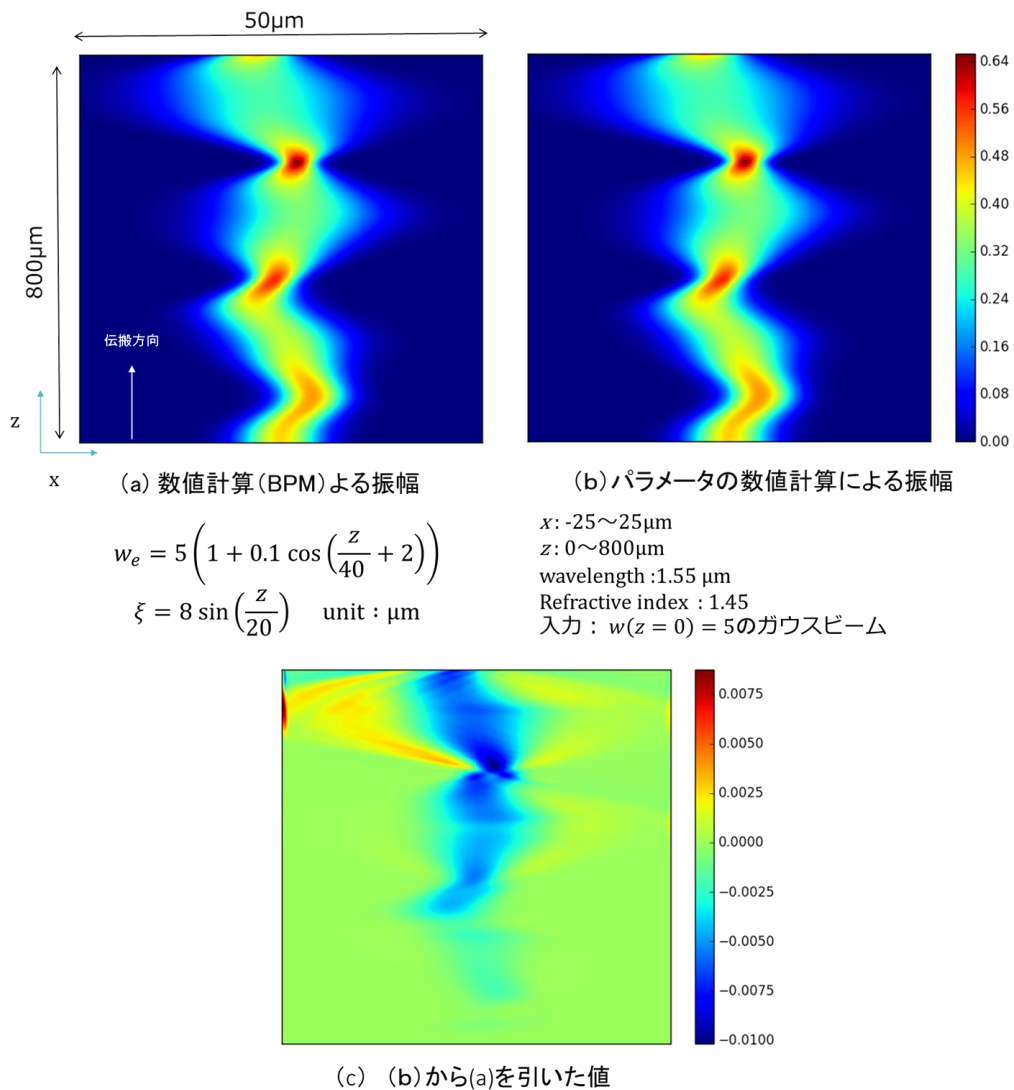


図 3-2 数値計算とパラメータの発展方程式よりえられた Gauss 分布の比較

数値計算の観点からは、式 3-3~5 は 3 変数の連立微分方程式であり、極めて少ない計算量で計算が可能となる。本章の最後に示すように、フィールドを Gauss 分布に分解して計算する (Gauss 分布の重ね合わせ) 等のより複雑な計算を行うことも可能であり、大規模な領域での計算が求められる場合は、本計算方法は極めて効率の良い計算方法となっている。また、

Gauss 分布の運動自体を計算していることから、解釈しやすいというメリットが考えられる。

次節では式 3-3~5 を具体的に設計に活かす例を示す。

3-2. 導波路パラメータ制御法と応用例

本章における光回路の設計とは式 3-2 の屈折率分布のパラメータ $\xi(z)$ と $w_e(z)$ を決めることに他ならない。式 3-3~5 を、Gauss 分布のパラメータ $\chi(z)$ と $w(z)$ とを与えて、屈折率分布のパラメータ $\xi(z)$ と $w_e(z)$ を決める方程式と考えて、それらを用いて光回路を決定するのが導波路パラメータ制御法である。屈折率分布のパラメータ $\xi(z)$ と $w_e(z)$ とは吸収や増幅の無い媒質であれば実数、Gauss 分布のパラメータ $\chi(z)$ と $w(z)$ は複素数であることに注意して、式 3-3、3-4 の方程式は実数部分と虚数部分に分けると、

$$\text{(式 3-3) から} \quad \frac{1}{w_e^4} = \left(\operatorname{Re} \frac{1}{w^2} \right)^2 - \left(\operatorname{Im} \frac{1}{w^2} \right)^2 + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Im} \frac{1}{w^2} \quad \text{(式 3-7)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \frac{1}{w^2} = \frac{4}{\beta} \operatorname{Re} \frac{1}{w^2} \operatorname{Im} \frac{1}{w^2} \quad \text{(式 3-8)}$$

$$\text{(式 3-4) から} \quad \xi = \operatorname{Re} \chi + \frac{\beta}{2} \frac{w_e^4}{w^2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Im} \chi \quad \text{(式 3-9)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \chi = \frac{2}{\beta} \frac{w^2}{w_e^4} \operatorname{Im} \chi \quad \text{(式 3-10)}$$

となる。式 3-7、3-9 は、Gauss 分布のパラメータ $w(z)$ と $\chi(z)$ とを与えて屈折率分布のパラメータ $\xi(z)$ と $w_e(z)$ とを決める式になっているが、Gauss 分布のパラメータ $w(z)$ と $\chi(z)$ は制限を受けて虚部と実部がそれぞれ式 3-8、3-10 を満たしていることが必要となる。逆にいうと Gauss 分布のパラメータはこの章の 3-1(2) で示したようにフィールドの広がりや波面の曲率、中心位置や位相の傾きに対応するので、光のフィールドとして実現したい状態に応じて、式 3-8、3-10 を設定して、それを満たすように $w(z)$ と $\chi(z)$ を設定することができれば光回路を決定できることがわかる。以下にこれらの式を用いた光回路の設計例を示す。

(1) スポットサイズ変換

式 3-7、式 3-8 を用いて光回路を設計する例として、フィールド半径を変換するスポットサイズ変換回路の設計を考えてみる。スポットサイズ変換は異なる導波路構造の基底モード同士を光学結合させる際に光結合損失を低減するために頻繁に用いられる導波路構造である。光学結合は伝搬方向に対して垂直方向の断面上での光のフィールド同士の重なり積分で与えられ、フィールドの形すなわち光の分布が一致するように変換するのがスポットサイズ変換回路の機能である。スポットサイズ変換と呼ばれるのは、導波路構造を伝搬する光は Gauss 分布のように単一ピークのスポットを形成しており、そのサイズ (Gauss 分布ではフィールド半径) の変換を行うので、スポットサイズ変換と呼ばれている。スポットサイズ変換を行うためには、様々な構造が提案されているが、急激な変換は、高次のモード励振を生じるため、所望のビーム形状にならずに大きな損失を発生させてしまう原因になる。そこでゆっくりと変化させる、いわゆる他のモード励振を抑制するという意味で断熱的にパラメータを変化させてスポットサイズ変換することが多い。ゆっくりとした変化で他のモードを十分に抑制することが可能となるが、その場合、光回路サイズが大きくなるというデメリットが生じる。短い距離で所望のスポットサイズ変換を実現できることが望ましく、どのようにスポットサイズ変換回路の形状を変化させるべきかが設計における重要な課題である。断熱的な変化を使う方法では、高次モードの励振量の許容量を決めて、その範囲でゆっくり変化させる方法がある [23, 24]。一方、高次モードが励振しても高次モードをうまく制御して最終的に基底モードのみになるような方法も考えられる。ここでは後者の高次モードを励振することになるが、式 3-7、式 3-8 を使って光のフィールドを制御して最終的に基底モードのみになる方法を考える。ビーム半径に対応する関数を $r(z)$ とすると $\text{Re} \frac{1}{w(z)^2} = \frac{1}{r(z)^2}$ となる。このとき式 3-8 から $\text{Im} \frac{1}{w^2} = -\frac{\beta}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z}$ が得られる。スポットサイズ変換が基底モードから異なるフィールド径の基底モードへの変換であると考えると、

$\text{Im} \frac{1}{w^2}$ は波面の曲率に対応するので、スポットサイズ変換器の入力位置 $z=0$ と出力位置

$z=z_{\text{out}}$ で $\text{Im} \frac{1}{w^2}$ は 0 となるべきで、結果、 $\frac{\partial r}{\partial z}(z=0) = \frac{\partial r}{\partial z}(z=z_{\text{out}}) = 0$ であることがわかる。

ここで、波面の位相が曲率を持つと基底状態になれないのは、実部と虚部で分けると縮退した異なるモードが存在することになるため基底モードとはなれないからである。

$r(z=z_{\text{out}}) = \alpha r(z=0)$ という変換(変換倍率 α)になっているとすると、たとえば、次のような関数 $r_{\text{target}}(z)$ が考えられる:

$$\begin{aligned} r_{\text{target}}(z) &= r(0) \exp \left[(\ln \alpha) \frac{\int_0^z z'^2 (z_{\text{out}} - z')^2 dz'}{\int_0^{z_{\text{out}}} z'^2 (z_{\text{out}} - z')^2 dz'} \right] \\ &= r(0) \exp \left[(\ln \alpha) \left(10 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^3 - 15 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^4 + 6 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^5 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{式 3-11})$$

候補となる関数はこれに限らないが、次の理由でこの関数を選んでいる。 $\text{Im} \frac{1}{w^2} = -\frac{\beta}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z}$ が

多項式になるようするために指数関数を選び、さらに指数関数の中の被積分関数が積分区間の両端 $z=0, z_{\text{out}}$ で二階微分まで 0 で非負関数として、さらに積分を z の関数として $z=0$

で 0、 $z=z_{\text{out}}$ で 1 となるような多項式で規格化したものとして式 3-11 を選んだ。

$r(z) \equiv r_{\text{target}}(z)$ を式 3-7 に代入して実効導波路幅 w_e を求める式

$$\frac{1}{w_e^4} = \frac{1}{r^4} - \frac{\beta^2}{4} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \quad (\text{式 3-12})$$

が得られる。図 3-3 に式 3-12, 式 3-11 に基づいて実効導波路幅 w_e を数値計算で求めた結

果を示す。計算のパラメータは図中に示した。比較のため、式 3-7 で $\text{Im} \frac{1}{w^2}$ に関する項を

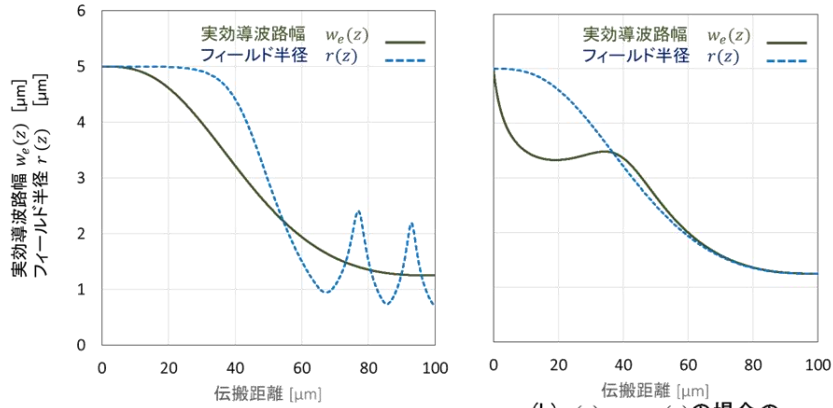
無視した場合について計算したのも併せて示す。フィールドの半径の初期値を $r(z=0)$

$= 5\mu\text{m}$, $100\mu\text{m}$ 先の $z=z_{\text{out}}$ で $r(z=z_{\text{out}}) = 1.25\mu\text{m}$ となるスポットサイズ変換(変換倍率 $\alpha = 1/4$)

を目標とした。図 3-3(a)では実効導波路幅 $w_e(z)$ をターゲットとするビーム半径の関数

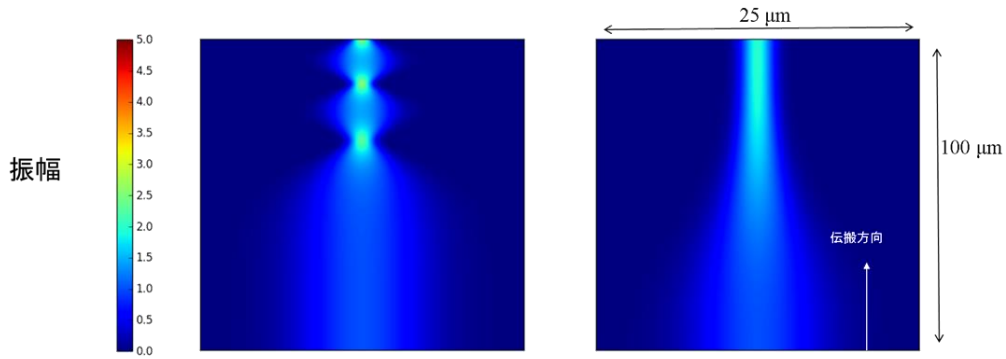
$r_{\text{target}}(z)$ と一致させた。その結果、破線で示したビーム半径 $r(z)$ は小さくなっているが、変化が大きすぎるため振動が発生していることがわかる。

計算領域 $x = -12.5 \sim 12.5 \mu\text{m}$ $z = 0 \sim 100 \mu\text{m}$
 波長: $1.55 \mu\text{m}$, 参照屈折率: 1.45
 入力: $r(z=0) = 5$ のガウスビーム, 計算方法: BPM



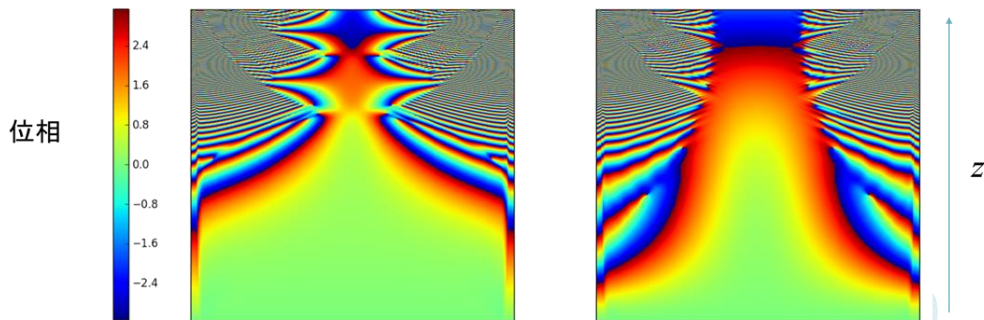
(a) $w_e(z) \equiv r_{\text{target}}(z)$ の場合の
パラメータ変化

(b) $r(z) \equiv r_{\text{target}}(z)$ の場合の
パラメータ変化



(c) $w_e(z) \equiv r_{\text{target}}(z)$ の場合の振幅

(d) $r(z) \equiv r_{\text{target}}(z)$ の場合の振幅



(e) $w_e(z) \equiv r_{\text{target}}(z)$ の場合の位相

(f) $r(z) \equiv r_{\text{target}}(z)$ の場合の位相

図 3-3 実効導波路幅 $w_e(z)$ とフィールド半径 $r(z)$ のパラメータ変化とフィールドの伝搬の様子

図 3-3(b)では $r(z) = \left(\text{Re}(w(z)^{-2})\right)^{1/2}$ をターゲットとするビーム半径の関数 $r_{\text{target}}(z)$ と一致させて式 3-11 から実効導波路幅 $w_e(z)$ を求めた場合をプロットしている。実効導波路幅 $w_e(z)$ は振動しており、かつ、 $z=0$ で急速に減少していることがわかる。このプロットではフィールド半径 $r(z)$ を与えているので正しくスポットサイズ変換がなされているか確認できない。そこで、図 3-3 の実効導波路幅 $w_e(z)$ の屈折率分布を使って BPM による数値計算でフィールドの伝搬の様子を確認したものが図 3-3(c)～(e)である。

図 3-3(c)が実効導波路幅 $w_e(z)$ をターゲットとするビーム半径の関数 $r_{\text{target}}(z)$ と一致させた場合で、確かに振幅が振動していることがわかる。それに対して図 3-3(d)では $\text{Re}(w(z)^2)^{-1/2} = r(z)$ として (式 3-11) から求めた実効導波路幅 $w_e(z)$ をもつ屈折率分布を伝搬させた場合はフィールドの広がり単調に狭くなっていることがわかる。これは図 3-3(b)の破線で表した期待通りのフィールド半径の変化をしており、良好なスポットサイズ変換器が設計できていることがわかる。

(2) S 字曲げ回路

次に、Gauss 分布の中心位置と導波路の中心位置に関する式 3-9 と式 3-10 から設計できる屈折率分布の例として S 字曲げ回路を考える。S 字曲げ回路は入力位置に対して、進行方向に対して横に導波路の出射位置をずらしたい場合や方向性結合器など光導波路同士を接近させたい場合など、実際の光回路で頻繁に使われる。実際の回路においては曲線の導波路と直線の導波路が混在することになるため、曲げ導波路と直線導波路を「上手く」繋ぐ必要がある。その必要性をみるために、よく使われる曲率半径が一定の曲げ導波路と直線導波路の接続について見てみる。まず、式 3-10、式 3-10 から光導波路の中心位置 ξ を光のフィールドの中心位置 $\chi_c \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re} \chi$ で表すと

$$\xi = \chi_c + \frac{\beta^2 w_e^4}{4} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \chi_c = \chi_c + \frac{\beta^2}{4R} \left(\frac{w_e^4}{w^2} \right)^2 \quad (\text{式 3-13})$$

が得られる。 χ_c は導波路の中心であるから、光のフィールドの中心位置 ξ は右辺の第2項のぶんだけずれること意味しており、 $\frac{\beta^2 w_e^4}{4} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \chi_c$ はオフセットと呼ばれる。 $\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \chi_c$ は接線が z 軸方向に接する曲線の曲率を表していて、近軸光線近似では、光は z 軸方向に接した状態なので、 $\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \chi_c$ が曲率を与える。曲率半径 R を用いて $\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \chi_c = \frac{1}{R}$ とすると1行目の右辺の式が得られる。これは例えば、直線導波路と曲げ導波路を接続する際にフィールドの重なりを一致させるためには図 3-4 のように導波路をずらす必要があることを意味している。図 3-4 はオフセットの有無によるビームの伝搬違いを示す例で、図中のパラメータでフィールド半径 $5\mu\text{m}$ の Gauss 分布を、一定曲率 ($R = 1000\mu\text{m}$) の曲線の 2 乗分布導波路を伝搬させたときの様子を示している。直線部分の伝搬はオフセットの有無に関わらず共通であり、基底モードの伝搬が示されるだけなので直線部分は表示せずに曲線の導波路領域のみを示している。図 3-4(a) のオフセット無しの場合は狙いである曲率半径 $1000\mu\text{m}$ の曲線から、大きく逸脱してしまうのに対して、式 3-13 の 1 行目の式からきまるオフセットだけシフトさせた導波路に対しては狙い通りの位置 (中心位置として期待する中心位置、すなわち、 χ_c に沿った位置) を光のフィールドが伝搬していることがわかる。回路の形状としてはどちらも曲率半径一定の円弧で、曲率半径がオフセット分だけ異なる。なお、このオフセットの値はフィールド半径と同等の大きさであり、実際に使われるようなパラメータではない。フィールド半径 $5\mu\text{m}$ というのは通信用のシングルモードファイバのモードフィールド半径と同等であり、通信用のシングルモードファイバで伝搬損失等に影響しない曲率半径は 20mm とされており、この値は図 3-4 の計算の曲率半径の 20 倍となっている。通信用のシングルモードファイバと同じ曲率半径を 20mm とすれば、オフセット量は 20 分の 1 の $0.27\mu\text{m}$ でよくな

る。実際の石英の光導波路でも、フィールド半径に対して十分小さなオフセット量になるような曲率半径で回路が作られている。

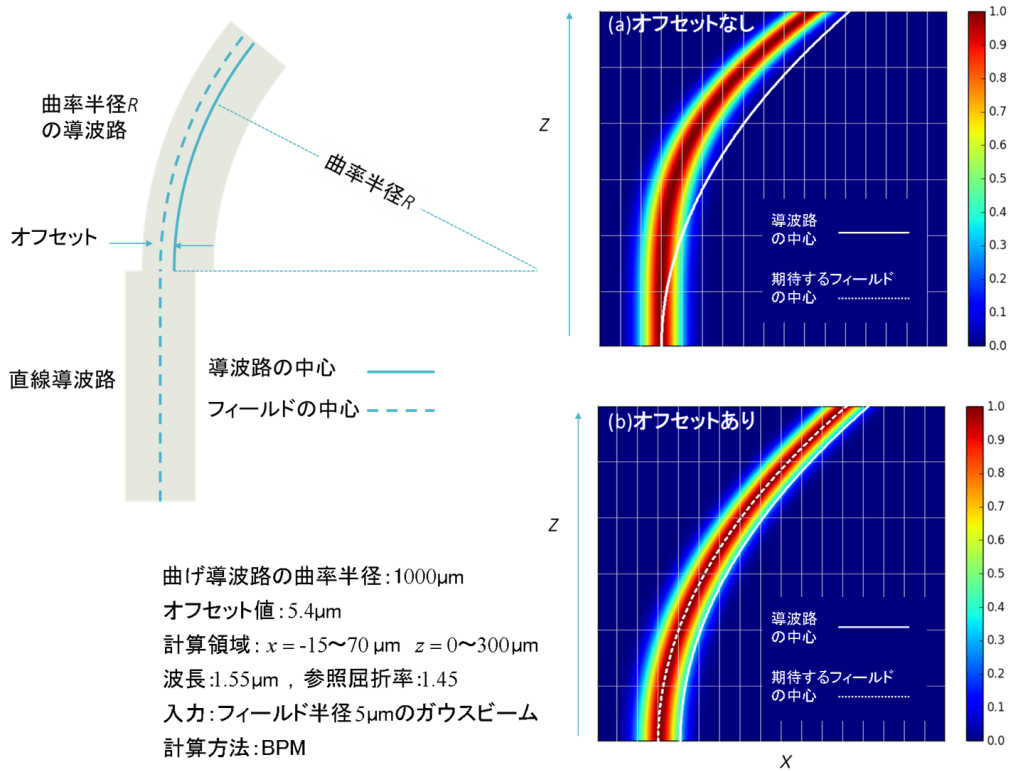


図 3-4 光導波路のオフセットとオフセットの有無によるビーム伝搬の違いの例

以上の例に示したように、一定の曲率半径の光導波路を用いて光回路を設計するのが一般的である。しかし、式 3-13 は任意の曲率半径に対応しているので、式 3-13 を用いることで伝搬方向に曲率半径が変化するような光のフィールドの位置でも制御することができる。そのような例として曲率半径が伝搬方向に変化する、すなわち、オフセットを連続的に変化させる S 字曲げ回路を求めてみる。簡単のため、実効導波路幅 w_e を一定として、式 3-9 から $w(z) \equiv w_e$ とした Gauss 分布の中心位置 $\chi_c(z)$ を

$$\chi_c(z) = \text{Re } \chi(z) = \chi_0 + (\chi_{\text{out}} - \chi_0) \left\{ 10 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^3 - 15 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^4 + 6 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^5 \right\} \quad (\text{式 3-14})$$

とおく。このパラメータで規定される光回路は伝搬方向の入力位置 $z=0$ と出力位置 $z=z_{\text{out}}$ で $\chi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re } \chi(z=0)$, $\chi_{\text{out}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re } \chi(z=z_{\text{out}})$ として、入力と出力とをつなぐ S 字曲げ回路になっている。{} の中が z の多項式となっているが、この式は(式 3-11)の指数関数の中の式を導くときに用いた、 $z=0$ と $z=z_{\text{out}}$ で、それぞれ、値 0 と 1 をとり、2 階微分まで 0 となるなめらかな単調増加関数をととなっている。これを(式 3-13)に代入すると 屈折率分布の中心位置 (導波路の中心位置) ξ が

$$\xi = \chi_c + \frac{\beta^2 w_e^4}{4} (\chi_{\text{out}} - \chi_0) 60 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right) \left(1 - 3 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right) + 2 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{z_{\text{out}}} \right)^2 \quad (\text{式 3-15})$$

と与えられる。式 3-15 (オフセット有) の場合と $\xi = \chi_c$ (すなわちオフセット無) の場合とで数値計算により比較を行った (図 3-5, 図 3-6)。オフセット量は $\frac{\beta^2 w_e^4}{4R(z)}$ は $w(z) \equiv w_e = \text{一定}$ として w_e に依存するので $w_e = 1\mu\text{m}, 2\mu\text{m}, 4\mu\text{m}$ の場合について計算を行った。曲率 $R(z)$ は式 3-14 の z の 2 階微分で近似することができ

$$\frac{1}{R(z)} \simeq (\chi_{\text{out}} - \chi_0) 60 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right) \left(1 - 3 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right) + 2 \left(\frac{z}{z_{\text{out}}} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{z_{\text{out}}} \right)^2$$

として式 3-15 の右辺第 2 項に反映されている。回路としては S 字に光を曲げて $100\mu\text{m}$ 先で $30\mu\text{m}$ ずらすものである。図中に、屈折率分布の中心と期待する光のフィールドの中心を白の実線と破線で示した。期待する光のフィールドの中心は $w_e = 1\mu\text{m}, 2\mu\text{m}, 4\mu\text{m}$ やオフセットの有無に関係しないのですべて同一のものである。オフセットが無い場合は屈折率分布の中心もこれに一致する。図 3-5 は振幅をプロットしたものである。 $w_e = 1\mu\text{m}$ のときは式 3-2 の $V = \frac{2}{\beta w_e(z)^4} (x - \xi(z))^2$ より、中心と $x = w_e$ のときの比屈折率差が 5.8%相当となり、閉じ込めが強い光導波路になっている。オフセット量の式 $\frac{\beta^2 w_e^4}{4R(z)}$ からわかるように、 w_e の 4 乗に比例し、この場合 $0.16\mu\text{m}$ 程度で、オフセットの有無による光のフィールドの位置の差はほ

とんどない。図 3-6 に位相をプロットしているが、 $w_e = 1 \mu\text{m}$ でオフセットなしの場合の出力側位相が横方向 x に対して傾斜していることから、出力側に直線導波路を接続した場合、光の中心位置が振動することが予想される。オフセットがある場合はフィールドの周囲で横方向に同一の位相となっており、出力側に想定する直線導波路の固有状態に近い状態が実現されている。 $w_e = 2 \mu\text{m}, 4 \mu\text{m}$ の場合は、オフセットの値は非常に大きくなり、特に $w_e = 4 \mu\text{m}$ の場合は $40 \mu\text{m}$ を超える値になり、屈折率分布の中心と光のフィールドの中心の位置が大きくずれていることが確認できる。このような状況でありながら、オフセットありの場合は式 3-14 で指定される $\chi_c(z)$ 位置に沿って光のフィールドの中心が移動していることがわかる。このことは図 3-6 の位相をみても確認できる。オフセットありの場合、出力において横方向に位相が一致しており、出力側に想定する直線導波路の固有状態に近い状態が実現されている。一方、オフセットなしの場合は、屈折率分布の中心の位置が適切でないために式 3-14 で指定される $\chi_c(z)$ に沿って曲がることができずに逸脱してしまっていることが確認できる。さらに、図 3-6 をみると、 $w_e = 2 \mu\text{m}, 4 \mu\text{m}$ のオフセットなしの場合は、出力部分で位相が横方向に振動している様子がみられ、固有状態となっていないことがわかる。

以上の例に示したとおり、発展方程式式 3-3~5 を、屈折率分布のパラメータについて逆に解くことにより、所望の光のフィールドのパラメータを指定して、屈折率分布のパラメータを決定することができる。ここでの 2 乗分布導波路は 2 乗関数で屈折率分布が無限に広がっていることを仮定しているので、光のフィールドの中心が屈折率分布の中心からずれた場合、ずれが大きいほど、強く引き戻される。そのため、光が放射されていくことはなく、常に解をえることができるが、現実的なコアサイズがある GI ファイバ等の導波路で近似できるような屈折率分布となっているとは限らない（コアサイズを逸脱して光のフィールドの中心が変動しているような設計が含まれる可能性がある）。より実用的な光導波路への応用を目指して、次節では、平面光波回路としてよく使われるステップインデックス型の導波

路に対して、2乗分布導波路をその近似と考えて、ここまでの知見を当てはめることを考えていく。

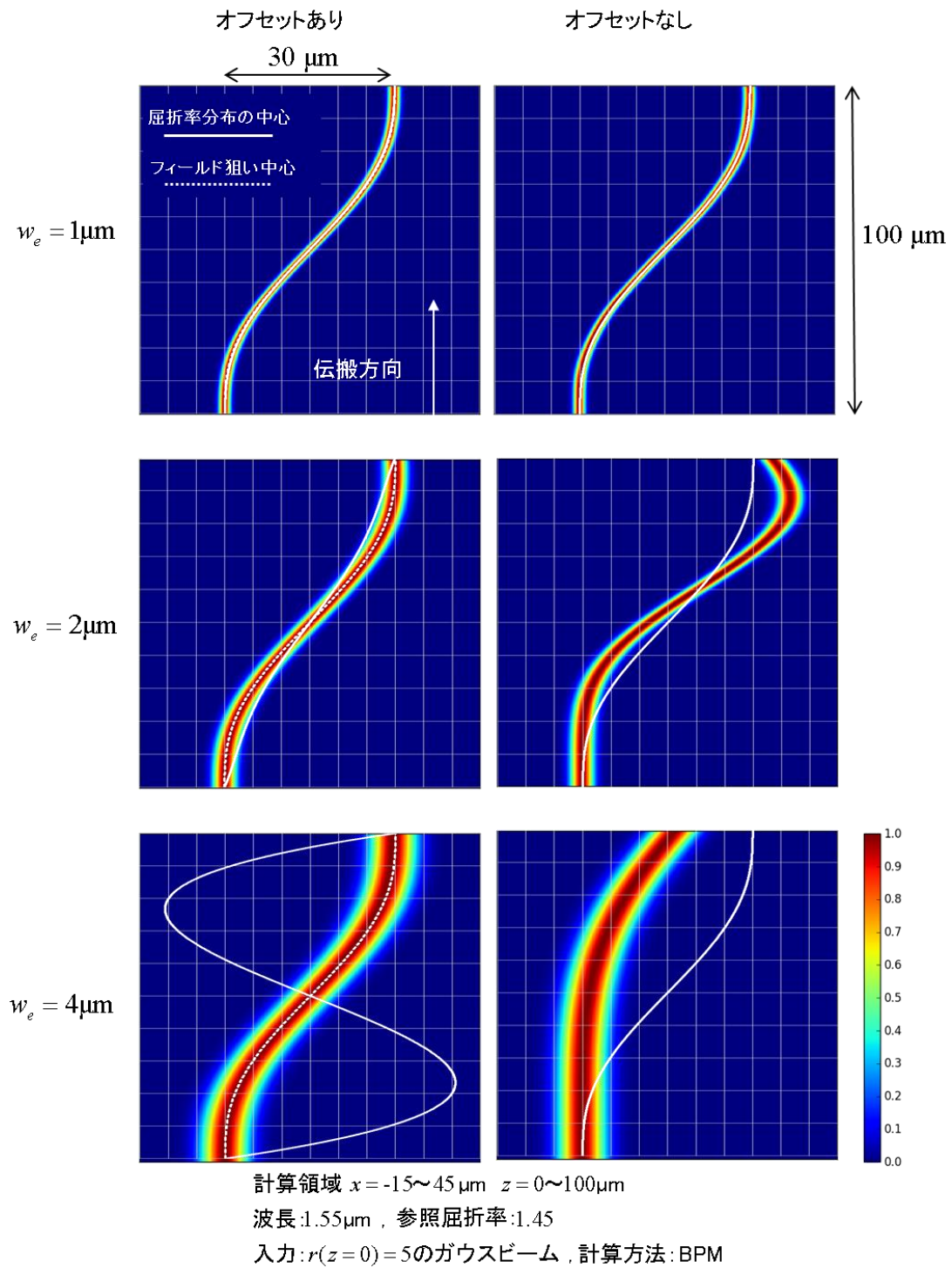


図 3-5 S 字曲げ回路のオフセットあり/無しによる違い (振幅)

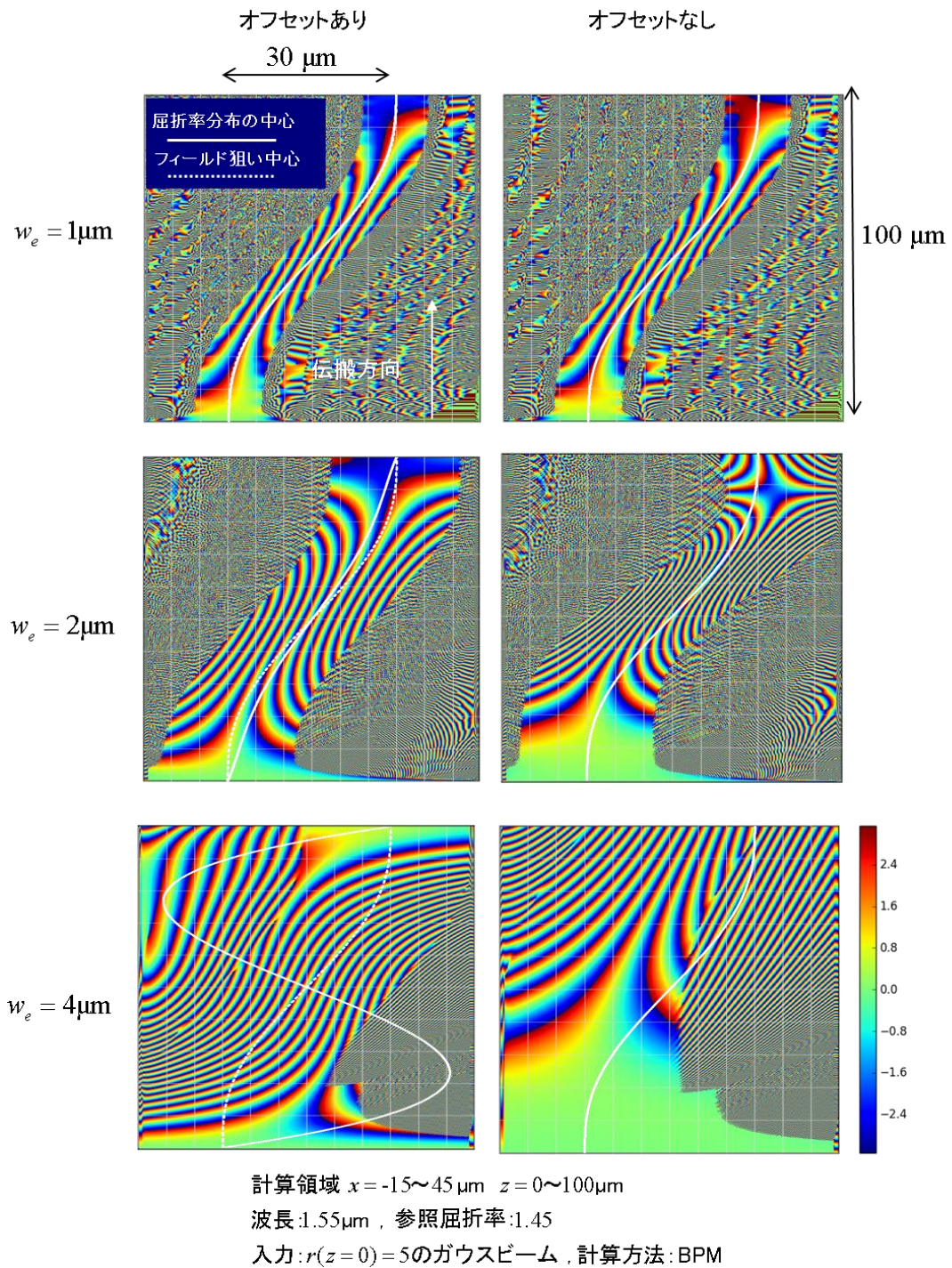


図 3-6 S 字曲げ回路のオフセットあり/無しによる違い (位相)

3-3. 導波路パラメータ制御法のシングルモード導波路への応用

シングルモードの光導波路は、モード分散やモード遷移等による信号劣化がなく、光通信等ではもっともよく使われる光導波路である。これまでの 2 乗分布導波路と Gauss 分布のパラメータに関する方程式と同様に、シングルモード導波路とシングルモードの光のフィールドのパラメータの方程式が得られれば、シングルモード導波路における光のフィールドの動きを指定して、光回路のパラメータを決めるような設計が可能となるものと期待できる。

そこでこの節では、シングルモード導波路として最も単純かつ一般的な構造であり、石英系平面光波回路でも用いられているステップインデックス型の屈折率プロファイルをもつシングルモード導波路（SI-SM 導波路：Step Index Single Mode 導波路）について導波路パラメータ制御法の適用可能性を検討する。

SI-SM 導波路の固有モードについては詳細に検討されている [13, 14]。ここではそのような厳密な基底モードでなく Gauss 分布で近似することを考える。近似法としては変分法を用いる。2 乗分布導波路の場合は (式 3-2) の発展方程式の右辺の固有状態が固有モードとなる。固有モードの固有値は、参照屈折率に対する伝搬定数 β との伝搬定数の差に対応しており、基底モードが最低値を取る。そこで、変分法では、パラメータを含む基底モードの候補（試行関数）を用いて、極小値を与えるパラメータを求め、そのパラメータのときの試行関数が基底状態を近似していると考え、方程式を

$$i \frac{\partial}{\partial z} \psi = (K + V) \psi \quad \left(K = -\frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2, V = -\beta \Delta(x, W) \right)$$
$$\Delta(x, W) = \begin{cases} \Delta & (|x| \leq W/2) \\ 0 & (|x| > W/2) \end{cases}$$

とする。SI-SM 導波路として比屈折率差 $\Delta(x,W)$ で矩形の屈折率分布を表す。 W が導波路幅で、これと変数 x すなわち伝搬方向に対して垂直な横方向の位置の中心位置が導波路のパラメータとなる。基底状態を近似するための試行関数を ψ_{trial} として

$$E_0(\psi_{\text{trial}}) \stackrel{\text{def}}{=} \int \psi_{\text{trial}}^* (K+V) \psi_{\text{trial}} dx$$

と置く。試行関数が基底モードならその固有値を与える。基底モードを Gauss 分布で近似するために $\psi_{\text{trial}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2/(\pi w^2)} e^{-(x/w)^2}$ とおく。この試行関数を ψ_{trial} のパラメータは w なので $E_0(\psi_{\text{trial}})$ を w の関数と考えると極小条件を求めると

$$\frac{\partial}{\partial w} E_0(w) = \frac{1}{\beta w^3} \left(-1 + \sqrt{2/\pi} \beta^2 W w \Delta e^{-(w/w)^2/2} \right) = 0$$

から

$$\sqrt{2/\pi} \beta^2 W w \Delta e^{-(w/w)^2/2} = 1 \quad (\text{式 3-16})$$

というパラメータ間の関係式が得られ、この式 3-16 を満たすようにパラメータが決められる。フィールド半径 w を決める例として、PLC で用いられる $\Delta=0.75\%$, $\lambda=1.55\mu\text{m}$ の場合の導波路幅 W とフィールド半径 w との関係を図 3-7 に示す。導波路幅 W が $2\mu\text{m}$ よりも小さいときはフィールド半径 w が広がっているのがわかる。これは屈折率の高いコアの領域が小さすぎると、その領域に閉じ込めるための波数が大きくなってしまうので、コアよりも光のフィールド半径 w が広がり、さらに、そのことによって、コアが与える実効的な屈折率が低下して、フィールド半径 w が急激に広がるというよく知られた現象である。式 3-16 はその現象も再現していることからわかるように有効な関係式であると考えられる。

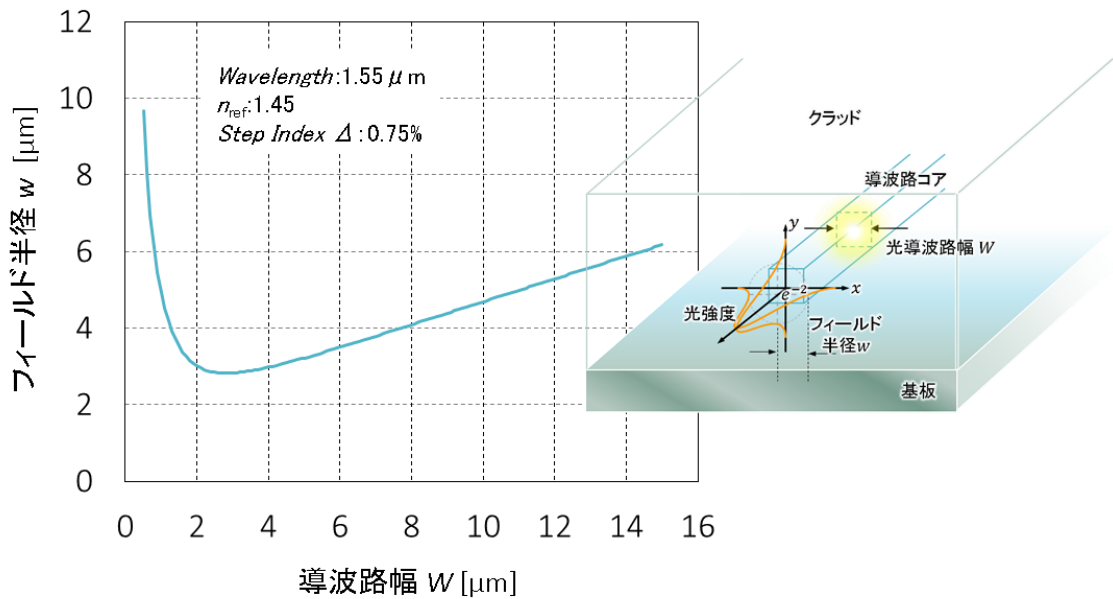


図 3-7 変分法より得られた導波路幅 W とフィールド半径 w との関係の例

この値をフィールド半径 w とした $\psi_{\text{trial}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2/(\pi w^2)} e^{-(x/w)^2}$ が基底状態を近似する Gauss 分布となる。2 乗分布導波路のパラメータのうち 2 乗分布の広がりを与えるパラメータ w_e は 2 乗分布導波路の基底状態のフィールド半径であったから

$$i \frac{\partial}{\partial z} \psi = (K + V) \psi \quad \left(K = -\frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2, V = \frac{2}{\beta w_e(z)^4} (x - \xi(z))^2 \right)$$

から

$$\beta \Delta(x - \xi, W) \sim \frac{2}{\beta w_e^4} (x - \xi)^2 \quad \text{ただし } \sqrt{2/\pi} \beta^2 W w_e \Delta e^{-(W/w_e)^2/2} = 1$$

を得る。あとは式 3-7~3-10 を当てはめて W, ξ を決めればよい。具体的な例を見ていく前に、このような近似が有効となる理由を考えてみる。2 乗分布導波路については固有モードが無限に存在するので、2 乗分布導波路で、シングルモードを与えるステップインデクス型の屈折率分布を近似するのが良い近似かどうかは議論が必要である。SI-SM 導波路はシングルモードなので高次の伝搬モードが存在しない。そのため、基底モード成分以外の成分は

伝搬しないはずである。パラメータを含む光のフィールドを与えて、パラメータがある値のときにフィールドが基底モードになっているとすると、そこからパラメータが外れると、光のフィールドは基底モード以外の成分を含むということになる。基底モード以外の成分で、放射しながら短い距離であれば SI-SM 導波路に沿って伝搬できる弱い共鳴状態が基底モードと干渉して光のフィールドに動きをもたらすことが期待できる。本当にそのようなことが起きるのか、定性的に解析的に示すとともに、数値計算により確認してみる。基底モード以外の成分で動きをもたらす成分を「ずれ」と呼ぶことにして、「ずれ」成分を定性的ではあるが解析的にみてるために、光のフィールドがパラメータで表されているとする。パラメータは、例えば、光のフィールドの広がりや中心位置である。一般にあるパラメータ q を考えてパラメータ q に対して Taylor 展開を行って、1 次までの近似として $\psi_{\text{trial}}(q+\delta q) \approx \psi_{\text{trial}}(q) + \delta q \frac{\partial}{\partial q} \psi_{\text{trial}}(q)$ が得られる。 $\frac{\partial}{\partial q} \psi_{\text{trial}}(q)$ が基底モードからの「ずれ」成分に相当する。 q の値が q_0 のとき $\psi_{\text{trial}}(q_0)$ が基底モードであるとする、変分式

$$E_0(\psi_{\text{trial}}(q)) \stackrel{\text{def}}{=} \int \psi_{\text{trial}}(q)^\dagger (K+V) \psi_{\text{trial}}(q) dx$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial q}(\psi_{\text{trial}}(q_0)) = \int \frac{\partial \psi_{\text{trial}}}{\partial q}(q_0)^\dagger (K+V) \psi_{\text{trial}}(q_0) dx \Big|_{q=q_0} + c.c. = 0$$

を満たす。 $\psi_{\text{trial}}(q_0)$ は基底モードだから、 $K+V$ の固有状態で固有値 $(K+V)\psi_{\text{trial}}(q_0) \approx E_0\psi_{\text{trial}}(q_0)$ となるので、この式は $\frac{\partial \psi_{\text{trial}}}{\partial q}(q_0)$ と $\psi_{\text{trial}}(q_0)$ とが直交していることを表している。基底モードからの「ずれ」成分 $\frac{\partial \psi_{\text{trial}}}{\partial q}(q_0)$ が基底状態 $\psi_{\text{trial}}(q_0)$ と異なる伝搬定数 $\Delta\beta$ で伝搬すると仮定すると、伝搬させることによって得られるフィールド $\psi_{\text{trial}}(z)$ は

$$\psi_{\text{trial}}(z) \approx \psi_{\text{trial}}(q) + e^{i\Delta\beta z} \delta q \frac{\partial}{\partial q} \psi_{\text{trial}}(q) \approx \psi_{\text{trial}}(q + e^{i\Delta\beta z} \delta q)$$

となる。したがって、パラメータ q が伝搬方向に $\text{Re} e^{i\Delta\beta z} \delta q$ で振動することになる。 $\frac{\partial}{\partial q} \psi_{\text{trial}}(q)$ は一般には共鳴した状態になるとは限らないが、このような振動がみられれば、

「ずれ」成分すなわち $\frac{\partial}{\partial q}\psi_{\text{trial}}(q)$ が短い距離であれば高次モードのように伝搬していると考えられる。図 3-8 は意図的に入力フィールドの幅と位置をずらした場合の SI-SM 導波路における光の伝搬の様子を示したものである。パラメータは、図中に示したもので、一般的な PLC の導波路パラメータである。フィールド径をずらした場合も中心位置をずらした場合の双方について、減衰しているものの、伝搬距離 1000 μm に渡って振動している様子が見られている。また、特に、式 3-2 の右辺の固有値問題で x が 1 次元の場合の固有状態は零点（ノード）の数が固有状態の次数に対応することが知られており、Gauss 分布のパラメータとして中心位置の微分からノードが 1 つの分布、振幅の微分からはノードが 2 の分布が得られるので、1 次モードに近い成分、2 次モードに近い成分が得られて、共鳴状態が伝搬方向に維持されやすい成分が多く含まれるものと考えられる。

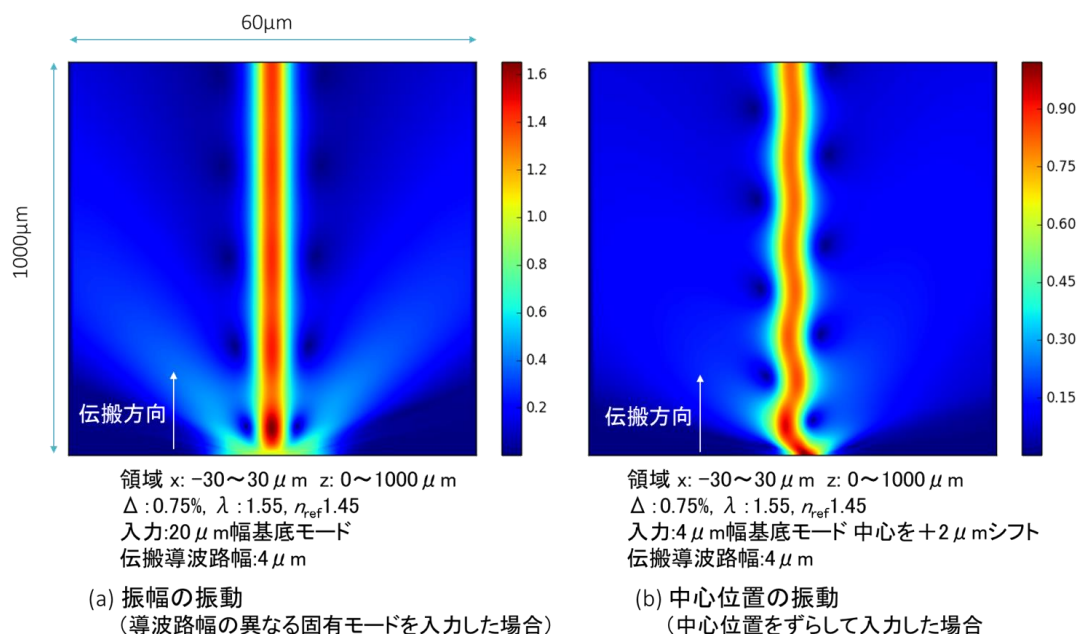


図 3-8 SI-SM 導波路の基底モードからずらした入力に対する伝搬の様子

以上のとおり、SI-SM 導波路において、伝搬モードを Gauss 分布で近似できること、また、伝搬モードがパラメータで表せるなら、パラメータ変化が変化し得ること、の 2 点を

示した。このことは、Gauss 分布と 2 乗分布導波路に関するパラメータ変化の方程式である(式 3-7)～(式 3-10)が近似的に適用可能であることを示唆している。そこで、以下では、2 乗分布導波路と同様に、S 字曲げ回路とスポットサイズ変換器を例として実際の適用可能性を見てみる。

(1) SI-SM 導波路のスポットサイズ変換

SI-SM 導波路において、スポットサイズ変換は、光回路中で様々な場面で用いられる。たとえば、分岐回路への接続のために 1 本の導波路を 2 本に分けるために 2 倍程度の幅への導波路幅拡大や、交差導波路での損失を防ぐために回折を抑制するための幅拡大、アレイ導波路光子[1]においてスラブ導波路への結合部分で効率や波長帯域を制御するための幅拡大などがある。スポットサイズ変換回路としては、構造や設計が簡単なため、光導波路幅が損失が発生しないように、なだらかな勾配で直線的に変化させるテーパ構造が用いられることが多い。図 3-9(a)は幅が広い方から狭い方に変換するテーパ構造光の回路における光のフィールドの伝搬計算したものである。逆向きに使えば幅を広げることにもできる。80 μm の回路長で 15 μm 幅の導波路から基底モードを入射して 3 μm 幅の導波路の基底モードに光結合させる回路を考える。その他のパラメータは図中に示した。白線の実線が導波路コアの側面の位置を示している。図 3-9(a)の導波路幅の変化はかなり急激で、出力近傍で光導波路から光がもれてしまっている。実際、この回路の出力と 3 μm 幅の導波路の基底モードの光結合を計算したものが、表 3-1 で、表 3-1 (a) に示すとおり 0.75dB の損失が発生している。この回路は本検討のために急激な変化をあえて与えているためこのような大きな損失となっている。実際の場合にはほぼ無視できる損失にするために、2 倍以上光回路長を長くする。例えば、テーパ回路の長さを 200 μm として同様の計算を行うと結合損失は約 0.005dB になる。しかし、長いテーパの回路は集積化の際の小型化を妨げる要因となるのでより小型で特性の良いものが求められる。そこで式 3-7、式 3-8 のパラメータの方程式を用いて、光回路

長を $80\mu\text{m}$ に固定したまま、特性改善を行う。フィールド半径を滑らかに変化させるため前節 3-2(1) のスポットサイズ変換で用いたのと同じ式 3-11 で与える。このフィールド半径 w に対してパラメータ間の関係式(式 3-16)から計算した導波路幅 W で光を伝搬させたものが図 3-9(b)である。

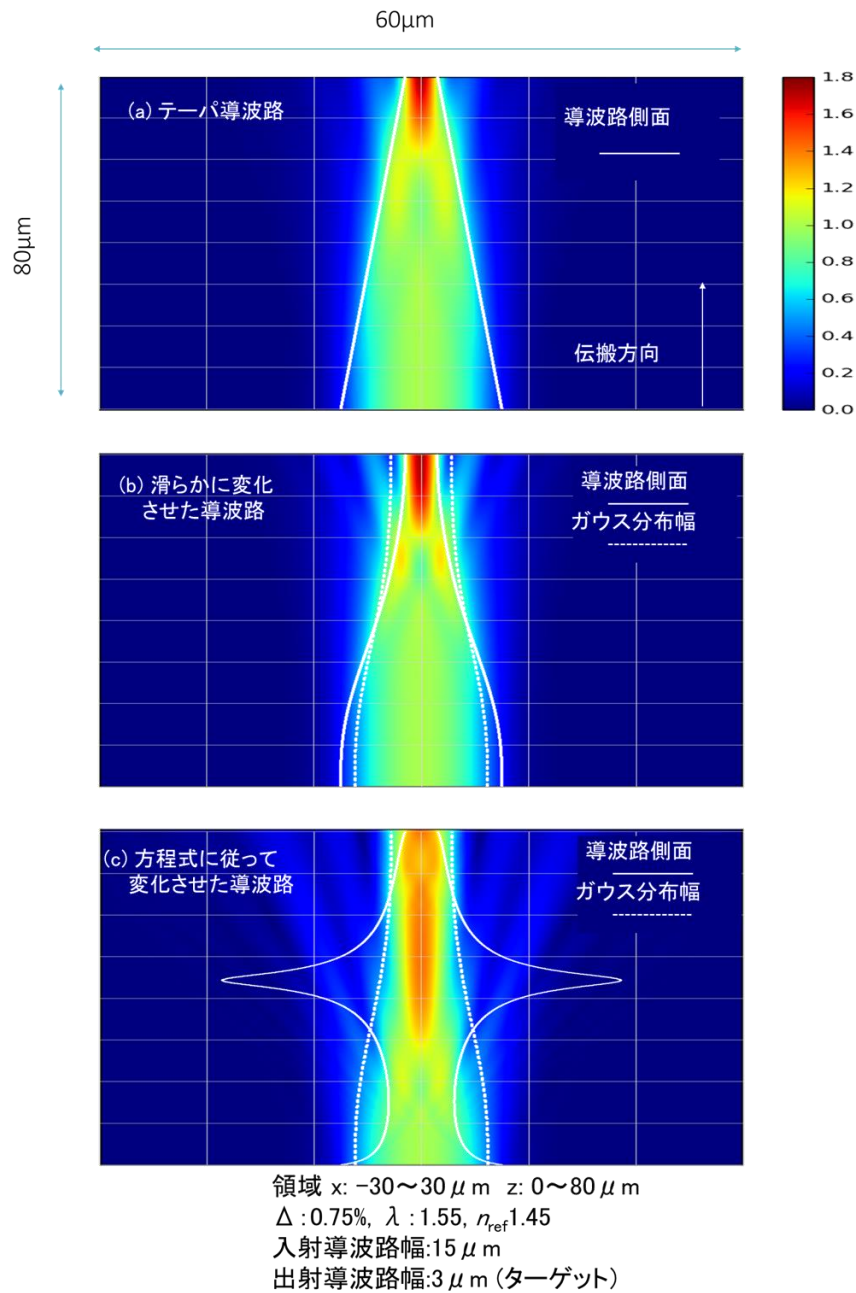


図 3-9 SI-SM 導波路への基底モードからずらした入力に対する伝搬の様子

白線の実線が導波路のエッジを表し、白線の破線が Gauss 分布のフィールド半径を示している。導波路自体は滑らかに変化しているものの、図 3-9(a)とくらべて漏れていく成分が強く励振されて、表 3-1 の(b)に示すとおり損失 1.08dB となって増大している。そこで、式 3-11 で与えられるフィールド半径に対して式 3-7、式 3-8 を用いて 2 乗分布導波路の基底モードに対する実効幅 w_e を求め、そこからパラメータ間の関係式(式 3-16)で決まる導波路幅 W を用いた。その回路で光を伝搬させた様子が図 3-9(c)である。白線の実線が導波路の側面の位置を表し、白線の破線が Gauss 分布のフィールド半径を表している。わずかに漏れが発生しているものの、全体としては狙いの出力に近づいており、表 3-1 の(c)に示すように 3 つ中では最小の損失 0.47dB となっている。スポット径が小さくなると振幅が大きな部分が発生するが、図 3-9(a) (b)では中心に集まりすぎていて、出力後に結合させる導波路の固有モードと整合しないため結合率が低下している。一方、図 3-9(c)はピークが抑制されて広がった光のフィールド形状で出力されており、全体としては良い結合が得られるスポットサイズ変換が実現している。本計算例においては、違いを明確にするために急峻なスポットサイズの変化を行う変換器で比較しているが、なだらか場合も同様に式 3-7、式 3-8 を用いること特性改良が期待される。

表 3-1 スポットサイズ変換回路のシミュレーションで得られた結合率

スポットサイズ変換回路形態	損失[dB]
(a) テーパー導波路	0.75
(b) 滑らかに変化させた導波路	1.08
(c) 方程式に従って変化させた導波路	0.47

(2) SI-SM 導波路の S 字曲げ回路

次に、SI-SM 導波路の S 字曲げ回路を考える。光導波路回路においては、多くの場合、最小曲率半径を決めて、すべての曲線部分を円弧にして、曲率半径に応じて半径をずらすオフセットとよばれる手法が取られる。このことは前節 3-2(2)の S 字曲げ回路 (図では図 3-4) で既に示した。SI-SM 導波路の場合も同様の方法がとられる。オフセット量としての概算値は 2 乗分布導波路と同じ式 3-13 で与えられる。図 3-10(a)に例を示す。計算に用いたパラメータは図中に示した。白の実線が導波路の中心で白の破線が期待する光のフィールドの中心位置を表している。図 3-10(b)がオフセットのない場合で、光のフィールドが円弧上から逸脱して、かつ一部放射してしまっているのがわかる。それに対してオフセットをつけた図 3-10(a)では損失が抑制されていて、かつ、ねらいの円弧上をフィールドが伝搬していることがわかる。ただし、S 字の変曲点のところではオフセットが不連続に反対符号切り替わるのでその部分で若干散乱が発生しやすく、実際図 3-10(a)でも不連続での散乱が見られる。出力の光結合の結果を表 3-2 に示す。オフセットの無い場合はオフセットの有る場合に比べて約 0.3dB 結合が劣化している。オフセットについては式 3-9、式 3-10、および、式 3-13 により得られるが、この論文で初めて導かれたものではなく、この論文の方法でも同様の結果が得られることがあらためて確認された、ということになる。式 3-9、式 3-10、式 3-13 の意義は、従来の知見では定曲率のものに対するオフセット量を示していたのに対して、曲率が変わった場合に曲率に応じてオフセット量を加えればよいことを示していることである。そこで、定曲率の場合にみられる変曲点での不連続な接続がないようにして、曲率を連続的に変化させる場合について計算を行った。前節 3-2(b)の S 字曲げ回路で用いた式 3-14、式 3-15 を用いて計算した。入力と出力で x 方向の差は前節 3-2(b)と同じ 30 μm として、光導波路としては通常の PLC と同様のパラメータを用いているので強く曲げられないので z

方向は図中に示したとおり $500\mu\text{m}$ とした。図 3-10(c)がオフセットを加えた場合で、白破線のフィールドの狙いの中心位置を光が伝搬しているのがわかる。オフセットを加えた曲線を導波路の中心として白の実線で示している。

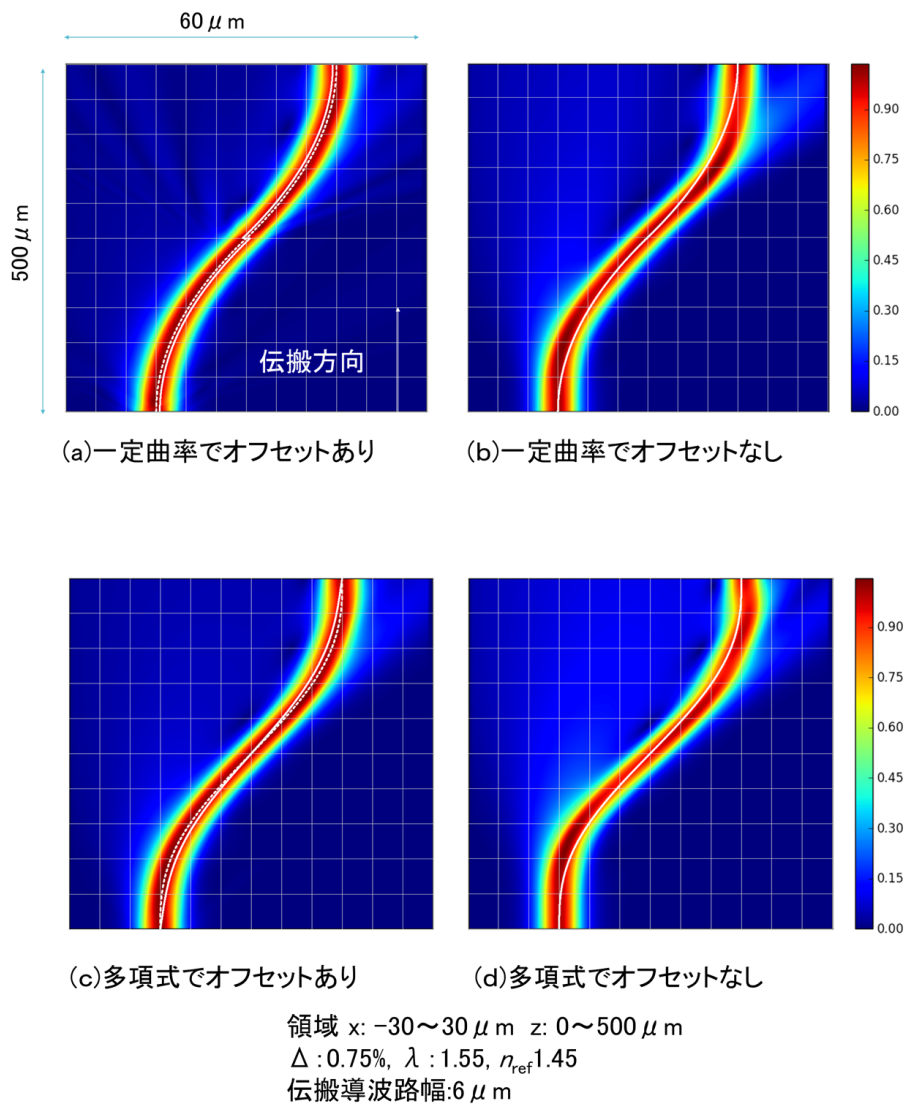


図 3-10 SI-SM 導波路の S 字曲げ回路における伝搬の様子

それに対して、オフセットを加えずにフィールドの狙いの中心位置を導波路の中心位置として光を伝搬させたものが図 3-10(d)である。この場合、光が逸脱して、かつ急峻に曲がる部分が発生しており、大きな放射が発生していることがわかる。図 3-10(c)の連続的にオフセット加えた場合の光の伝搬においては一定曲率の場合の図 3-10(a)にみられた曲率が反転する接続点にみられるような放射は見られないことがわかる。かわりに、一定曲率で曲げる場合よりも大きな曲率になる部分があるため全体としては放射が多くなっていることがわかる。表 3-2 に図 3-10(a)～(c) 損失をまとめた。(c)の多項式でオフセットありの連続的にオフセット加えた場合よりも(a)の一定曲率の場合が、最も損失が少なくなっているが、これは(c)の曲げによる放射損失が大きかったためと考えられる。今回は特性の違いが現れやすいように曲率があえて大きくなるようにしたためこのような結果になっているが、回路長さをもう長くすることで(c)の方のメリットである接続部分の不連続点がないというメリットがでてくるものと考えられる。

表 3-2 S 字曲げ回路のシミュレーションで得られた結合率

S 字曲げ回路の形態	損失[dB]
(a) 一定曲率でオフセットあり	0.11
(b) 一定曲率でオフセットなし	0.47
(c) 多項式でオフセットあり	0.17
(d) 多項式でオフセットなし	0.77

以上のとおりパラメータの方程式 (式 3-7) から (式 3-10) を SI-SM 導波路に適用して効果を確認した。2 乗分布導波路と異なり、正確に一致させることは難しいが式 3-7～式 3-10 を用いてある程度有効な設計が可能であることが確認できた。

3-4. 導波路パラメータ制御法の課題と今後の展望

第 3 章では、導波路として 2 乗分布導波路、光のフィールドとして Gauss 分布となるものについて、そのパラメータが伝搬方向に変化するものについて議論してきた。光のフィールドについては、光導波路中の光の広がりと位置をパラメータとすることで光の運動として記述できることを見てきた。導波路パラメータ制御法を拡張して、より複雑な場合に適用できればより光回路の設計等の幅は広がり有用な応用が考えられる。現状は具体的な手法を考えられていないが、導波路パラメータ制御法の拡張に向けていくつか考察してみたい。

導波路として 2 乗分布導波路、光のフィールドとして Gauss 分布を出発点と考えて、光の運動を扱う問題のタイプを図 3-11 に示した。Type1 は本章で議論してきたことである。Type2 では 2 乗分布導波路で光のフィールド形状が Gauss 分布からずれた場合を考える。Type3 では 2 乗分布導波路ではない任意の導波路を考えて、そこではもはや基底モードは Gauss 分布とはならないので、最初から光のフィールド形状が Gauss 分布からずれた光のフィールドを扱う必要があるものと考えられる。ステップインデックス型の導波路の議論は Type3 に相当するようにも思えるが、結局、光のフィールドについて Gauss 分布で近似できるものとして、屈折率分布として矩形の分布を 2 乗分布導波路で近似してことになるので理論としては Type1 に分類される。以下、Type2 と Type3 についてどのような議論が考えられる考察していく。

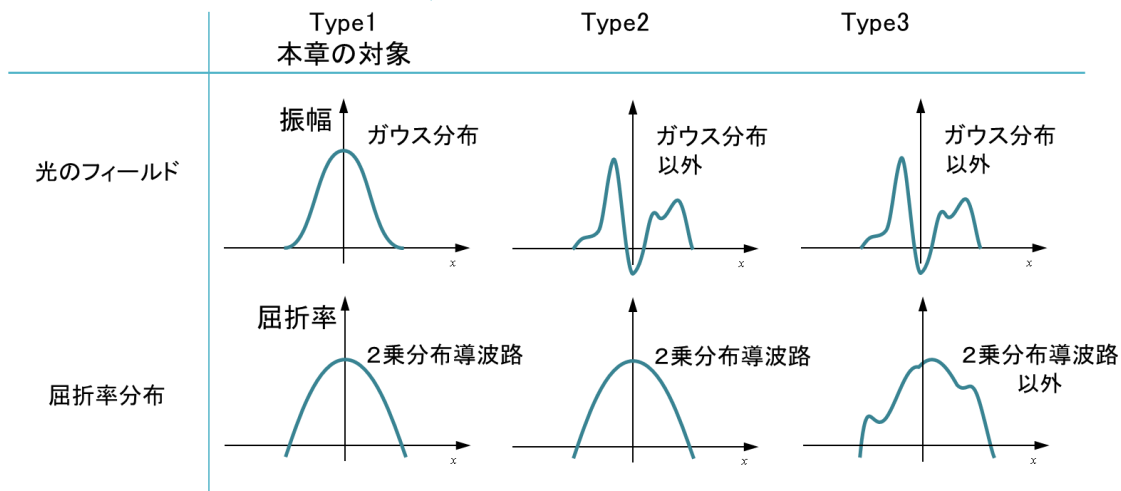


図 3-11 光の運動を扱う問題の類型

Type2 について

2乗分布導波路については、伝搬方向に形状が変化しなければ、Hermite-Gauss 分布が固有モードとなるので、Hermite-Gauss 分布を用いて光の分布を記述するのは自然に思われる。

Hermite-Gauss 分布は母関数を使うと

$$\underbrace{H_m \left(\sqrt{2} \frac{(x-\chi)}{w} \right) \frac{e^{-\frac{(x-\chi_0)^2}{w^2}}}{\sqrt{w}}}_{\text{Hermite-Gauss 分布}} = \frac{d^m}{ds^m} \bigg|_{s=0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{w}} \exp \left(-\frac{(x-\chi-\sqrt{2}sw)^2}{w^2} + s^2 \right)}_{\text{Gauss 分布 (母関数)}}$$

と表される。母関数は Gauss 分布なのでこの伝搬方向への運動はパラメータ方程式で式 3-3～式 3-5 で与えられる。s は Hermite-Gauss 分布を生成するためのパラメータで物理的な意味はない。この式をもとに次の図式 (図 3-12) を考えると Hermite-Gauss 分布についても、導波路パラメータ制御法の議論と同様の議論ができそうに思える。図 3-12 ではより一般的に直交モードと記載しているが、いまの場合は Hermite-Gauss 分布になる。これですべてうまく行きそうに見えるが、母関数の Gauss 分布には s が含まれるため中心位置からずれた伝搬となる。2乗分布導波路が伝搬方向に変化しない場合でも中心位置は複素数値をとり振動する。これはモードごとに伝搬定数が異なるため位相がずれて伝搬することを反映し

て母関数の中心位置をあらわすパラメータが振動しているものと考えられる。2乗分布導波路が伝搬方向に変化しない場合であれば、単純に計算できるので、ある程度見通しの良い議論ができるが、そもそも、固有モードの高次モードを考えればよいので、母関数で考えるメリットがない。伝搬方向に複雑に変化する場合は、中心位置に関するパラメータに s が含まれ、この変数を微分する必要があるため、モード間の遷移が発生して見通しよく計算することができなかつた。この考え方をさらに進めるべきかも含めて今後の研究課題であると考えている。

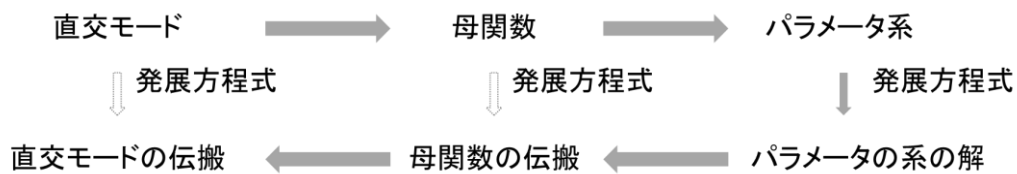


図 3-12 高次モードについての運動の記述法の図式

Hermite-Gauss 分布の性質を使った方法以外も考えうる。その一つが混合 Gauss 分布を用いているものである。混合 Gauss 分布は統計学とくに近年の機械学習で詳細に議論されている [25]。混合 Gauss 分布を用いた機械学習においては、複数の Gauss 分布の重ね合わせで表される確率分布になっていると仮定して、観測されたデータの分布から、複数の Gauss 分布のパラメータを決定するためのアルゴリズムが与えられている。もし、任意の光のフィールドをうまく複数の Gauss 分布で近似するすることができれば、すなわち複数の Gauss 分布の重ね合わせで表すことができれば、2乗分布導波路内では、それぞれの Gauss 分布の伝搬を独立に考えて、伝搬したものを足し合わせれば良いから、導波路パラメータ制御法で得られたに基づき実行可能な計算であり、光の運動としても理解しやすい。たとえば、スペckルパターンのピークをガウス分布の重ね合わせに分解するようなイメージである。

図 3-12 に Hermite-Gauss 分布の場合と同様に混合 Gauss 分布の場合の伝搬の記述法の図式を示す。この方法で効率よく任意のフィールドを記述できそうに見える。しかし、任意のフィールドを記述するためには、与えられたフィールドから何個の Gauss 分布で近似すべいかも決める必要がある。混合 Gauss 分布を用いた機械学習ではノンパラメトリック Bayes 学習として近似すべき Gauss 分布の個数も決めるアルゴリズムが提案されているが、逐次データを加えていって、近似した確率分布から、そのデータを加える際にあらたに Gauss 分布を加えるべきかどうかを確率的に判断するため、混合 Gauss 分布が確率分布となっていることが要請される。そのため光のフィールドのような負の値や複素数値をとる場合は、機械学習のアルゴリズムをそのまま適用することはできない。光のフィールドについて混合 Gauss 分布でどのように近似することができるかは、今後、研究すべき興味深い課題であると思われる。

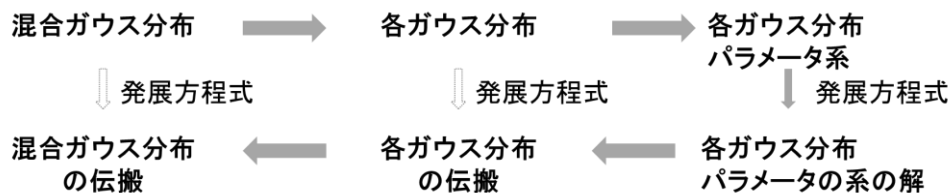


図 3-12 混合 Gauss 分布の運動の記述法の図式

Type3 について

屈折率分布が任意の形状で与えられているとして、本章の議論を適用しようとするとして以下のようなスキームが考えられる。パラメータ方程式 (式 3-3)~(式 3-5)を得たのと同様に、屈折率分布を空間の変数 x の多項式で近似して、光のフィールドについても、指数関数の中を変数 x の多項式で表し、かつ規格化して、その係数を伝搬方向 z の関数として、光のフィールドの発展方程式に代入し、空間の変数 x の次数ごとに比較して、パラメータの発展

方程式を得る、というスキームを考えることができる。この方法は実際に実行可能であるが、パラメータについての物理的な意味付けは困難になり、かつ、計算量も多くなるため、BPMのような数値計算で計算することとの差分がなくなってしまうと思われる。

以上のおり、パラメータで表現可能なモデルを考えて、導波路パラメータ制御法として、光を操ることができることを示した。本章の導波路パラメータ制御法の拡張は容易ではないが、より多くの自由度がある光を操ることができれば、近年、高まりを見せている多モード伝送や光渦、光ピンセット等への展開も期待できる。その意味でも本研究がさらに発展することに期待したい。

4. 波面整合法と光回路設計への適用

この章の概要

前章の導波路構造で光を制御する方法に対して、本章では、導波路構造に限定せずに作製可能なすべての屈折率分布のパターンの自由度を使って光のフィールドを制御する波面整合法と呼ばれる方法と、その改良に向けて深層ニューラルネットワーク手法との融合の可能性について検討する。図 4-1 に本章で検討する回路のイメージを示す。光導波路パターンの場合にはコアと呼ばれている高屈折率、部分を青で示す。コアに相当するパターンがあるかないかで回路パターンを形成するとすると、2 値で表されるのでそれをバイナリーパターンと呼ぶ。波面整合法においては、事実上無限とも言えるような自由度をいかに決定するかが課題となる。

PLC のような半導体プロセスを使って光導波路を作製する場合はウエハ上のレジストにフォトマスク（あるいはレチクル）のパターンを転写し、パターン化されたレジストをエッチングマスクとして光導波路パターンを作る。現在の半導体プロセスの微細加工は商用でも nm 級のゲートサイズが実現されているが、そこまで微細ではなくても例えば 100nm 程度の分解能でも 10cm 角のエリアに 2 の 10^{12} 乗通り程度のバイナリーパターンの回路を作れることになる。バイナリーパターンの回路の 1 要素が光導波路回路の 1 要素と同じ働きをするわけではないので単純な比較はできないが、従来の光導波路回路では 100 × 100 規模の光マトリックススイッチを作ったとしても高々 $\sim 10^6$ 程度の要素数と見積もられる。したがって、光導波路回路と比較してバイナリーパターンの光回路には莫大な数の自由度があることがわかる。

この章では、このような大規模な自由度を設計する手法として波面整合法を提案する。まず、波面整合法の導出を 3 通りの方法で行う（本文 4-1）。3 通りの方法で波面整合法に物理的に異なる解釈を与えることで広い観点で波面整合法を理解・解釈することが可能となる。

次に波面整合法の特徴と、その際の課題を抽出する（本文 4-2）。波面整合法は屈折率分布を更新するルールを与えるが、そのような屈折率の決定法だけでは決まらない部分については設計者が決める必要がある。波面整合法が何を定められて、何を定められないかを検討し、設計者が決める部分を波面整合法による設計にどのように活かしていくことができるか議論する。本文 4-3 では、本文 4-1 と 4-2 をもとに、光回路設計に適用して、数値計算によりその有効性を確認する。さらに、光の入出力の位相の自由度に着目した設計方法について述べる（本文 4-4）。本文 4-5 で深層ニューラルネットワークと波面整合法との対応関係を調べ、深層ニューラルネットワークの手法を用いて波面整合法の改良例を示す。最後に波面整合法の今後の展開について考察する（本文 4-6）。

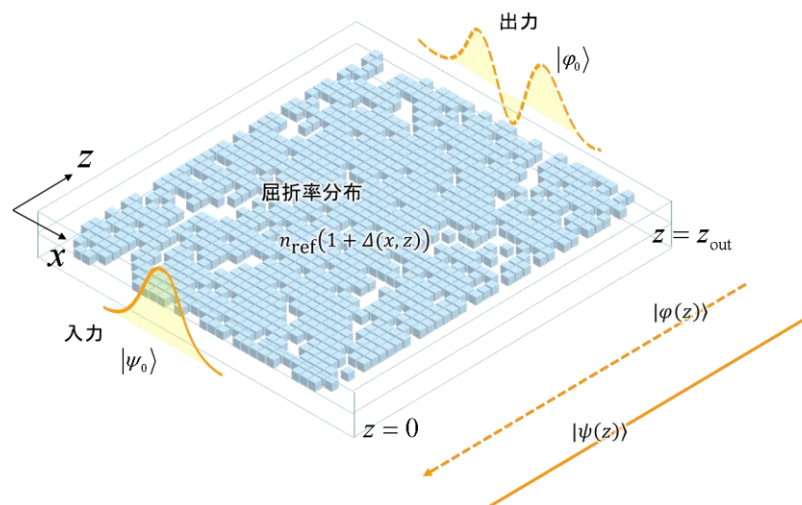


図 4-1 波面整合法により設計する光回路のイメージ

4-1. 光の伝搬に対する屈折率分布による変分法～波面整合法の導出

図 4-1 のような大規模な自由度を使って光回路を設計するのは、人の手で計算するのは困難で事実上不可能であるだけでなく、コンピュータにとっても困難な計算となっている。

それは、大規模な自由度を使った光回路の設計を最適化問題と考えるとコンピュータにすべてのパターンを総当りで計算させて良い解を選ぶ、というような計算は事実上できないからである。図 4-1 で光導波路の場合はコアと呼んでいる高屈折率部分を青で示し、高屈折率部分があるかないかで 2 値で表されるのでそれをバイナリーパターンと呼ぶ。ごく小規模なものを考えて、100 μm 角サイズのパターンを 1 μm 角の要素で構成する場合を計算するにしても 2 の 10⁴ 乗通りのバイナリーパターンの光回路が考えられ、その光学特性を評価して、そのなかから良いパターンを選ぶ、というのは現実には実行不可能である。

本章で扱う波面整合法[12]は、光のフィールドを数値計算により伝搬させながら、各点の光のフィールドを使った後述する式に基づき屈折率分布を変更しながら光回路のパターンを最適化していく手法である。すべての屈折率分布のパターンを総当たりで計算して特性のよい光回路を選ぶ方法に比較して効率的な計算が可能である。図 4-2 に屈折率更新の流れを示す。

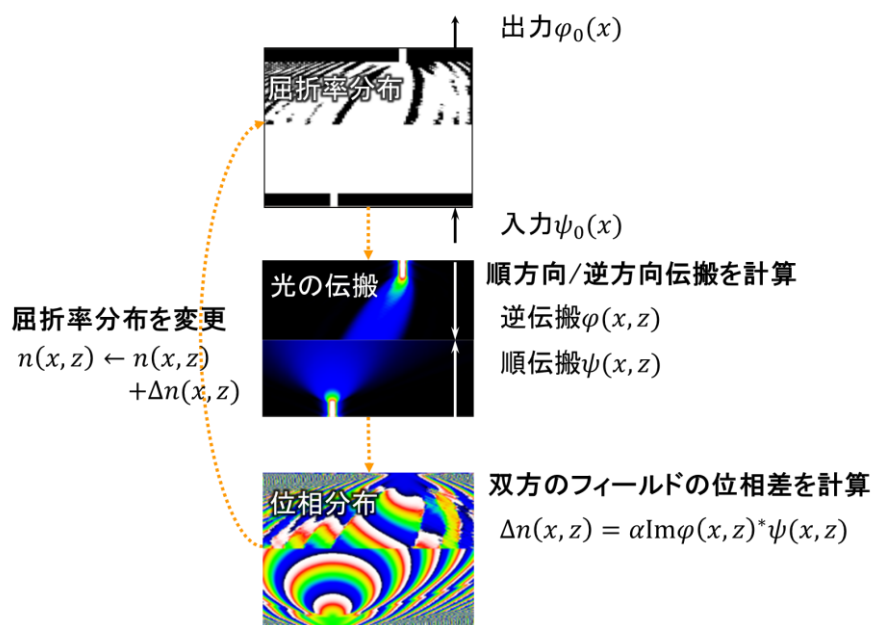


図 4-2 波面整合法の屈折率更新の流れ

与えられた屈折率分布に対して、入力と出力の光のフィールドをそれぞれ、順伝搬、逆伝搬させて、そのフィールドの位相差を各点で計算して、位相差が小さくなるように屈折率を更新するというのが大まかな流れとなる。はじめに、この順伝搬と逆伝搬のフィールドの位相差に基づく屈折率の更新則を得る際の考え方も含めて、その導出方法について述べる。波面整合法における屈折率分布の更新を与える式（波面整合式）を求めるには3つの導出方法がある。それぞれについて述べて、この節の最後に各導出方法を比較してまとめる。

(1) ビーム伝搬に基づく波面整合式の導出

数値計算による光の伝搬を取り扱うために、図 4-1 に基づき、計算領域について、伝搬方向に対して垂直方向（横方向） x については両側を透明境界とする。伝搬方向 z については $z \in [0, z_{\text{out}}]$ とする。屈折率分布は参照屈折率 n_{ref} と比屈折率差の分布 $\Delta(z)$ により $n_{\text{ref}}(1+\Delta(z))$ と表される。入力 $|\psi_0\rangle$ を(式 2-2)の発展方程式に従って伝搬させた光のフィールドを $|\psi(z)\rangle$ とする。出力 $|\psi(z_{\text{out}})\rangle$ と目標とする光の出力フィールド $|\varphi_0\rangle$ とが一致するように、何らかの評価関数 $L(|\psi(z_{\text{out}})\rangle, \langle\psi(z_{\text{out}})|, |\varphi_0\rangle, \langle\varphi_0|)$ を考える。ここでブラベクトルとケットベクトルの両方の関数になっているのは、複素数の実部と虚部の両方の関数になっていることを表している。 $L(|\psi(z_{\text{out}})\rangle, \langle\psi(z_{\text{out}})|, |\varphi_0\rangle, \langle\varphi_0|)$ は煩雑なので $L(\psi(z_{\text{out}}), \varphi_0)$ と表すこととする。 L は実数に値を取る関数で、たとえば、損失関数として損失を最小化することを考える。まとめると以下のように定式化される：

$$\Delta(x, z) = \arg \min_{\Delta(x, z)} L(|\psi(z_{\text{out}})\rangle, |\varphi_0\rangle)$$

$$\text{ただし } \begin{cases} i\partial_z |\psi(z)\rangle = [-\partial_x^2/2\beta - \beta\Delta(x, z)]|\psi(z)\rangle \\ |\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle \end{cases} \quad (\text{式 4-1})$$

ここで、 $\arg \min_{\Delta(x, z)}$ は比屈折率差の分布 $\Delta(x, z)$ をパラメータとして $L(\psi(z_{\text{out}}), \varphi_0)$ を最小にする

$\Delta(x, z)$ を求めることを意味する。しかし、損失関数 L は陽には $\Delta(x, z)$ をパラメータとして含

まず、伝搬方程式を通して $|\psi(z)\rangle$ が $\Delta(x,z)$ の関数となっていて、 $|\psi(z_{\text{out}})\rangle$ の値を変化させて、結果として L の値が変化するという関係になっている。そこで、 $\Delta(x,z)$ に対する $|\psi(z_{\text{out}})\rangle$ の変化を考える。ビーム伝搬法の式 2-5 から指数行列部分のみを取り出して、

$$U(z';z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-i(K+V(z'))\Delta z} e^{-i(K+V(z'-\Delta z))\Delta z} \dots e^{-i(K+V(z+\Delta z))\Delta z} e^{-i(K+V(z))\Delta z} \quad (\text{式 4-2})$$

とする。定義からこの行列は z のベクトルすなわち光のフィールドを z' に伝搬させる行列であることがわかる。これを用いると式 2-5 は

$$|\psi(z_{\text{out}})\rangle = U(z_{\text{out}};0)|\psi(0)\rangle \quad (\text{式 4-3})$$

となる。 $z = z'$ で比屈折率差の値が $\delta\Delta(z')$ だけ変動したとすると、そのときのフィールドの変化 $\delta|\psi(z_{\text{out}})\rangle$ は指数関数を展開して Δz に対して 1 次の精度で

$$\begin{aligned} \delta|\psi(z_{\text{out}})\rangle &= e^{-i(K+V(z_{\text{out}}-\Delta z))\Delta z} \dots e^{-i(K+V(z'))\Delta z} i\beta\delta\Delta(z')\Delta z e^{-i(K+V(z'-\Delta z))\Delta z} \dots e^{-i(K+V(0))\Delta z} |\psi(0)\rangle \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{U(z_{\text{out}};z'+\Delta z)} \hspace{1em} \underbrace{\hspace{10em}}_{U(z';0)} \\ &= U(z_{\text{out}};z')i\beta\delta\Delta(z')\Delta z U(z'-\Delta z;0)|\psi(0)\rangle \end{aligned} \quad (\text{式 4-4})$$

となる。なお、 $\delta\Delta(z')$ は対角成分だけの行列である。また、 $\delta\Delta(z')$ の位置は指数関数の摂動に対する展開として FT-BPM で用いた近似 $e^{-i(K+V(z'))\Delta z} \approx e^{-iK\Delta z} e^{-iV(z')\Delta z}$ に摂動を加えて

$$\delta e^{-i(K+V(z'))\Delta z} \approx e^{-iK\Delta z} \delta e^{-iV(z')\Delta z} \approx e^{-iK\Delta z} e^{-iV(z')\Delta z} \cdot i\beta\delta\Delta(z')\Delta z$$

と計算しているので $e^{-i(K+V(z'))\Delta z}$ の右側になる。ただし、 $e^{-i(K+V(z'))\Delta z} \approx e^{-iV(z')\Delta z} e^{-iK\Delta z}$ というように順番を入れ替えた近似をとることもできるので、その場合は左側になるので順番の違いは Δz の 1 次の近似の範囲では本質的ではない。これをもとに評価関数 $L(\psi(z_{\text{out}}), \varphi_0)$ の変化 $\delta L(\psi(z_{\text{out}}), \varphi_0)$ を求めると

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial |\psi(z_{\text{out}})\rangle} \delta|\psi(z_{\text{out}})\rangle + c.c. \\ &= \frac{\partial L}{\partial |\psi(z_{\text{out}})\rangle} U(z_{\text{out}}, z')i\beta\delta\Delta(z')U(z'-\Delta z, 0)|\psi(0)\rangle + c.c. \end{aligned} \quad (\text{式 4-5})$$

となる。ここで $c. c.$ は複素共役項である。 $L(\psi(z_{\text{out}}), \phi_0)$ はスカラーであるから、その変化もスカラーで $\delta|\psi(z_{\text{out}})\rangle$ は縦ベクトルであるから、 $\frac{\partial L}{\partial|\psi(z_{\text{out}})\rangle}$ はその共役空間のベクトル、すなわち、横ベクトルとなる。さらに、 $\frac{\partial L}{\partial|\psi(z_{\text{out}})\rangle}$ は、 $z=z_{\text{out}}$ における光のフィールド $|\psi(z_{\text{out}})\rangle$ と $|\phi_0\rangle$ とを変数とする横ベクトルに値を取る関数であることがわかる。つまり、 $z=z_{\text{out}}$ で値が決まる。そこで

$$\langle a_\psi(z_{\text{out}})| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial|\psi(z_{\text{out}})\rangle} \quad (\text{式 4-6})$$

と書くことにする。これを用いると

$$\begin{aligned} \delta L &= \langle a_\psi(z_{\text{out}})| U(z_{\text{out}}, z'+\Delta z) i\beta\delta\Delta(z')\Delta z U(z', 0) |\psi(0)\rangle \\ &= \langle a_\psi(z'+\Delta z)| i\beta\delta\Delta(z')\Delta z |\psi(z')\rangle \end{aligned} \quad (\text{式 4-7})$$

となる。 $|\psi(z')\rangle = U(z', 0)|\psi(0)\rangle$ は定義よりあきらか。 $\langle a_\psi(z_{\text{out}})| U(z_{\text{out}}, z'+\Delta z) = \langle a_\psi(z'+\Delta z)|$ は次のようなベクトルである。 $\langle a_\psi(z_{\text{out}})| U(z_{\text{out}}, z'+\Delta z)$ を転置して

$$U^\dagger(z_{\text{out}}, z'+\Delta z) |a_\psi(z_{\text{out}})\rangle = e^{i(K+V(z'+\Delta z))\Delta z} \dots e^{i(K+V(z_{\text{out}}-2\Delta z))\Delta z} e^{i(K+V(z_{\text{out}}-\Delta z))\Delta z} |a_\psi(z_{\text{out}})\rangle$$

となるので、(式 2-2) および (式 2-4) (式 2-5) の対応関係からこれを方程式にすると

$$\begin{cases} -i\partial_z |a_\psi(z)\rangle = \left[-\partial_x^2/2\beta - \beta\Delta(x, z) \right] |a_\psi(z)\rangle \\ |a_\psi(z_{\text{out}})\rangle = \int \left(\frac{\partial L}{\partial|\psi(z_{\text{out}})\rangle} \right) \end{cases} \quad (\text{式 4-8})$$

となる。これは伝搬方向を反転させる式に他ならない。 $\langle a_\psi(z)|$ はその解となる。対角行列

$\delta\Delta(z)$ の x 成分ごとに

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_x i\beta\Delta z \langle a_\psi(z+\Delta z)|x\rangle \delta\Delta(x, z) \langle x|\psi(z)\rangle + c.c. \\ &= -2\beta\Delta z \text{Im} \sum_x \langle a_\psi(z+\Delta z)|x\rangle \delta\Delta(x, z) \langle x|\psi(z)\rangle \end{aligned}$$

として、

$$\frac{\delta L}{\delta \Delta(x, z)} \propto -2\beta \operatorname{Im} \langle a_\psi(z + \Delta z) | x \rangle \langle x | \psi(z) \rangle \quad (\text{式 4-9})$$

となる。これをもとに最急降下法として、正の係数 η を用いて

$$\Delta(x, z) \leftarrow \Delta(x, z) - \eta \frac{\delta L}{\delta \Delta(x, z)} \quad (\text{式 4-10})$$

としていけば

$$\delta L = -\eta (2\beta)^2 \Delta z \sum_x \left(\operatorname{Im} \langle a_\psi(z + \Delta z) | x \rangle \langle x | \psi(z) \rangle \right)^2$$

となって L を減少させる変化を与えることができる。 L の具体的な形として

$$\begin{aligned} L_2(\psi(z_{\text{out}}), \varphi_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left\| \varphi_0 - |\psi(z_{\text{out}})\rangle \right\|^2 \\ L_p(\psi(z_{\text{out}}), \varphi_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \langle \varphi_0 | \psi(z_{\text{out}}) \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{式 4-11})$$

がよく用いられる。 L_2 は差の 2 乗であることから 2 の添字をつけている。 L_p は内積の product から p の添字をつけている。

L_2 を用いた場合は $\langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle = \langle \psi(z_{\text{out}}) | \psi(z_{\text{out}}) \rangle = 1$ として、 $|\psi\rangle$ と $\langle \psi|$ は独立として考えて

$$\begin{aligned} \langle a_\psi(z_{\text{out}}) | &= \frac{\partial L_2}{\partial |\psi(z_{\text{out}})\rangle} = -\langle \varphi_0 | \\ \langle a_\psi(z) | &= -\langle \varphi(z) | \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \Delta(x, z) &\leftarrow \Delta(x, z) + \delta \Delta(x, z) \\ \delta \Delta(x, z) &= -\eta \operatorname{Im} \langle \varphi(z + \Delta z) | x \rangle \langle x | \psi(z) \rangle \end{aligned} \quad (\text{式 4-12})$$

となることから、 $\Delta z \rightarrow 0$ とすると、この式はターゲットとなる $|\varphi_0\rangle$ を z まで逆に伝搬させた

$\langle \varphi(z) |$ と入力 $|\psi_0\rangle$ を z まで伝搬させた $|\psi(z)\rangle$ の位相が一致するとき $\frac{\delta L_2}{\delta \Delta(x, z)} = 0$ となり屈折

率の更新が停止し、屈折率分布が確定する。逆伝搬させた $\langle \varphi(z) |$ と順伝搬させた $|\psi(z)\rangle$ 、

位相を一致されるように屈折率分布を決定するこの手法は波面整合法と呼ばれている。

L_p を用いてターゲットと出力の内積を最大化する場合は、同様に

$$\begin{aligned}\langle a_\psi(z_{\text{out}}) | &= \langle \varphi(z) | \frac{\delta L_2}{\delta \Delta(x, z)} = \langle \psi(z_{\text{out}}) | \varphi_0 \rangle \langle \varphi_0 | \\ \langle a_\psi(z) | &= \langle \psi(z_{\text{out}}) | \varphi_0 \rangle \langle \varphi(z) | \end{aligned}$$

となる。変化の方向を増加させる方向すると

$$\begin{aligned}\Delta(x, z) &\leftarrow \Delta(x, z) + \delta\Delta(x, z) \\ \delta\Delta(x, z) &= -\eta \text{Im} \langle \psi(z_{\text{out}}) | \varphi_0 \rangle \langle \varphi(z + \Delta z) | x \rangle \langle x | \psi(z) \rangle\end{aligned}\tag{式 4-13}$$

となり、 $\langle \psi(z_{\text{out}}) | \varphi_0 \rangle$ が横方向全体の内積となっているので出力の全面の位相差を取り除い

て、位相が整合するような最適化が行われることがわかる。

一般的なものとしては式 4-9 の右辺であり、具体的に評価関数に対して更新式の形としてあたえられた式 4-12、式 4-13 の 2 行目を波面整合式と呼ぶ。

(2) 経路積分に基づく波面整合式の導出

光の伝搬を経路積分で表す。経路積分は量子力学において Schrödinger 方程式と等価であることが知られている [26]。光の伝搬の発展方程式 (式 2-2) は Schrödinger 方程式になっているので、光の伝搬も経路積分で表すことが可能である。光回路の場合は、経路積分は、以下に示すように、光学光路に沿った経路に関する総和を与えるので、さらに見通しが良い式が得られる。微小ステップ Δz について、実空間と波数空間を交互に切り替えて計算するのが FD-BPM であった。式としては式 2-7 で表され、それを再掲すると

$$\begin{aligned}|\psi(z + \Delta z)\rangle &\approx \left(\sum_{x'} |x'\rangle \langle x'| \right) \exp(-iK\Delta z) \left(\sum_k |k\rangle \langle k| \right) \exp(-iV\Delta z) \left(\sum_x |x\rangle \langle x| \right) |\psi(z)\rangle \\ &= \underbrace{\sum_{x'} |x'\rangle \sum_k \langle x'|k\rangle \exp(-ik^2\Delta z/(2\beta)) \sum_x \langle k|x\rangle \exp(i\beta\Delta(x, z)\Delta z)}_{\text{逆Fourier変換}} \underbrace{\psi(x, z)|x\rangle}_{\text{Fourier変換}}\end{aligned}$$

となる。この式で k についての和は連続極限でフレネル積分になっているので積分可能で x の和を取る前に k の和を取ると、適当な係数 A を掛けて

$$\begin{aligned} \sum_k \langle x'|k \rangle \exp(-ik^2 \Delta z / (2\beta)) \langle k|x \rangle &= \frac{1}{N} \sum_k \exp(-ik^2 \Delta z / (2\beta) + ik(x-x')) \\ &= \frac{1}{N} \sum_k \underbrace{\exp\left(-i \frac{\Delta z}{2\beta} \left(k - \frac{\beta}{\Delta z} (x-x')\right)^2\right)}_{\text{Fresnel積分}=\text{const.}=A} \exp\left(i \left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{x-x'}{\Delta z}\right)^2 \Delta z\right) \\ &= A \exp\left(i \left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{x-x'}{\Delta z}\right)^2 \Delta z\right) \end{aligned}$$

と近似できる。波の方程式の解 $\Psi(x, z) = \exp[i(\beta z - \omega t)] \psi(x, z)$ と、伝搬定数 $\beta = k_0 n_{\text{ref}}$ と、屈折率分布 $n(x, z)$ を比屈折率差 $\Delta(x, z)$ を用いて $n(x, z) \approx n_{\text{ref}} (1 + \Delta(x, z))$ と表していたことを用いて、式を変形する。近軸光線近似では $\left(\frac{x'-x}{\Delta z}\right)^2 \ll 1$ となるから $\sqrt{1 + \left(\frac{x'-x}{\Delta z}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x'-x}{\Delta z}\right)^2$ とし、 $\Delta(x, z) \left(\frac{x'-x}{\Delta z}\right)^2$ の項を無視すると

$$\begin{aligned} |\Psi(z + \Delta z)\rangle &= A e^{-i\omega t} \sum_{x', x} |x'\rangle \exp\left(i \left(\beta(1 + \Delta(x, z)) + \left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{x'-x}{\Delta z}\right)^2 \right) \Delta z\right) \langle x|\Psi(z)\rangle \\ &\approx A e^{-i\omega t} \sum_{x', x} |x'\rangle \exp\left(ik_0 n(x, z) \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{x'-x}{\Delta z}\right)^2} \Delta z}_{\text{経路長}}\right) \langle x|\Psi(z)\rangle \quad (\text{式 4-14}) \\ &= A e^{-i\omega t} \sum_{x', x} |x'\rangle \exp(ik_0 n(x, z) \Delta l(x', x)) \langle x|\Psi(z)\rangle \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\Delta l(x', x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 + \left(\frac{x'-x}{\Delta z}\right)^2} \Delta z$ で、線積分の線素となっている。この式は、波面が新たな波面を形成して伝搬する、とする Huygens の原理に基づく波動の伝搬を表している。 z における光源の分布を $|\Psi(z)\rangle$ として、 $|\Psi(z)\rangle$ を点光源 $|x\rangle$ に分解して $|\Psi(z)\rangle = \sum_x |x\rangle \langle x|\Psi(z)\rangle$ とし、さらに、点光源 $|x\rangle$ の作る波面が $(x', z + \Delta z)$ に作る振幅として経路に応じて位相 $\exp(ik_0 n(x, z) \Delta l(x', x))$ をつけて、点光源 $|x\rangle$ の振幅として表される。図 4-3 に伝搬のイメージ表した。式 4-13 は z と $z + \Delta z$ を固定して端点の組 $(x, z), (x', z + \Delta z)$ のすべて組

の和を取っていて、指数関数の中はその組に対する直線の光学経路長となっている。この微小ステップを繰り返すと端点の組 $(x,0), (x',z)$ について z 方向に Δz のステップで分割した折れ線の経路を次々かつないで行くことになるので、その極限として次の式

$$|\Psi(z)\rangle \propto e^{-i\omega t} \sum_{x',x} |x'\rangle \left(\sum_{l \in \text{Path}(x',z;x,0)} \exp\left(ik_0 \int n dl\right) \right) \langle x | \Psi(0)\rangle \quad (\text{式 4-15})$$

が得られる。ここで $\text{Path}(x',z;x,0)$ は端点の $(x,0)$ と (x',z) とを結ぶ逆戻りしないすべての経路を表している。式 4-15 を式 4-2 および式 4-3 と比較すると、

$$e^{i\beta z} U(z';z) \propto \sum_{x',x} |x'\rangle \left(\sum_{l \in \text{Path}(x',z';x,z)} \exp\left(ik_0 \int n dl\right) \right) \langle x | \quad (\text{式 4-16})$$

となるので、 $U(z';z)$ を使って「(1) ビーム伝搬に基づく波面整合式の導出」の変分に基づく導出と同様の議論が可能となる。同じ議論となるので波面整合式等の導出は省略する。ここで見るべきは式 4-16 の物理的な意味である。比屈折率差の局所的な変化 $\delta\Delta(x,z)$ に対する光のフィールドの変化は

$$\begin{aligned} \delta|\psi(z)\rangle &\propto \sum_{x,x_0} |x\rangle \left(\sum_{l \in \text{Path}(x,z;x',z')} \exp\left(ik_0 \int n dl\right) \right) ik_0 n \delta\Delta(x',z) \left(\sum_{l \in \text{Path}(x',z';x_0,0)} \exp\left(ik_0 \int n dl\right) \right) \langle x_0 | \psi(0)\rangle \\ &= U(z,z') |x'\rangle ik_0 n \delta\Delta(x',z) \langle x' | U(z',0) | \psi(0)\rangle \end{aligned} \quad (\text{式 4-17})$$

とできる。経路の途中の比屈折率差の局所的な変化 $\delta\Delta(x,z)$ はその点を通る経路に位相の変化をもたらすことを考えると、光のフィールドの変化 $\delta|\psi(z)\rangle$ は式 4-17 で与えられて、式 4-4 はほぼ自明な式となる。また解釈としても Huygens の原理で考えると、比屈折率差の局所的な変化 $\delta\Delta(x,z)$ が位相を変えて、その点が点光源となることを意味していることがわかる。また、式 4-8 の逆方向への伝搬の演算子として作用することも経路を逆にたどればよいので自明である。経路積分を用いることで様々なことが自明な形で示せるが、得られる結果は前節と同じであり、波面整合式の導出においては経路積分を用いるメリットは見通しの良さのみで本質的なメリットになっていない。経路積分を用いるメリットは例えば以下の

ように屈折率分布を制限を加えて求めるような場合である。式 4-12 や式 4-13 により屈折率分布を変化させて屈折率分布を決定する波面整合法においては、一般には屈折率分布は一意には決まらないので、都合の良い屈折率分布となるように何らかの制限を与えられることが望ましい。そのような選択をする（制限を与える）際に、物理的な解釈が明確であれば、物理的な観点で制限を与えることが可能となる。経路積分はそのような時に役に立つものと期待される。本博士論文においては次の節 4-2 で例として、光の伝搬経路が長い場合にペナルティを与える経路長の複素化を 4-3 節に例として示す。

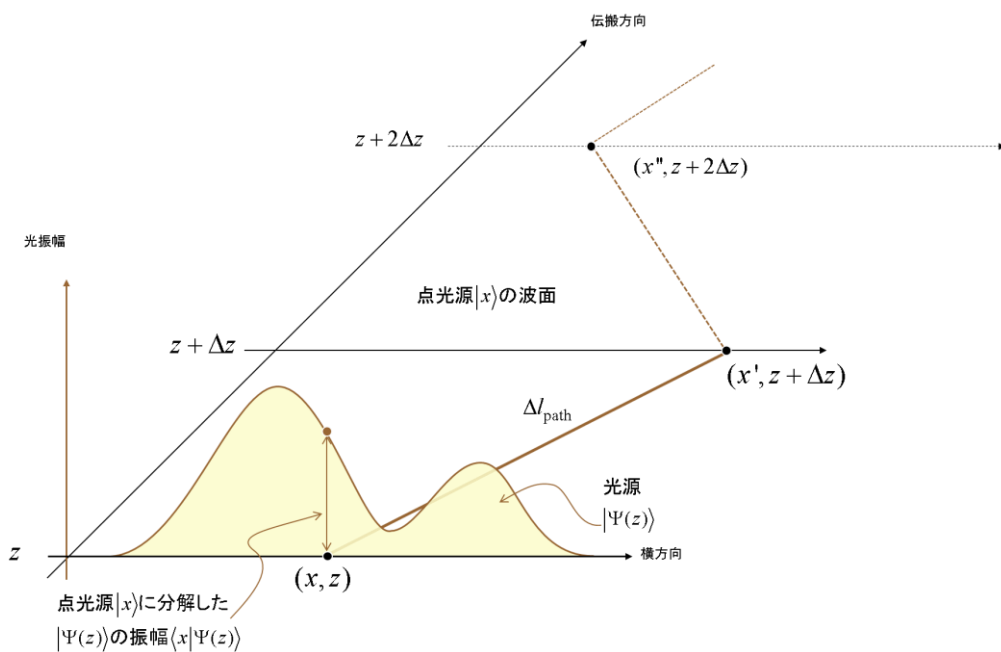


図 4-3 経路積分のイメージ

(3) 2 つ発展方程式の摂動に基づく波面整合式の導出

z 方向への 2 つの発展方程式と初期条件を以下で与える。

$$\begin{cases} i\partial_z |\varphi(z)\rangle = M(z) |\varphi(z)\rangle & \text{初期条件: } |\varphi(z = z_{\text{out}})\rangle = |\varphi_0\rangle \\ i\partial_z |\psi(z)\rangle = (M(z) + \delta M(z)) |\psi(z)\rangle & \text{初期条件: } |\psi(z = z_{\text{in}})\rangle = |\psi_0\rangle \end{cases} \quad (\text{式 4-18})$$

方程式は、 $|\varphi_0\rangle$ がターゲットとなる光のフィールドで $|\psi_0\rangle$ が入射する光のフィールドをイメージしている。以降、煩雑になるので、 z を指定するために明示する必要がない場合や混乱を与えない場合は「 (z) 」を省略する。式 4-18 では $|\varphi\rangle$ と $|\psi\rangle$ とで初期条件を与える z の位置が異なる。 $|\varphi\rangle$ の場合は $z = z_{\text{out}}$ で出力の位置、 $|\psi\rangle$ の場合は $z = z_{\text{in}}$ で入力的位置となっている。 M と δM は行列で、行列の要素は z の関数となりっている。さらに、光のフィールドに対して行列の要素の値を変えるような非線形な場合も考え得るが、簡単のため、線形なものとする。さらに、物理的な発展方程式であることから伝搬を逆戻した伝搬も可能であることに相当する条件として M と δM は Hermite 行列とする。式 4-11 の評価関数以外も考えられるが一般的に示すのは難しいので具体例として 式 4-11 の評価関数を考える。式 4-11 の評価関数を z の各点で定義されるように

$$L_2(\psi(z), \varphi(z)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|\varphi(z) - |\psi(z)\rangle\|^2 \quad (\text{式 4-19})$$

$$L_p(\psi(z), \varphi(z)) \stackrel{\text{def}}{=} \|\langle \varphi(z) | \psi(z) \rangle\|^2$$

とする。 L_2 と L_p は z の関数と考えられるから、 z の微分をとると(式 4-18) より

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dz} &= \frac{1}{2} i \langle \varphi | \delta M | \psi \rangle + c.c. \\ &= -2 \text{Im} \langle \varphi | \delta M | \psi \rangle \\ \frac{dL_p}{dz} &= -i \langle \psi | \varphi \rangle \langle \varphi | \delta M | \psi \rangle + c.c. \\ &= 2 \text{Im} \langle \psi | \varphi \rangle \langle \varphi | \delta M | \psi \rangle \end{aligned} \quad (\text{式 4-20})$$

が得られる。ここで、c. c. は複素共役で、式の導出には $\langle \varphi | M | \psi \rangle^* = \langle \psi | M | \varphi \rangle$ などの行列の Hermite 性を使った。この式から、 z に沿って L_2 が減少するように(L_p が増大するように) δM を設定できれば、 $|\psi\rangle$ は $|\varphi\rangle$ に近づく ($|\psi\rangle$ と $|\varphi\rangle$ の内積=重なりが増大する) ことになる。 δM として対角成分のみの Hermite 行列 $\delta M = m_{xx} |x\rangle\langle x|$ とすると $\langle x | \psi \rangle = \psi(x)$ 等であることから

$$\begin{aligned}\frac{dL_2}{dz} &= -2\text{Im}\varphi(x)^* \psi(x) m_{xx} \\ \frac{dL_p}{dz} &= 2\text{Im}\langle\psi|\varphi\rangle\varphi(x)^* \psi(x) m_{xx}\end{aligned}\quad (\text{式 4-21})$$

が得られる。これより $dL_2/dz \leq 0$ ($dL_p/dz \geq 0$) とするには、正の実数 η を用いて

$$m_{xx} = \begin{cases} \eta \text{Im}\varphi(x)^* \psi(x) & (L_2 \text{ に対して}) \\ \eta \text{Im}\langle\psi|\varphi\rangle\varphi(x)^* \psi(x) & (L_p \text{ に対して}) \end{cases} \quad (\text{式 4-22})$$

とすればよいことがわかる。

式 2-2 の発展方程式 $i\partial_z|\psi(z)\rangle = [-\partial_x^2/2\beta - \beta\Delta(x, z)]|\psi(z)\rangle = [K+V]|\psi(z)\rangle$ から、 K と V とを離散化して行列として $M = K+V$ 、 $\delta M = -\beta\delta\Delta$ とすると、

$$\delta\Delta(x, z) = \begin{cases} -\eta \text{Im}\varphi(x)^* \psi(x) & (L_2 \text{ に対して}) \\ -\eta \text{Im}\langle\psi|\varphi\rangle\varphi(x)^* \psi(x) & (L_p \text{ に対して}) \end{cases} \quad (\text{式 4-23})$$

式 4-21～式 4-23 は式 4-9 および式 4-12、式 4-13 に対応することがわかる。

求め方からわかるように、特に近似等を用いずにこれらの式が得られることがわかる。また、式の導出には発展方程式だけを使っているので、例えば、評価関数が複雑な場合でも簡単に屈折率を変化させるべき式 4-23 に相当する式を得ることができる。また、より正確な（効率の良い）波面整合式の導出が期待できる。そのことを示す例として、ビーム伝搬に基づく評価式 L_p に対する波面整合式 式 4-13 と、この方法 の式 4-23 の L_p に対する波面整合式の違いについて見てみる。それぞれの式は下記のように異なっている：

$$\delta\Delta(x, z) = \begin{cases} -\eta \text{Im}\langle\psi(z_{\text{out}})|\varphi_0\rangle\varphi(x)^* \psi(x) & (\text{式4-13}) \\ -\eta \text{Im}\langle\psi|\varphi\rangle\varphi(x)^* \psi(x) & (\text{式4-23}) \end{cases}$$

この違いは $|\psi\rangle$ と $|\varphi\rangle$ が同じ発展方程式に従う場合は、発展方程式の右辺が Hermite 演算子 (Hermite 行列) である場合は内積が保存されるので $\langle\psi(z_{\text{out}})|\varphi_0\rangle \equiv \langle\psi(z)|\varphi(z)\rangle$ となって解消

される。しかし、式 4-18 のように異なる発展方程式を想定している場合は一致しない。波面整合法の計算において、ビーム伝搬を順方向、逆方向双方向に一往復させて、屈折率分布を変更するのではなく、順方向、逆方向のそれぞれの伝搬の途中で逐次屈折率分布を変更する場合はこれに相当し、波面整合法では一般に用いられる方法である。式 4-13 と式 4-23 の違いが生じる原因は、式 4-13 は屈折率の変分 $n\delta\Delta(x, z)$ に対して 1 次の成分で波面整合式を計算しているのに対して、式 4-23 では、そのような近似を行っていないためである。式 4-23 では、 z ごとに位相を正しく補正する式となっていて、より早い収束が期待できる。

ここまで出てきた屈折率分布の更新式の導出方法として 3 つの形態 (1) ビーム伝搬に基づく方法、(2) 経路積分に基づく方法、(3) 2 つ発展方程式の摂動に基づく方法について、導出の流れを図 4-4 にまとめた。

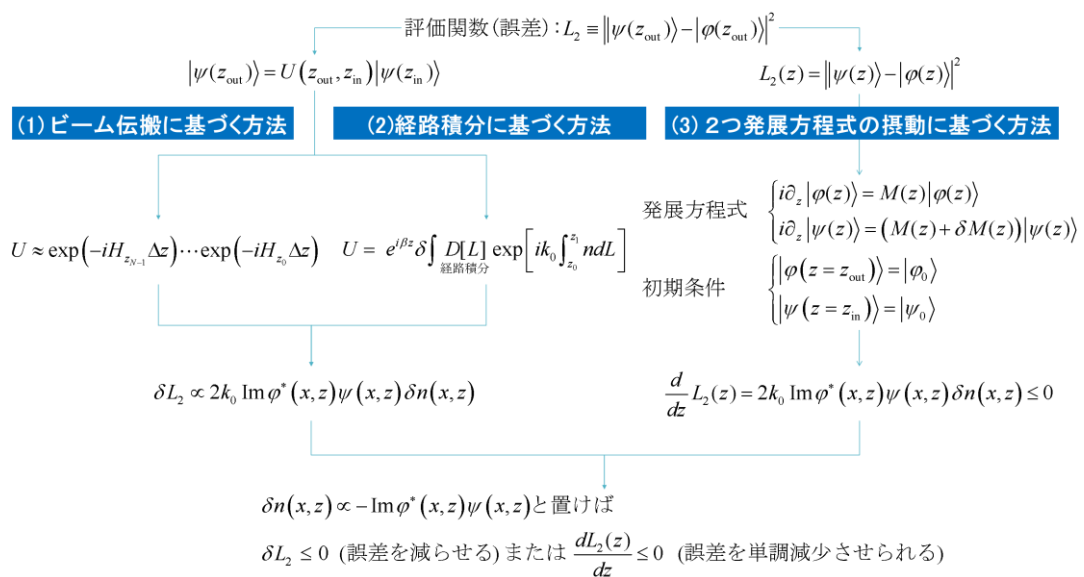


図 4-4 波面整合式の導出法の関係

また、それぞれの導出方法に関する得失と位置づけを表 4-1 にまとめた。(1) ビーム伝搬に基づく方法は、計算が煩雑で必ずしも見通しが良いとは言えないが、ビーム伝搬と直接結

び付いているので、実際の数値計算プログラミングの実装にそのまま反映できるというメリットがある。また出射端での評価関数（の微分）の情報があれば、逆方向の伝搬は順方向と同じように計算できるので、光伝搬の計算ライブラリ（たとえば BPM のソルバ）があれば、そのソルバを転用して簡単に計算できるメリットがある。(2)経路積分に基づく方法は、物理的な意味に基づいた解釈を可能にするという点で優れている。屈折率分布の最適化という観点からは、物理的な意味を持つ制限を導入することができるので、その点で優れている。一方、実際の数値計算は BPM により行われるので、その点は(1)の BPM に基づく方法との対応関係があるので、(1)の手法を中心に考えればよい。(3)の2つ発展方程式の摂動に基づく方法では、屈折率分布の更新式の導出について近似を用いずに、かつ、シンプルに計算できる。その場合、評価関数（評価関数の形というよりは、評価関数の引数としての出射側から逆伝搬させた光のフィールド）が領域全体 $z \in [z_{in}, z_{out}]$ で定義されている必要がある。

表 4-1 屈折率分布の更新式導出形態と特徴

導出形態	メリット	デメリット	位置づけ
(1) ビーム伝搬に基づく方法	<ul style="list-style-type: none"> ・数値計算(ビーム伝搬法)と対応が取れる ・評価関数の出射側の情報があればよい 	<ul style="list-style-type: none"> ・近似を使っているので、評価関数が複雑だった場合に理解が困難 	実際の数値計算と対応させるための手段(数値計算の誤差の影響等を評価する)
(2)経路積分に基づく方法	<ul style="list-style-type: none"> ・物理的意味が明確(光学光路長、Huygens の原理)なので、物理的な制限条件等をいれやすい 	<ul style="list-style-type: none"> ・数値計算として直接実行すると効率が悪くなる 	制約条件等を議論するための手段
(3) 2つ発展方程式の摂動に基づく方法	<ul style="list-style-type: none"> ・計算がシンプルなので評価関数と発展方程式から簡単に屈折率の更新条件を求められる 	<ul style="list-style-type: none"> ・評価関数が領域全体について定義できている必要がある 	屈折率分布の更新式の導出を行うための手段

出射側の光のフィールドを領域全体で定義した状態にするには、逆方向に伝搬させてデータを保持すればよいので、その点は（１）と変わりなく、実際の計算は（１）と同様に行えばよい。

以上のとおり、屈折率分布の更新式式 4-12、式 4-13、式 4-23 が得られた。これらを具体的な例に適用して有効性の検証を行う。その前に、波面整合法では決まらない屈折率分布の自由度や、設計上の条件やパラメータ（設計の自由度）について、次節で整理する。

4-2. 設計の自由度と波面整合法による光回路設計

波面整合法は、屈折率分布のすべての自由度を利用することで、屈折率の分布について特定のパラメータの設定やパラメータ数を選ばなくて良い屈折率分布の設計手法である。例えば、導波路構造を想定して、導波路幅やその位置、導波路の引き回し方等を考えなく良い。しかし、波面整合式は屈折率分布を更新するルールを与えるが、光回路はそれだけでは設計できない。この節では波面整合法だけではきまらない、設計上の自由度（以降、波面整合法の設計の自由度、誤解を招かなければ単にと設計の自由度呼ぶ。また、深層ニューラルネットワークとの対比という観点では、屈折率分布が波面整合法から決められるパラメータで有ることに対して、波面整合法から決められないパラメータを深層ニューラルネットワークと同様にハイパーパラメータとも呼ぶ場合もある。）と波面整合法がどのような関係にあるか示して行く。主な設計の自由度としては、（１）波面整合法で設計対象とする屈折率分布の領域サイズ（２）屈折率分布の更新幅（波面整合式に基づく屈折率の更新場所ごとの応答感度）、（３）入力と出力の設定の自由度、（４）波長の自由度、（５）屈折率分布の初期条件、がある。それぞれについて述べていく。

(1) 波面整合法で設計対象とする屈折率分布を考える領域サイズの設計の自由度について

領域サイズ、すなわち、回路サイズとしてどれくらいのサイズがあれば良いかということについて、波面整合式では決まらない（最急降下法のアルゴリズムでは決まらない）という意味で領域サイズは波面整合の設計の自由度になっている。領域サイズを決めるには、ある特性を得るために、どれくらいの領域サイズが必要かわかれば良いが、特性を得るために必要な領域サイズを決定する方法は確立されていない。本博士論文の4-4節においては、波面整合法と深層ニューラルネットワークとの関係性を示すが、現在、活発に議論されている深層ニューラルネットワークにおいても、特性と回路規模の関係についてはスケーリング則が示されている程度で明確とは言えない状況である[27]。深層ニューラルネットワークのスケーリング則としては、学習機としての性能は、幅（1つの層のノード数）に対しては多項式で、深さ（層数）に対して指数関数で比例する、というものが多い。波面整合法で設計する光回路と深層ニューラルネットワークとは対応関係が成り立つので同様の傾向があると考えられる。ただし、光に特有の回折限界やある時間で光の到達できる範囲が有限であること等の制限があるため、そのような物理限界を考慮に入れて考える必要がある。また、物理的な制限があるため、一様分布や特定の分布を設定することで問題を統計的に単純化するような手法が使えないため、定性的な議論が難しくなる面がある。いずれにせよ、回路規模と特性の関係は今後の研究課題である。

一方、現実問題としては、回路のサイズを何らかの方法で決めなくてはならないので、実際の回路に適用する場合は、光導波路で構成する回路サイズを参考にサイズを決めて、波面整合法を適用し、特性が満たされない場合は回路規模を拡大する等に対応する必要がある。光が到達できる範囲や集光する場合に一度広げて波面を形成する等の通常の光学において考慮すべきことを取り入れることで、光回路の特性の向上や計算量を削減が期待できる。通常の光学系で考慮すべきことを波面整合法においても事前に考慮して領域サイズの設定として取り込むことが重要である。

(2) 屈折率分布の更新量 (波面整合式に基づく場所ごとの応答感度)

波面整合式について、例えば、(式 4-12) (式 4-23) の波面整合式

$$\delta\Delta(x, z) = -\eta \operatorname{Im} \langle \varphi(z) | x \rangle \langle x | \psi(z) \rangle \quad (\text{式 4-24})$$

は点 (x, z) だけの量からなっており、他の場所での屈折率分布の更新量に影響されず、独立に決められる。また、波面整合式は式 4-9 のように、評価関数 L の屈折率 (正確には非屈折率差) の変分 $\delta\Delta(x, z)$ による勾配 $\frac{\delta L}{\delta\Delta(x, z)}$ で与えられる。この勾配は、屈折率を変化させる方向を示しているが、どれだけ変化させるかは適当な正の実数 η を与えて決める。 η の与え方が設計の自由度になっている。

η を場所の関数として、領域 $\{(x, z) | \eta(x, z) = 0\}$ を設ければ、その領域は屈折率を変化させない場所として指定できる。例えば、導波路を初期条件として導波路の側面の形状のみを変化させる場合は導波路の側面以外の場所については変化させない、といったことが可能となる。この方法を用いることで、実際の光導波路回路の形状を最適化することで良い特性の回路が実現できるという報告が数多くなされている [27-35]。

図 4-5 に波面整合法で設計された典型的な 2 つのパターン例を示す。左がモザイク形状のパターン (写真は上から撮影したもの) を、右が導波路の側面の形状を、波面整合法で設計したものである。どちらも、高屈折率層をエッチングで加工した後、クラッドに埋め込む前に撮影したものである。光導波路コアと同じ厚みを持つ高屈折率層を反応性イオンエッチングで加工してパターン形状を作製するので、例えば比屈折率差 0.75% の場合、 $7\mu\text{m}$ 程度のエッチングが必要である。 $7\mu\text{m}$ 程度の深さのエッチングが必要な場合は、 $1\mu\text{m}$ 以下のパターンを作るのは非常に難しいので、 $1\mu\text{m}$ よりも大きなサイズのパターンにする必要がある。図 4-1 (a) の場合は比屈折率差 0.75% で $2.5\mu\text{m}$ のセル (矩形パターン) 単位で作製している。この大きさは、計算の離散化した点の間隔 (グリッド間隔と呼ばれ波長の $1/10$ 程度以下にしておくのが望ましい) よりも非常に大きい。つまり、この場合も、完全に自由な形状でパ

ターン化しているのではなく、作製上の制限を設定してパターンが設計されている。図 4-1(b) も比屈折率差 0.75% の導波路コア層を加工したもので、側面の形状に限定してパターン化している。非常に細かいパターンができていますが、これは他の部分に支えられているのでパターンが倒れることなくできている。しかし、このような細かいパターンが連続すると加工できなくなるなどの問題が出てくるのが予想されるので、その点を考慮した制限条件を加えて設計する必要がある。このような制限を掛けられるのは、波面整合式が各点で独立した条件として与えられているからである。

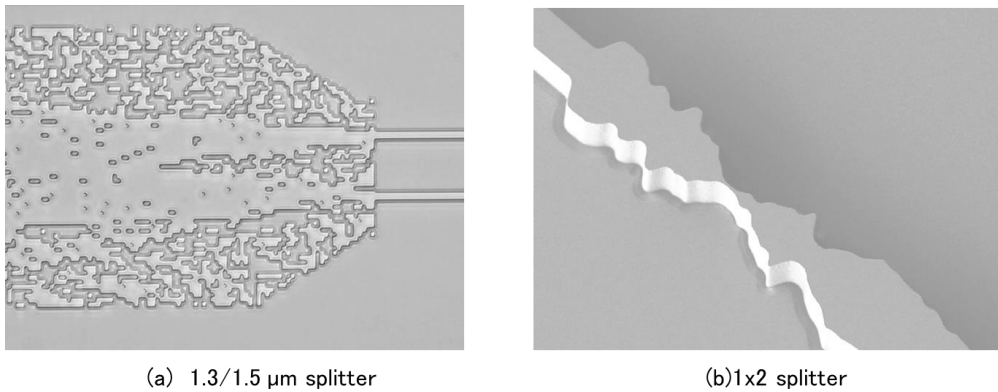


図 4-5 波面整合法で設計されたパターン例

また、実際の光回路においては、使われる材料によって取りうる屈折率値が限定される。

たとえば、屈折率の値の最大値 n_{\max} と最小値 n_{\min} に対して、

$$n_{\min} \leq n(x, z) - n_{\text{ref}} \eta \text{Im} \langle \varphi(z) | x \rangle \langle x | \psi(z) \rangle \leq n_{\max} \quad (\text{式 4-25})$$

とすることで η の値を用いて屈折率分布の取りうる値を調整することができる。例えば光導波路のようにコアとクラッドの 2 値でどちらかの値になるようにする必要がある場合は η は屈折率の値として 2 値の値どちらかを与える関数であるような関数と考えれば良い。以上のように、設計上の都合に応じて、どの場所の屈折率をどれくらい変えるべきか、ということについて制限条件を設けて、その制限条件を場所や場所ごとの屈折率値の関数 η として

与えて、波面整合式との積として屈折率分布を変化させれば、制限条件と屈折率変化の方向性との論理積をとったことに対応するので、これを用いることで所望の制限条件に従った光回路設計できることがわかる。逆に屈折率分布のモデルとしては、モザイク状のものや導波路側面を変化させるもの、光回路のパラメータをきめて、そのパラメータを変化させるもの等、さまざまなものが考えられるが、屈折率分布のモデルの選択は、設計者が行う必要があり、設計の自由度となっている。

では、制限条件により波面整合式を無視する部分の影響はないのだろうか？ 結論としては、影響はあるが、その影響は以下のように拡散されて解消されることが期待できる。波面整合式は、 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ との位相差を打ち消すように屈折率分布を変化させるという式になっている。したがって、波面整合式に従って屈折率を変化させなかった部分については、その場所から点光源として、位相が期待からずれた光が伝搬されることになる。点光源からは光が回折して広がっていくので、結局、他の場所に位相差を発生させることになる。位相差が発生した点のうち屈折率を変更しても良い点で位相差を低減するように屈折率を変更して辻褃をあわせて行くことになる。それを繰り返して行けば、十分な回路規模があれば、回路全体としては最終的に位相差がない回路に収束していくことが期待できる。十分な回路規模とはどれくらいの規模であるかは(1)の領域サイズの設計の自由度に関する議論のとおり、現状は明確に設計する方法はなく、深層ニューラルネットワーク等の知見等を取り込むなどして、今後解明にしていくべき課題である。

(3) 入力と出力の設定の自由度

図 4-1 にあるように光のフィールドとして入力 $|\psi_0\rangle$ と出力 $|\phi_0\rangle$ を与えて屈折率分布を決定するというのが波面整合法であるので、入出力の光のフィールドは自由に設定可能である。導出方法から明らかなように、複数の光のフィールドの入力と出力の組

$|\psi_0^q\rangle, |\varphi_0^q\rangle (q=0,1,\dots)$ を設定しても良いが、その場合、それぞれの組が独立している必要がある。独立の意味は、

$$\langle \psi_0^q | \psi_0^{q'} \rangle = \langle \varphi_0^q | \varphi_0^{q'} \rangle = \begin{cases} 0 (q \neq q') \\ 1 (q = q') \end{cases} \quad (\text{式 4-26})$$

となっていることである。ここで考えている光回路は線形回路なので、直交した状態は光回路を伝搬した後も直交するので、入力の状態で直交させておけば互いに混ざることなく、直交した入力を設定するならば、出力も直交している必要がある、という条件になっている。このときの入出力の組それぞれについての波面整合式が考えられるので、屈折率分布の変化の方向が同じであればその方向に変化させればよい。同じでなければ、例えば多数決で（あるいは、重みをつけて）変化の方向を決める等すればよい。向きがうまく合わなかったものがあっても、本節の（2）で述べたとおり、位相のずれが拡散されて別の場所で解消されることが期待できる。典型例としては、(式 4-12) (式 4-23)の波面整合式を用いて、複数の入力と出力の組に対する波面整合式として

$$\delta\Delta(x, z) = -\sum_q \eta_q \text{Im} \langle \varphi^q(z) | x \rangle \langle x | \psi^q(z) \rangle \quad (\text{式 4-27})$$

等が考えられる。この式を採用することは、入出力の組それぞれの評価関数の和で表される評価関数を採用したことに対応する。また、 η_q は勾配に対してどれくらい屈折率を変化させるかという係数であると同時に q に対する重みとなっている。実際に計算を行う上では、この式は入出力の組それぞれについて光の伝搬の計算を行う必要があることを意味する。一見すると、 $|\psi\rangle = \sum_q |\psi^q\rangle, |\varphi\rangle = \sum_q |\varphi^q\rangle$ というように、まとめて計算すればよいように思えるが、 $|\psi^q\rangle$ を $|\varphi^{q' \neq q}\rangle$ に変換することを目指した設定になって、入出力の組の間で混ざり合ってしまう意図する回路とならないので、独立に計算しなければならない。

次に、入力と出力の組の独立でない場合どのようなようになるか考えてみる。極端な例として、 $|\psi_0^q\rangle, |\phi_0^q\rangle (q=1,2,\dots)$ で出力がすべて同じ場合 $|\phi\rangle \equiv |\phi_0^q\rangle$ を例にとる。すべての入力が結合率 1 で $|\phi\rangle$ に結合することを目指す入出力の設定である。仮に、意図どおりに回路が実現できたとすると、逆側から光を入力した場合に、各入力 $|\psi_0^q\rangle$ に分割されることから光回路の相反性が成り立たないので、そのような回路ができないことは自明である。しかし、波面整合法を行う計算上の設定としては可能である。そこで、その場合どのようなことなるかを見てみると、波面整合式は $|\psi(z)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_q \frac{\eta_q}{\eta} |\psi^q(z)\rangle, \eta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_q \eta_q$ として

$$\begin{aligned} \delta\Delta(x, z) &= -\sum_q \eta_q \text{Im} \langle \phi^q(z) | x \rangle \langle x | \psi^q(z) \rangle = -\eta \text{Im} \langle \phi(z) | x \rangle \langle x | \sum_q \frac{\eta_q}{\eta} |\psi^q(z)\rangle \\ &= -\eta \text{Im} \langle \phi(z) | x \rangle \langle x | \psi(z) \rangle \end{aligned}$$

となり、 $|\psi^q(z)\rangle$ を重ね合わせた新たな 1 つの入力 $|\psi\rangle$ と出力 $|\phi\rangle$ の組を考えるのと同じことになる。したがって、この設定で計算を実行すると、各入力 $|\psi_0^q\rangle$ が振幅に対する重み η_q/η で（従って、強度として $(\eta_q/\eta)^2$ の重み）で $|\phi\rangle$ に結合する回路が実現されることになる。

一般の場合についても考えることができる。計算は煩雑なので Appendix A.3 に一般の入力と出力の組が独立でない場合を示した。結論としては、特異値分解を用いることで、独立でない入力と出力の組 $|\psi_0^q\rangle, |\phi_0^q\rangle (q=1,2,\dots)$ ではなくて、特異値分解で決まる良い基底（独立な基底）を選ぶことができ、少ない入出力のペアで計算量を減らして波面整合法を行うことができる。このとき上述の場合と同様に、独立でない入力と出力の組 $|\psi_0^q\rangle, |\phi_0^q\rangle (q=1,2,\dots)$ を設定しても光回路は相反性が成り立たないので実現されず、特異値分解で決まる特異値ベクトルの組を入出力に設定した光回路が実現される。

これ以外に、入力と出力の組 $|\psi_0^q\rangle, |\varphi_0^q\rangle$ ($q=1,2,\dots$)の位相を考慮しなくてもよい場合には、入出力に関わる設計の自由度として、位相も波面整合法の設計の自由度となる。たとえば、光の強度を分岐する回路においては、分岐された光の位相や分岐された光の間の位相については不問であることが多い。光回路において異なる入力と出力の組の間で異なる入出力ポートを使う場合は入出力の組の間の位相関係は関係ないが、入出力ポートを共有する場合は独立性を表す(式 4-26)を成立させるために制限が生じる。ここでの議論では入力と出力はそれぞれ独立に議論できるので、簡単のため出力側だけを考える。出力ポートを $|p_m\rangle$ ($m=1,2,\dots$)として、出力ポート以外には光は出力されないことを想定する。出力 $|\varphi_0^q\rangle$ は各ポートの重ねあわせとして

$$|\varphi_0^q\rangle = \sum_m u_{qm} |p_m\rangle \quad (\text{式 4-28})$$

と表せる。独立の条件(式 4-26)より

$$\langle \varphi_0^q | \varphi_0^{q'} \rangle = \sum_m u_{qm}^* u_{q'm} = \delta_{qq'} \quad (\text{式 4-29})$$

が求められる。ポート数ぶんだけ出力のフィールドを設定する場合、 u_{qm} を行列の要素とせば、 u_{qm} を要素とする行列 $U=[u_{ij}]$ はユニタリ行列でなければならぬことがわかる。このような制限がある一方、自由度も残されている。ポートのフィールド $|p_m\rangle$ に対して、出力のパターンの番号 q に関係ない位相 $e^{i\theta_m}$ を付け加えて $|p_m\rangle \rightarrow e^{i\theta_m} |p_m\rangle$ としても式 4-29 は不変である。この位相の付け替えを可能にする自由度を使うことにより回路特性を改善できる場合がある。これについて、節 4-3 で例を示す。

(4) 波長に関する設計の自由度

ここまでの波面整合法に関する議論では伝搬定数 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\text{ref}}$ を決めて、波長 λ の単色光で議論を進めてきた。つまり、光回路が波長に対してどのような特性になるかは波面整合法の範囲では規定していないので波面整合法の設計の自由度となる。波長領域を使った信号処

理や分光は光回路の重要な応用であり、波長が波面整合法においてどのような影響を与えるかを知ることは重要である。以下、波長の変化に対する回路特性の変化を考察する。

まず、波面整合法では評価関数 L の屈折率（正確には比屈折率差）の変分 $\delta\Delta(x, z)$ による勾配 $\frac{\delta L}{\delta\Delta(x, z)}$ が 0 とみなせるときに計算を完了して、屈折率分布を得ている。すなわち、屈折率分布の変化 $n_{\text{ref}}\delta\Delta(x, z)$ に対して評価関数 L が極値となっている。そしてこのとき、波長変化に対しても評価関数 L が極値となることが期待できる。これは次のように考えれば良い。波長 λ を $\delta\lambda$ だけ変化させたとき、伝搬定数 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\text{ref}}$ が一定になるように、参照屈折率 n_{ref} を δn_{ref} だけ変化させるとすると、1 次の近似で伝搬定数 β の変動は 0 となる式 $\delta\beta = \beta \left(\frac{\delta n_{\text{ref}}}{n_{\text{ref}}} - \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = 0$ が成り立つ。この参照屈折率の変化 $\delta n_{\text{ref}} = n_{\text{ref}} \delta\lambda / \lambda$ は場所によらない比屈折率差の変化 $\delta\Delta = \delta n_{\text{ref}} / n_{\text{ref}} = \delta\lambda / \lambda$ を与えるのと同じになるので、 $\Delta(x, z)$ が評価関数 L に極値を与えている場合は、評価関数 L は 1 次の精度で変化しないので、 $\delta\lambda$ に対しても 1 次の精度で変化しないことになり、波長についても極値となることがわかる。

従って、屈折率の変化、波長の変化に対して、評価関数 L の 1 次の近似で変化しないことから、波面整合法により実現される光回路は、作製誤差や屈折率のゆらぎの影響を受けにくく、波長依存性が少ない回路になることを示している。このことは光導波路回路で単純な Mach-Zehnder 干渉計やマルチモード干渉計の導波路幅や波長依存性をなくす（変化に対して極値をとらせる）ためには特定の条件が必要なのは対照的な特性である。

なお、注意すべき点がある。屈折率分布の各点での値やパターンに制限を課した場合、屈折率分布は制限の範囲で評価関数の極値を与えることになる。一方、波長にはそのような制限がかかっていないので、評価関数が波長の変化に対して極値とはならない場合が発生する。光導波路回路について考えてみると、光導波路回路においては屈折率分布が導波路形状に限定されているため、一般には光導波路パターンや屈折率の値がすると特性がずれてし

まう。光導波路回路で製造誤差等に強い（特性が安定な）光回路にするためには導波路幅や光導波路回路の長さについて極値となるような設計をする必要がある。波面整合法の場合も同様に、光導波路と類似の回路、すなわち、光導波路側面の形状を最適化するような光回路を考える場合は、波長に対して評価関数が極値とならない光回路になると予想される。

また、屈折率の変化、波長の変化に対して、評価関数 L の 2 次の変化については、波面整合法は何も制御していない。2 次の変化を具体的に計算するには 2 点間の相関を考える必要があるため膨大な計算が必要になる。(2) 経路積分の手法に基づいて考えると、光の伝搬は複数の経路の足し合わせで得られ、複数の経路を経由した光の位相が一致している場合、強い出力となる、と解釈できる。元の波長では強め合う干渉となっていた経路が、波長の変化によって経路の間の位相がずれることにより像が崩れると解釈できる。このような描像に基づくと経路のばらつきが大きければ大きいほど（経路長の差が大きいほど）波長依存性が大きくなることが予想できる。具体的には回路が大きい場合や、非対称性が大きな回路はそのような傾向が強いと考えられる。逆に、入力と出力の組 $|\psi_0^q\rangle, |\phi_0^q\rangle (q=1,2,\dots)$ において各組の間の独立性を表す式 4-26 は、同一の波長に対するもので、異なる波長については成立する必要がない。このことを利用して、同じ入力と出力の組で異なる波長を設定すれば、波長に対する特性変化を抑制することが可能となる。例えば、波長に対して平坦な透過特性を得ようとする場合に、どのように波長を設定すべきかは自明ではない。上記のとおり波長の変化に対する 2 次の変化は計算が困難なので、現状は実際に計算して試行錯誤しなければならない。具体的には、波長依存性を確認し、評価関数 L の極小値/極大値からの変化の許容範囲を与える波長範囲で複数の異なる波長について同じ入力と出力の組で波面整合法を適用して光回路を生成する、という方法を取れば良い。これについても次節 4-3 で例を示す。

(5) 屈折率分布の初期条件

波面整合法により得られる解は極値条件を与えるのみで、唯一の解を与えるものではない。波面整合法では、屈折率分布の初期値から少しずつ屈折率分布を変化させ極値となる屈折率分布に収束させるので、屈折率分布の初期値依存性がある設計手法になっている。屈折率分布の初期値をどのようにすべきかの一般的な理論はなく設計の自由度である。光導波路として考えられている光回路の場合は、その光導波路を屈折率分布の初期条件とすると良い結果が得られやすいと想像される。波面整合式は光のフィールドの入射側からの伝搬光と出射の側からの逆伝搬光の複素振幅の積で決まるので、そもそもどちらかの光が弱い場合は、ノイズ等の影響により波面整合式の値が不正確になり、適切な回路が形成されない場合がある。そのため、できるだけ入射側からの伝搬光と出射の側からの逆伝搬光が重なるように屈折率分布の初期値を設定する必要がある、光導波路構造を初期値とすることで効率よく計算が進むと期待できる。これについても次節 4-3 の例の中で考察する。

(6) その他

設計の自由度ではないが、波面整合法を用いることにより得られることとして光回路の小型化がある。これは光導波路路界面のような全反射を含んだ多重反射により光回路が形成されることに起因する。光導波路では導波路とクラッドの界面において光は全反射されて導波路内に光が閉じ込められる。これは、波数成分として多くが伝搬方向に割り振られ、伝搬方向に垂直な横方向の波数が小さいために、わずかな屈折率差でも全反射が実現されていると解釈することができる。逆に伝搬方向に光導波路をクラッド中で分断しても、導波路とクラッドの界面での反射は垂直に入射した光の反射式に従い全反射とはならない。波面整合法においては、光導波路とクラッドの界面の全反射のような強い反射からなる多重反射が取り込まれて屈折率分布を決定する計算が行われる。このことは光導波路グレーティングのような弱い反射を多重にしたような回路に用いられる Fourier 変換に基づく計算

が適さないことを意味する。逆に、定性的には、強い反射が波面整合法の計算に取り込まれているので、弱い反射で多重反射させて広い領域を用いる光導波路グレーティングとは異なり、光回路の小型化が期待できる。

この節で取り上げた設計の自由度を表 4-2 にまとめた。

表 4-2 設計の自由度と波面整合法で設計する光回路への適用についてのまとめ

設計の自由度	光回路への適用	課題等
(1) 領域サイズ	・光回路のサイズが光回路の性能に影響	・サイズと特性の関係は未解明 ⇒深層ニューラルネットワークと対応づけ、その知見を活かす (本博士論文の 4-5 で議論)
(2) 屈折率分布の更新量(場所ごとの波面整合式への応答感度)	・光回路に対する制限条件として使用 例1)屈折率分布の変化を光導波路の側面に限定 例2)屈折率の値を2値に限定	・上記と同様に深層ニューラルネットワークと対応づけ等で検討しておく必要がある
(3) 入力と出力の設定	・入出力の設定での独立性や実現可能な組み合わせが制限される ・複数の入出力ポートを使う場合に位相の自由度も使うことができる (本博士論文の 4-4 で例を示す)	・入出力の設定での独立性をみたくない場合は、特異値分解した独立な組み合わせに収束する
(4) 波長	・入出力の設定での独立性に関係なく波長を独立に設定可能 ・同じ入出力の組に複数の波長を設定することで広帯域化等が可能 (本博士論文の 4-3 で例を示す)	・拘束条件がなければ設計波長で透過率がピークになるが、屈折率分布に制限を課した場合や、2次の精度でどのように変化するかは不明 ⇒試行錯誤が必要
(5) 屈折率分布の初期条件	・得られる解に屈折率分布の初期条件依存性がある ・屈折率分布初期値として入力の伝搬光が所望の出力光と重なりがあると計算の収束等が早くなる	・屈折率分布の初期値としてどういものがよいか(所望の特性にどのように影響するか)は未解明

波面整合法は計算に基づき屈折率分布を決定するアルゴリズムを与えるが、設計の自由度をどのように使うかで光回路の形態や特性が変わってくる。波面整合法では導波路パラメータ制御法と異なり、パラメータでモデル化されてないため、設計の自由度についてもどのように決めるべきかという方針が立てにくく、さらなる検討の余地がある。近年、発展の著しい深層ニューラルネットワークにおいても同様の課題が多く議論されている。本博士論文では本節で提示した設計の自由度を活用するための足がかりとなるように、節 4-4 で深層ニューラルネットワークとの対応関係を考えて、深層ニューラルネットワークの手法の適用可能性についても検討する。

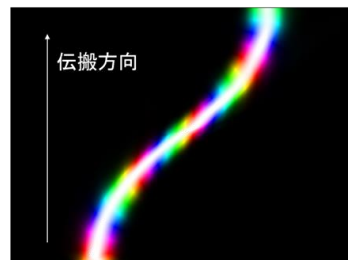
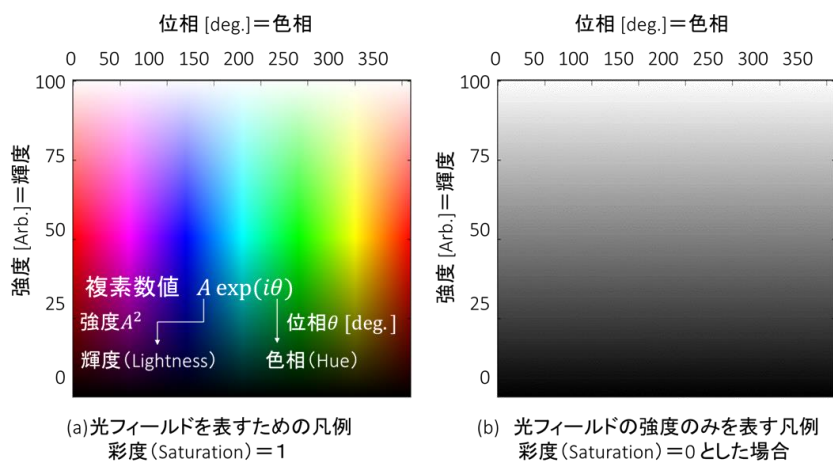
次の節では、ここまでに示した手法のいくつかについて、光回路の設計に適用例を示す。

4-3. 波面整合法による設計例

前節までの光回路の設計に関する議論をもとに設計例を示す。波面整合法を用いて設計された光回路については、既にさまざまな回路提案がなされて、実際に作製されている。例えば、光パワースプリッタ[28]、アレイ導波路格子の低損失化[29]、交差導波路のクロストーク抑制[30]、マルチモード干渉計[31]や可視光カプラの広帯域化回路[32]、空間多重伝送用のモード変換器[33]、非対称分岐回路[34]、スポットサイズ変換器[35]、近年では、空間光変調器を多段につないで空間光変調器のパターンを波面整合法で設計し構成した超多モード合分波器 [36]等がある。

以上の応用例に加えて、今後さらに波面整合法を発展させるためには、前節であげた波面整合法だけではきまらない設計者がきめるべき自由度（設計の自由度）を使い、設計手法を高度化することが望まれる。そこで本節では、そのような波面整合法の設計の自由度等を用いた設計例を示す。この節の設計例は、特性を改善や実際に光回路を作ることではなく、波面整合法に関する手法の検証である。したがって、作製可能性については本節では特に考慮しないで議論をすすめる。回路の特性は数値計算により得られたものである。

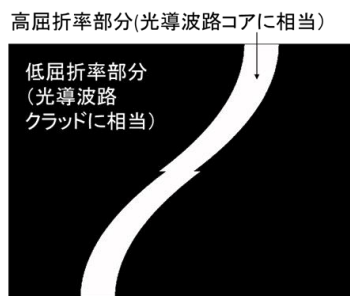
例を示す前に、光のフィールドと屈折率分布との表示方法について説明する。光のフィールドとしては振幅と位相があるので、2つの値を同時に示すために、色モデルのHSL（色相（Hue）、彩度（Saturation）、輝度（Lightness））モデルにマッピングすることとした（図4-6(a)）。振幅については2乗して強度として輝度に割当て、位相は色相に割り当てる。彩度は1として固定する。彩度を0に変更すればグレースケールが得られる（図4-6(b)）。



(c) 凡例(a)を使った光のフィールドの表示



(d) 凡例(a)を使った、 $\exp(i\beta z)$ を含む光のフィールドの表示



(e) 屈折率分布の表示例

(c)~(e)に関するパラメータ
領域 $x: -15 \sim 45, z: 0 \sim 250 \mu\text{m}$
波長 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$
屈折率 $n_{\text{ref}} = 1.45$ 比屈折率差 0.75%

図 4-6 光のフィールドと 2次元の分布を表示する際の光回路の表示方法

これを適用した光の伝搬の表示例として、S字型の曲線導波路を伝搬する光のフィールドの様子を示す(図 4-6 (c))。この場合、強度の最大値を 1 として表示している。伝搬の方向はこの例に示すように下から上に伝搬方向をとる。注意が必要な点としては、この位相は緩慢変化包絡線近似 (SVEA : Slowly Varying Envelope Approximation) によって得られる包絡振幅 = 平面波 $\exp(i\beta z)$ の振幅部分の位相、すなわち、 $\Psi(x, z) = \psi(x, z)\exp(i\beta z)$ としたときの $\psi(x, z)$ の位相を示しており、伝搬方向に βz で変化する位相を付け加えた $\Psi(x, z)$ の位相が真の電磁波に位相になる。図 4-6 (c) は伝搬方向 $500\mu\text{m}$ の距離を伝搬させた光のフィールド $\psi(x, z)$ である。この光のフィールド $\psi(x, z)$ に βz で変化する位相を付け加えた $\Psi(x, z)$ の位相変化をプロットすると図 4-6(d) のようになる。 βz は波長 $1.55\mu\text{m}$ 、屈折率が 1.45 なので約 $1\mu\text{m}$ で 2π 近く変化するので、ほとんど水平な横縞になり位相の変化の様子などがわかりにくくなってしまうので図 4-6 (c) の包絡振幅部分を表示させる。屈折率分布については、以下の計算等の例では光導波路でいうとステップインデックス型に対応する 2 値のパターンのみを取り扱う。図 4-6(e) のように白色が高屈折率、黒が低屈折率を表す。領域の範囲や、屈折率の値等の数値についてはそれぞれの例で異なるので適宜値を示す。

(1) 光位置変換回路への適用と屈折率分布の初期値の影響

最初の例として光回路としては光導波路の S 字曲げ回路に相当する光位置変換回路を取り上げる。第 3 章 3-3(c) と同様の回路で、比屈折率差 0.75%、導波路幅 $6\mu\text{m}$ 、入力と出力の横方向の位置の差 (位置変換量) は同じ $30\mu\text{m}$ としている。回路の伝搬方向の長さは第 3 章 3-3(c) の半分の $250\mu\text{m}$ にしている。円弧で回路を構成した場合の曲率半径は、位置変換量に対して回路の伝搬方向の長さが十分に大きい場合は伝搬方向の回路長の 2 乗分の 1 に比例するので、この場合の曲率半径は 3 章 3-3(c) の曲率半径の約 $1/4$ に相当することになる。そのため、3 章 3-3(c) の場合は 0.1dB 程度の透過損失で回路が実現できたが、ここで考え

ている設定の場合は、光は曲がりきらずに光導波路から逸脱して大きな放射損失が発生する。図 4-7 に波面整合法で設計した光回路パターンを含むいくつかの回路パターン (a)～(g)-1 と光の伝搬の様子 (a)～(g)-2 を表す。光の伝搬は波長 $1.55\mu\text{m}$ のときの様子である。図 4-8 に波長に対する透過率を示す。

図 4-7、図 4-8 の (a) は 3 章 3-3(2) の定曲率の円弧をつないで作った回路 (定曲率曲げ回路) に関するもので、オフセットつけたものである。曲率半径は $528.3\mu\text{m}$ で通常の光導波路回路で使われている $2000\mu\text{m}$ 程度の曲率半径と比較すると約 $1/4$ の値である。図 4-7 (a)-2 のように多くが放射し、図 4-8 の曲線 (a) の波長 $1.55\mu\text{m}$ の透過率から、その値は 33% となっている。以下同様に、図 4-7、図 4-8 (b)～(d) も同様に 3 章 3-3(2) に記載の光回路で、(b) は定曲率曲げ回路でオフセットのない光回路、(c) は曲率を z の多項式で変化させた曲率変化曲げ回路で、オフセットを持たせた光回路。(d) は (c) の曲率を z の多項式で変化させた曲率変化曲げ回路でオフセットのない光回路である。いずれの導波路型光回路において大きな損失が生じている。

これに波面整合法を適用する。屈折率分布としては四角形の 2 値パターンを並べたもので 1 つのパターンをセルとよびセルのサイズは $0.5\mu\text{m} \times 0.5\mu\text{m}$ とした。初期条件としては様々なものが考えられるが、図 4-7、図 4-8 の (a) 定曲率曲げ回路と (c) 曲率変化曲げ回路の各屈折率分布のパターンをセルのサイズで離散化したパターンを初期値としたものが、それぞれ、図 4-7、図 4-8 の (e), (f) である。それ以外に、初期値として、屈折率分布を一様に全部同じ高屈折率の値に設定したものが図 4-7、図 4-8 の (g) である。波面整合式としては 式 4-23 にある順伝搬させた光のフィールドと逆伝搬させた光のフィールドの全体の位相差については取り除くタイプのものを使用した。以下、得られたパターンや回路の特性を見ていく。

図 4-7 (e), (f), (g)-1 の屈折率分布については、概ね似たようなパターンとなっている。定曲率曲げ回路を初期値としたものは変曲点でのオフセットの正負の違いによる定曲率のパターン導波路のずれに相当するずれがあるように見えるが、他のものにはみられない。図 4-7 (e), (f), (g)-2 の位相分布をみると、一様な屈折率分布を屈折率分布の初期値とした (g) が導波路構造を初期値とした (e), (f) と比較して、出射部付近の位相が若干遅れている。これは、(g) の有効屈折率が (e), (f) のものより低下していることを示しており、(g) の高屈折率部分がわずかに少なく、また光が横方向に広がっていることからわかる。このような微妙な違いは図 4-8 に示したスペクトルでは顕著に現れる。図 4-8 の曲線 (e), (f), (g) は設計波長 $1.55\mu\text{m}$ で概ねピークをとる。ピーク的位置は 2nm 程度短波長側にずれているが、これは参照伝搬定数 β が真の伝搬定数とずれていることと計算誤差等の影響と思われる。曲線 (e), (f), (g) の裾の部分では振る舞いが大きく異なり、特に曲線 (g) では裾の落ち込みが大きくなっている。根拠を明示することは困難であるが、曲線 (e), (f) は導波路パターンを初期値としているためか、導波路パターンの場合と同様に長波長側にゆっくりと低下していくバックグラウンドがあるように見える。定性的には、図 4-8 曲線 (e), (f) は導波路と同様に光が閉じ込められている部分が多く、そのため、波長に対してフラットな成分特性を残していると考えられる。それに対して、図 4-8 曲線 (g) は図 4-7 (g) でみたとおりに、閉じ込めが弱く光のフィールドが広がっているため、設計波長からずれると損失が大きくなる。これは波面整合法の導出の 4-1(2) 経路積分の観点からみると理解しやすい。経路積分では Huygens の原理を再現してすべての経路の重ね合わせで光の伝搬が記述されていた。光のフィールドが広がっているのは経路長の異なる経路の足し合わせになっていることを示しており、波長の変化に対する位相の変化は、フィールドが広がっていないものに対して、フィールドが広がっている方が大きいことを意味する。したがって、図 4-8 曲線 (g) は図 4-7 (g) にあるように光のフィールドが広がっているため、その性質を反映して裾の落ち込みが大きくなっていると説明できる。しかし、一般的には、光のフィールドが単に広がっているだ

けではこのようなことは言えない。例えば、幅の広い導波路であれば基底モードが平面波のように伝搬するが透過率の波長依存性は極めて低い。この場合のように、光フィールドが広がっている状況でも波長に依存しない透過率が得られる。この違いはパスの長さが異なるような広がり方をしているか、一様な広がり方をしているかの違いで、図 4-7(e), (f), (g)-2 を見ると、光のフィールドの大部分が中央付近を斜めに伝搬していく経路とその脇に光が伝搬している部分があり、図 4-7 の (e)-2 は脇を伝搬する部分の強度が弱く (g)-2 は脇を伝搬する部分の強度が比較的強くなっている。これが、一種の干渉計のような役割を果たしているものと考えられる。このような干渉性のあるパスがこの回路の中には多数存在しており、そのため単峰のピークが実現されているものと思われる。

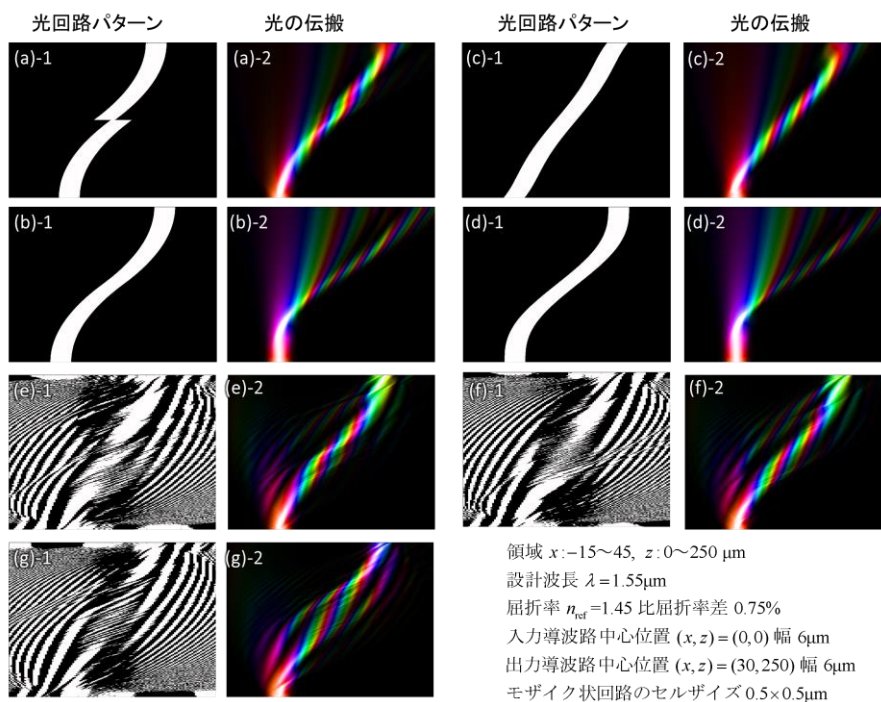


図 4-7 光位置変換回路の各屈折率分布と光の伝搬の様子

- (a) 定曲率曲げ+オフセット
- (b) 定曲率曲げ
- (c) 曲率変化曲げ+オフセット
- (d) 曲率変化曲げ
- (e) 波面整合法+「初期値：定曲率曲げ」
- (f) 波面整合法+「初期値：曲率変化曲げ」
- (g) 波面整合法+「初期値：一様高屈折率パターン」

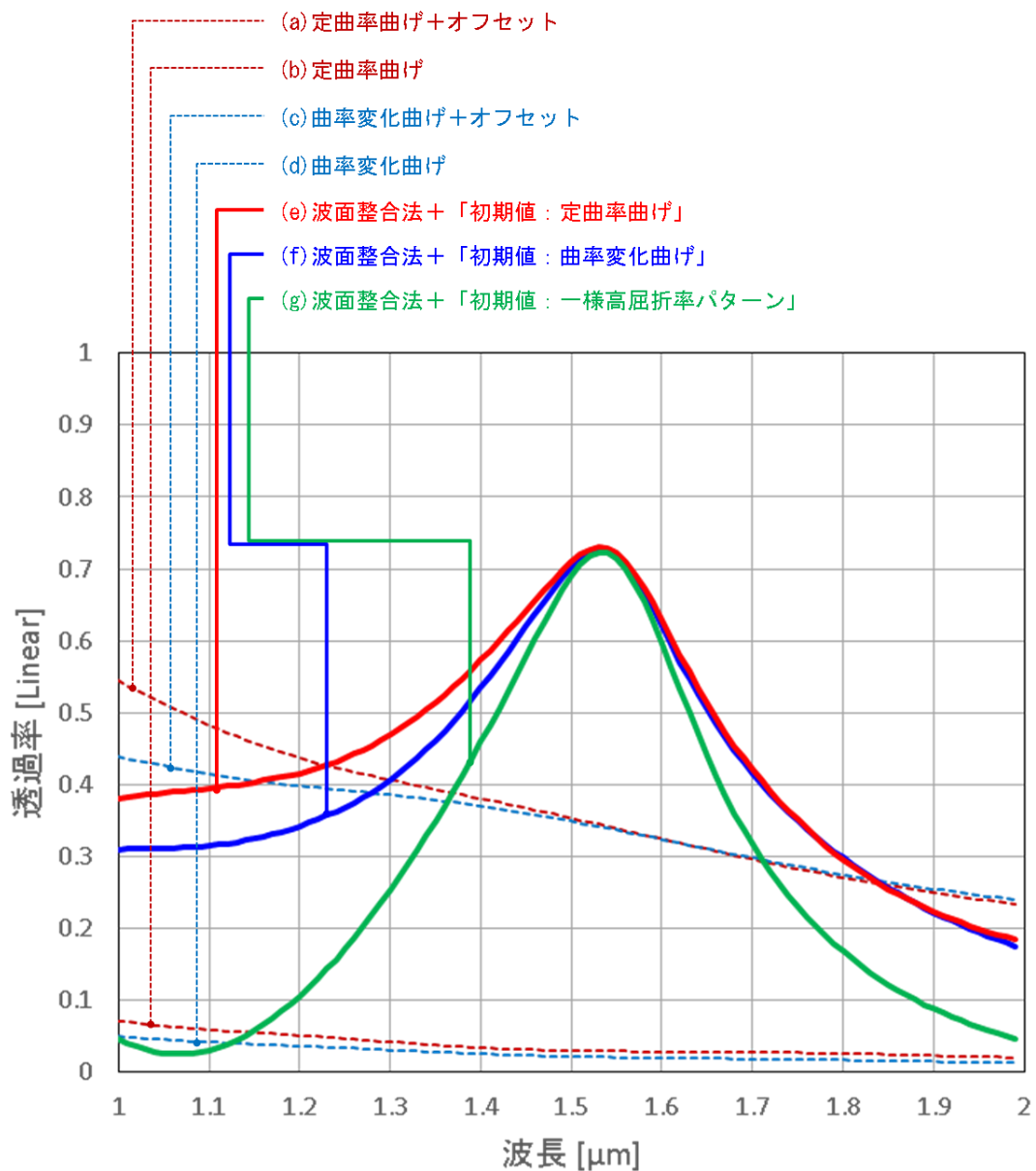


図 4-8 光位置変換回路のスペクトル
 曲線 (a) ~ (g) は図 4-7 の (a) ~ (g) に対応

以上のような特性を初期条件によって制御するのは困難であるが、屈折率分布として、導波路のような光を閉じ込めた形状を初期値とするか、一様なパターンを初期値とするかで、屈折率を更新する過程で屈折率の更新に影響を与える光の経路が異なるため特性の違いが生じると考えられる。その点を考慮して屈折率分布の初期値を決めることは有用であると思われる。

なお、屈折率分布図 4-7 曲線 (e), (f), (g)-1 においては、屈折率分布の形状としては概ね斜めの縞になっているが、それを横切る形で角度の浅い線が入っているがこれは計算領域境界での微妙な反射を反映したものでノイズのだと思われる。

(2) 経路長の複素化

前の例と同じ光位置変換回路を例に、導波路形状を制御するための方法をみていく。

具体的には、経路長の複素化と導波路側面のパターン化を例に考える。経路積分による式 4-15 を再掲すると

$$|\Psi(z)\rangle \propto e^{-i\alpha z} \sum_{x',x} |x'\rangle \left(\sum_{l \in \text{Ppath}(x',z;x,0)} \exp\left(ik_0 \int n dl\right) \right) \langle x|\Psi(0)\rangle$$

のとおり、光の伝搬は光の経路の重ね合わせで表すことができる。本節の (1) に示したように、異なる長さの干渉性のパスがあると、波長依存性が大きくなる。言い方を変えると、波長依存性を減らすためには、できるだけ短い光路を選ぶことができればよいので、長い光路についてはペナルティを受けて抑制されるようにすればよい。(式 4-15) では $k_0 \int n dl$ が光学光路長になっていて $\exp\left(ik_0 \int n dl\right)$ の位相を与えているので、光学光路長を複素化して $\exp\left(ik_0 e^{i\theta} \int n dl\right)$ とすると、 θ に応じて長い光学光路長のパスほど大きな減衰を受ける。実際の光の伝搬の計算は経路積分ではなく BPM 等で計算するので、光の伝搬の計算においては $\exp\left(ik_0 e^{i\theta} \int n dl\right) = \exp\left(ik_0 \int n \frac{dl}{dz} e^{i\theta} dz\right)$ より、微小ステップ Δz を $e^{i\theta} \Delta z$ に置き換えれば良い。図 4-9 は、本節 (1) の曲率を変化させた曲げ導波路 (図 4-7 (c)-1) を初期値として波面整合法を適用した例 (図 4-7, 8 の (f)) について、伝搬方向を複素化したものである。 $e^{i\theta} \Delta z$ の角度 θ を変えて得られた、屈折率分布と $\lambda=1.55\mu\text{m}$ の光の伝搬を示している。 $\theta=0, 5/60, 10/60, 20/60$ [rad] で変化させた。角度 θ が大きくなるにつれて細かいパターン

が消失して、島になっているパターンが明確になっているのがわかる。すなわち導波路回路のような形になってきている。

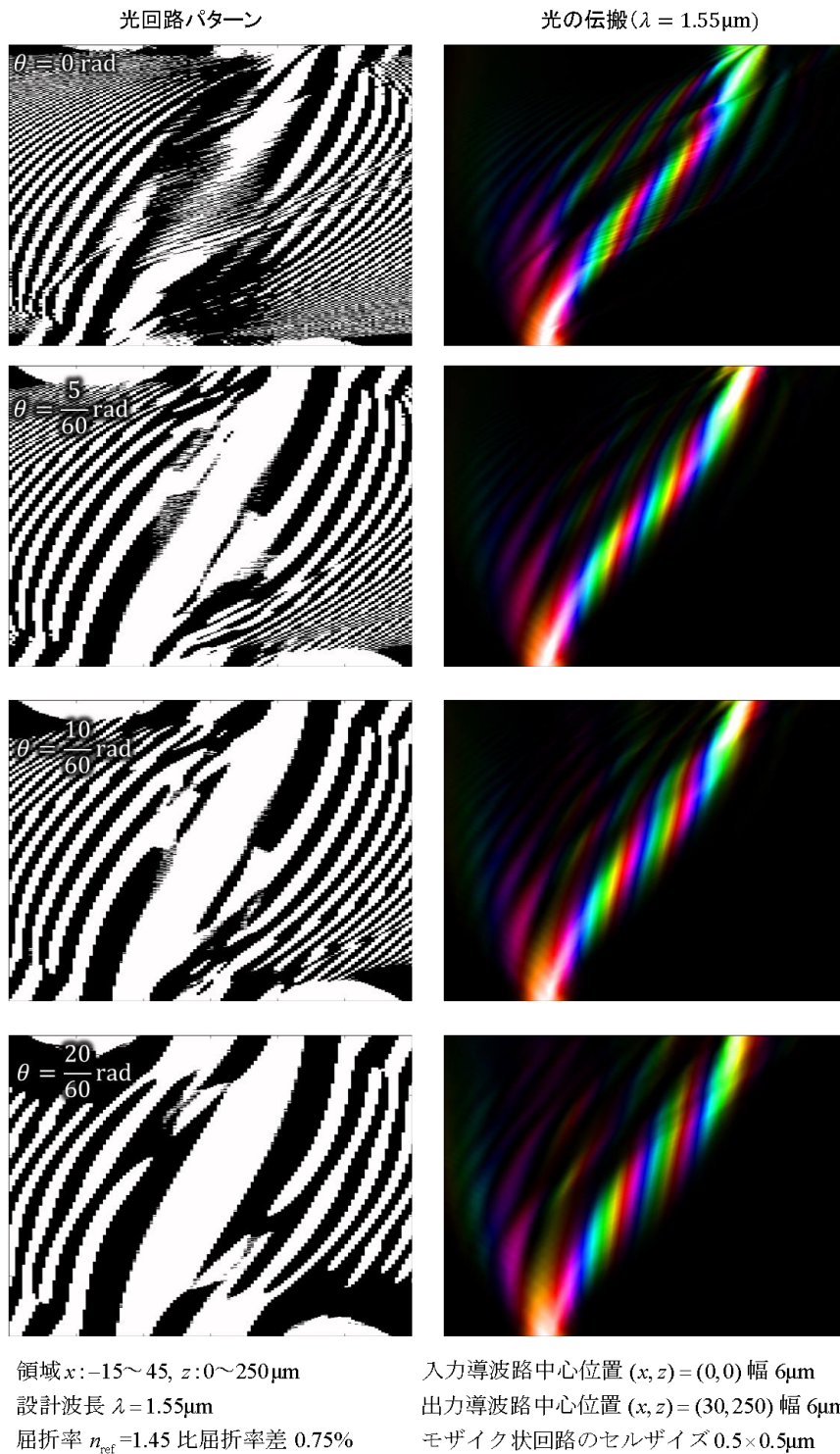


図 4-9 伝搬方向を複素化した波面整合法を光位置変換回路

適用して得られた屈折率分布のパターンと光の伝搬の様子

図 4-10 は図 4-9 の各角度 θ で得られた屈折率分布の光回路の透過スペクトルである。角度 θ が大きくなるにつれてピークが潰れて、さらに透過率が低下していることがわかる。このことは次のように理解できる。伝搬方向を複素化したことで、横方向に広がる経路は経路長が長くなるのでペナルティを受ける。横方向に光が進む光は横方向に波数成分を持っているので、ペナルティを受けやすく、結果として、横方向に高い波数成分を発生させる細かい屈折率分布が抑制されることになる。 θ が大きくなるにつれて透過率が減衰するのは、横方向の高い波数成分については無視して屈折率分布を決めているため、急角度で光を曲げるときに発生する横方向の高い波数成分も区別なく抑制されてしまうため、光を曲げるのに必要な成分を取り込むことができず損失が発生してしまうと考えられる。高い波数成分が抑制されることは式 4-15 を波動方程式に代入して得られる発展方程式でも確認できる。

$$i \frac{\partial}{\partial z} |\psi\rangle = e^{-i\theta} \left(-\frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \beta \Delta(x, z) \right) |\psi\rangle \quad (\text{式 4-30})$$

より、右辺の $e^{-i\theta}$ の虚数成分、すなわち、 $\sin\theta$ に比例する項が熱元をもつ熱拡散方程式と同じ形の項を与える。特に $\sin\theta=1$ のとき、熱元をもつ熱拡散方程式に完全に一致する。この拡散方程式は、数値計算で基底状態を求める虚軸伝搬法の式として知られている。虚軸伝搬法は、伝搬方向を複素化するのではなく完全に虚数にして拡散方程式とする。このとき右辺の演算子（あるいは行列）の固有モードに着目すると、解は固有値を減衰率とする固有モードの重ね合わせで表される。基底モードに対して高次モードの固有値が大きくなることから、高次モードの方がより大きな減衰を受ける。虚軸伝搬法は、これを使って、基底モードの相対的な成分比を伝搬方向に増大させて、実質的に基底モードのみにすることで基底モードを求める方法である。虚軸伝搬法は、モードが存在する任意の位相パターンに対して固有モードを BPM と同じアルゴリズムで計算できることから、BPM を使う数値

計算ではよく使われる手法である。(式 4-30)のように複素化した場合も、固有値と $\sin \theta$ に比例して減衰が発生し同様のことが起きる。すなわち、経路長のペナルティは高次モード（横方向の波数が大きな成分）を減衰させていることになり、経路積分を用いた解釈と一致する。図 4-10 のスペクトルの波長依存性のうちピークのシフトについては経路積分の表式の方が容易に解釈できる。光学経路長を考えたとき波長が長い方が少ない光路長差を与えるので、結果として、 θ が大きい場合は、波長の長い方の透過率が高くなり、出来上がった光回路の長波長側の透過スペクトルが高い値となる。一方、干渉は設計波長 $1.55\mu\text{m}$ で設計されているためピークは $1.55\mu\text{m}$ 付近となる。その効果が掛け合わさって θ が大きくなる時ピークが長波長側にシフトすると解釈できる。

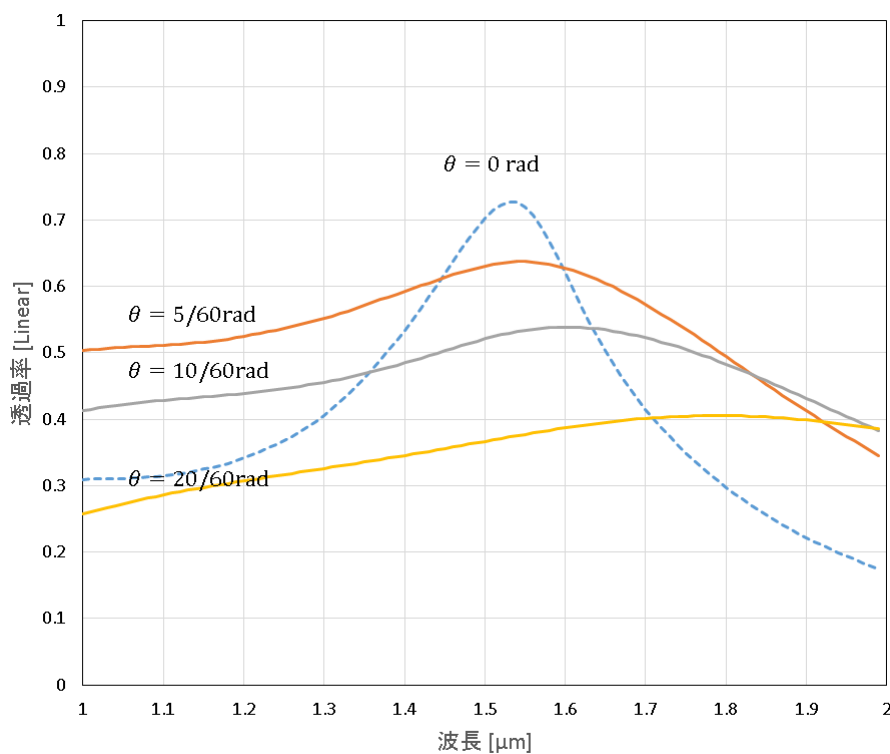


図 4-10 伝搬方向を複素化した波面整合法を光位置変換回路に適用して得られた光回路のスペクトル

ここまでの議論で経路長の複素化により横方向の波数の大きな成分が抑制できることを見てきた。経路長の複素化の度合いにより減衰が大きくなっている例を示したが、これは

極端に短い距離で光の出射位置を変更するような回路を設定したため（曲率半径換算で通常の1/4に相当）、光を曲げるために横方向に大きな波数を持つ成分を多く発生させなくてはならない光回路であったためである。通常であれば、複素化の手法は、損失を無視できる範囲で、細かいパターン発生を抑制する場合や、あるいは、高次モードを抑制することで安定した特性（たとえば波長依存性を少なくするなど）を得るための手段として用いることができる。今後実回路の設計にも取り入れられていくことに期待したい。

(3) 導波路側面のパターン化

次に、導波路側面のパターンに限定した例を見てみる。前の例と同じ光位置変換回路を例に、導波路側面のパターンとして回路を実現するとどのような特性が得られるかを考察する。図4-11は導波路側面のパターンに屈折率の変更を限定して波面整合法で生成した屈折率分布のパターンである。先の例と同様に複素化により横方向の波数の大きな成分に対してペナルティを与えた。その際のパラメータも同じ角度 θ を用いた。いずれの場合も図4-7の(c)と同様に光のフィールドが回路に入射された直後に多くを放射している。 $\theta=0$ では屈折率分布に細かいパターンが発生しているが、 θ が大きくなるに従って次第に滑らかになっているのがわかる。図4-12にそれぞれの回路のスペクトルを示す。参考に曲率を変化させてさらにオフセットを加えた曲げ導波路回路のスペクトル（図4-8(c)と同じもの）も併せてプロットした。 $\theta=0$ のとき曲率を変化させた曲げ導波路回路と比較して0.15程度透過率が向上している。この場合、設計波長 $1.55\mu\text{m}$ がピークとはなっておらず、曲げ導波路回路と同じく波長が大きくなるに従い透過率が低下している。設計波長 $1.55\mu\text{m}$ は、その通過点でしかない。設計波長が透過率のピークとならないことは、前節4-2(4)の波長の設計自由度について述べた際に触れたとおり、屈折率分布の変化を導波路側面に限定するという制限を加えているため発生していると考えられる。

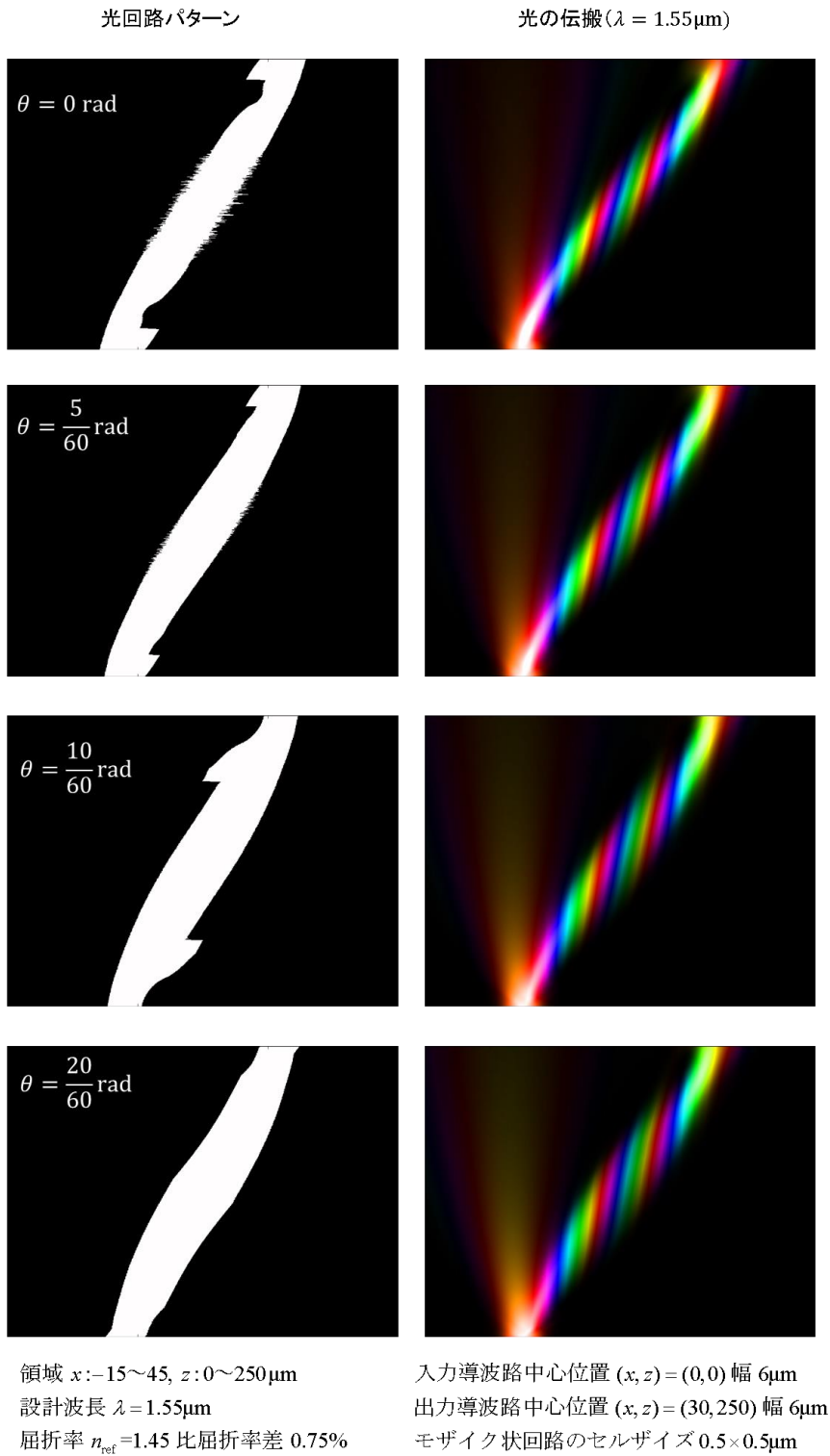


図 4-11 光導波路側面の形状を波面整合法で設計した光位置変換回路

一般に波長が短いほど弱い屈折率差で光を導波路に閉じ込めることが可能となる。たとえば、変分法により得られた光導波路のパラメータ間式(式 3-16) $\sqrt{2/\pi}\beta^2 W_w \Delta e^{-(W/w)^2/2} = 1$ においては、 $\beta^2 = (2\pi n_{\text{ref}}/\lambda)^2$ なので、波長 λ の 2 乗分の 1 と比屈折率差 Δ との積が一定であれば同じ導波路幅の回路で同様の光のフィールド半径が得られるという式になっている。これより、波長 λ が小さくなることは比屈折率差 Δ をその 2 乗倍大きな値にするのと同様の効果があると考えられるので、光導波路の構造があれば、短波長の光フィールドは光導波路により閉じ込められやすくなる。そして、波長が短ければ、光フィールドは基底モードのままではなくとも光導波路に閉じ込められて伝搬することができるので、このような曲げ回路に相当するような光回路においては短波長側で透過率が高くなる。

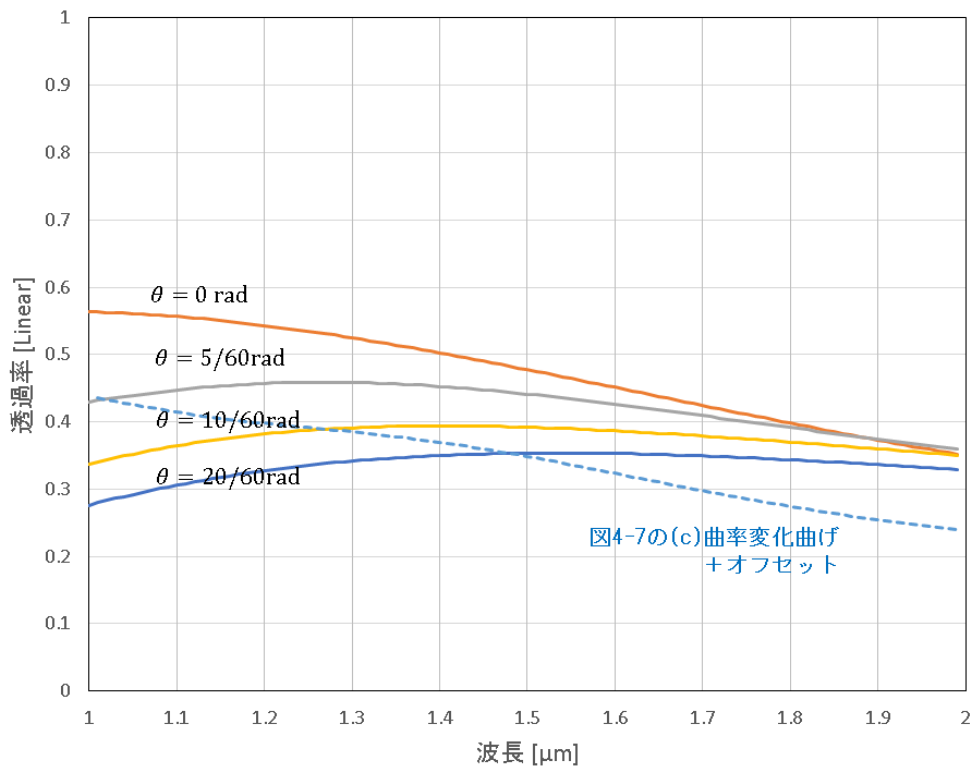


図 4-12 光導波路側面の形状を波面整合法で設計した光位置変換回路のスペクトル

ただし、波長が短くなれば高次モードに相当する横方向に波数の大きな成分が発生しやすいので、ある程度まで波長が短くなると、出力部分で基底モードに相当する成分が減少し損失が増大すると考えられる。そのため、この例においては、 $1\mu\text{m}$ 付近にピークが発生していると思われる。また、図 4-12 において、 θ が大きくなるに従い、先の例（図 4-10）と同様にそのピークが長波長側にシフトするのがみられている。

(4) 複数の設計波長による波長特性の制御

波長帯域を制御する方法として複数波長を設定する方法も考えられる。例として 3 波長を設定して、光位置変換回路を波面整合法で設計した回路を示す。図 4-13 は得られた屈折率分布と光の伝搬の様子およびスペクトルである。波長としては、 1.3 、 1.55 、 $1.7\mu\text{m}$ を設定して、先の例と同じパラメータを用いた。屈折率分布の初期値は高屈折率値の一様なパターンとした。スペクトルには、波長 $1.55\mu\text{m}$ の 1 波長のみで設計した回路の透過スペクトルを併せてプロットした。このスペクトルは図 4-8(g) と同じものである。3 波長で設計したのも図 4-7 の (g)-1 の屈折率分布と似たパターンとなっているが、中央部分のパターンが明瞭になって、周囲の斜めの島の部分が乱れた形となっている（図 4-13(a)）。図 4-13(c) のスペクトルを見ると設計波長でピークやショルダーが見えているが各設計波長のピークを繋ぐ形で 1 つの波長で設計した場合よりも高い透過率でフラットなスペクトルが得られている。図 4-13(a) の屈折率分布において中央部分が複数に分かれているのは、複数に光を分けて、その別れた光を多重干渉させているためではないかと思われるが、明確に解釈するのは難しい。以上のように複数の波長で波面整合法を使って光回路を設計すればフラットな特性等、複数の波長特性についても制御することが可能である。留意すべき点としては、フラットな特性を得るためには、波長間隔を近くにとって波長数を増やすことが必要とい

うことである。どれくらい近くに設定すればよいか等については、それぞれのケースによると思われる。一般的な設定方法としてどのようにすればよいかは、今後の課題である。

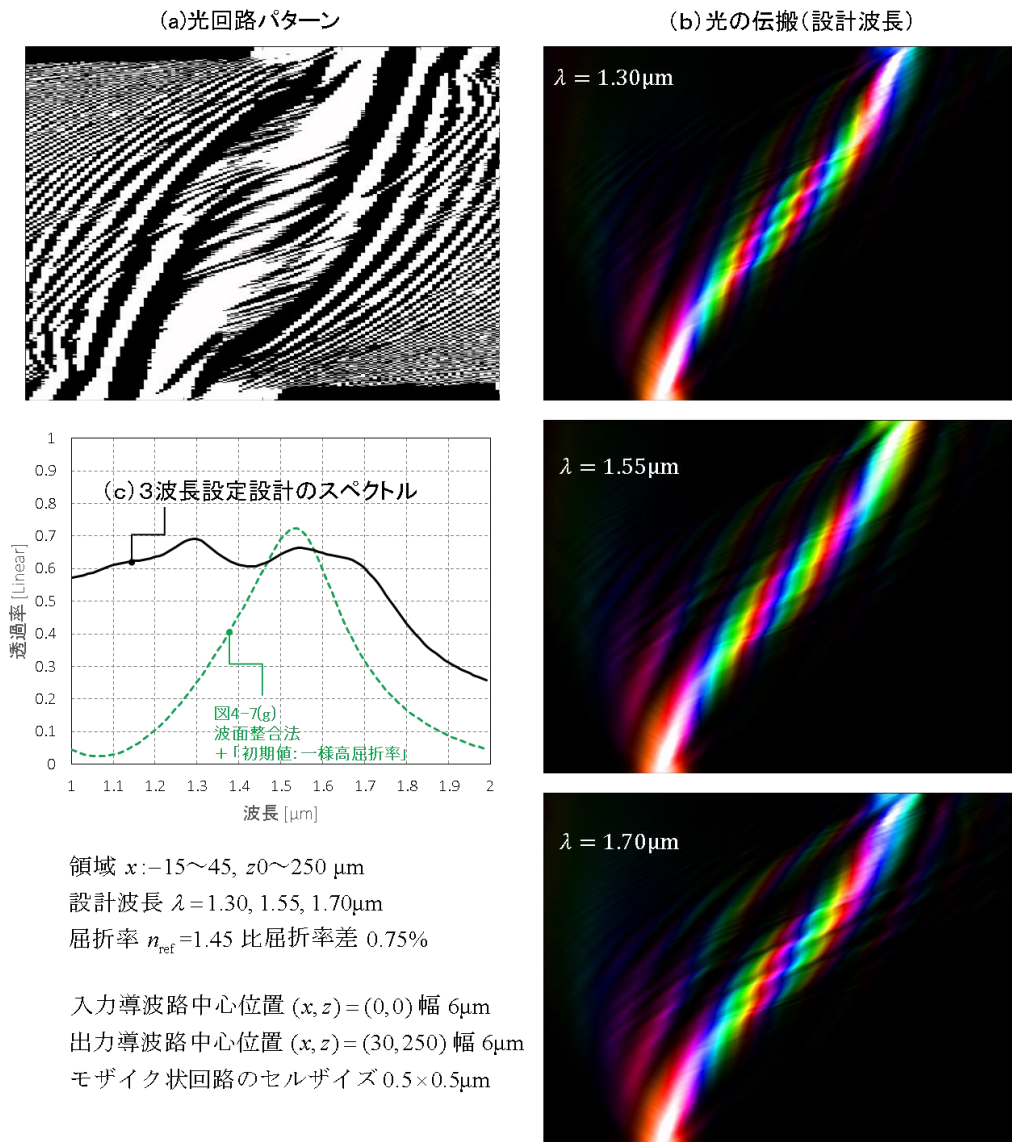
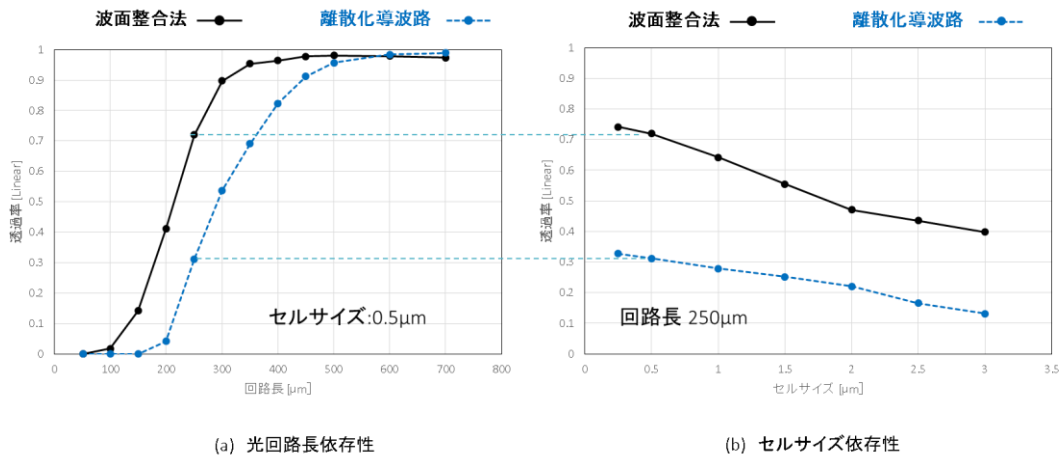


図 4-13 3 波長 (1.3, 1.55, 1.7 μm) を設定した光位置変換回路

(5) その他のパラメータ

光位置変換回路について最後にその他のパラメータ依存性を示す。図 4-14 は波面整合法を用いた光位置変換回路の光回路長さとセルサイズ依存性をプロットしたものである。



領域 $x: -15 \sim 45, z: 0 \sim (50, 100, 200, \dots, 700) \mu\text{m}$
 設計波長 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$
 屈折率 $n_{\text{ref}} = 1.45$ 比屈折率差 0.75%

入力導波路中心位置 $(x, z) = (0, 0)$ 幅 $6 \mu\text{m}$
 出力導波路中心位置 $(x, z) = (30, 250)$ 幅 $6 \mu\text{m}$
 モザイク状回路のセルサイズ $0.25 \times 0.25 \sim 3 \times 3 \mu\text{m}$

図 4-14 波面整合法を用いた光位置変換回路の光回路長さとセルサイズ依存性

パラメータとしては、回路長とセルサイズ以外は、これまでの光位置変換回路と同じものを用いた。破線は曲率を変化させた導波路 (図 4-7 (b)) をセルサイズの矩形のセルパターンで近似したもので光を伝搬させたときの透過率である。分散化による影響は (b) のセルサイズ依存性の破線を見るとわかる。セルサイズが大きくなるにつれて特性が劣化するが $0.5 \times 0.5 \mu\text{m}$ であれば概ね連続な導波路パターンと変わらない透過率 (図 4-8 (b) の透過率) が得られる。図 4-14 では波面整合法による回路の特性を連続線で示している。図 4-14 (a) の回路長依存性は $250 \mu\text{m}$ 付近で急速に立ち上がっている。これは入力部分から光が回折で広がって出力部分に到達する程度の距離である。 $250 \mu\text{m}$ 以下の光回路長では入射位置から出射位置に向けて光を急に曲げる必要があり、この計算にもちいられている程度の屈折率差では

光学的に曲げることが困難な領域と考えられる。セルサイズについては、セルサイズが小さい方が波面整合法により設計した回路では高い透過率が実現できている。光回路長ほど大きな変化はないが波長と同程度となる $1 \sim 1.5 \mu\text{m}$ 付近で、セルサイズが小さくなるにつれ透過率が大きく改善されていることがわかる。

4-4. 入出力の位相の自由度を使った波面整合法の設計

この節では節 4-2 の (3) 入力と出力の設定の自由度を使った例を示す。図 4-15 はシングルモード 4 入力を 1 出力マルチモード導波路に出力させる光回路の概念図である。このような回路を考える背景は以下の通りである。光加入者系と呼ばれる光ファイバ通信システムでは、サービス提供者からと、サービス提供を受けているユーザ側からと双方向の通信が行われる。サービス提供者から配信する場合は、分岐回路で各ユーザに信号を同時に配信して、必要な情報をユーザが抜き取って使う。ユーザ側からは、光信号が時間領域で衝突しないように時間調整してサービス提供者側で一括受信する。このときサービス提供者側から一括して信号が配信され、理想的には、ユーザ数分の 1 の光信号が、各ユーザに損失なく分配される。それに対して、ユーザ側からの光信号はサービス提供者から配信する場合と同一の光の経路を逆にたどって、光を分岐した回路と同じシングルモード導波路に合流させようとすると損失が発生してユーザ数分の 1 に減衰してしまう。この損失がなければ、収容者数の増加や遠方への信号の配信を可能となるので、可能であれば無くしたい損失である。そのような観点から下記のような回路が提案されている [38]。ユーザ側から送られてきた光は最終的には 1 つの受光器で受信する。受光器にはシングルモード導波路が接続されている必要はなくマルチモード導波路でも問題なく受信可能である。そこでユーザ側から送られてきた光をマルチモード導波路で合流させて、以下に示す直交条件を満たして、損失なく合流させるという方法が提案されている [38]。図 4-15 はそのような合波器を想定した光回路で、左側がユーザ側、右側がサービス提供者側である。

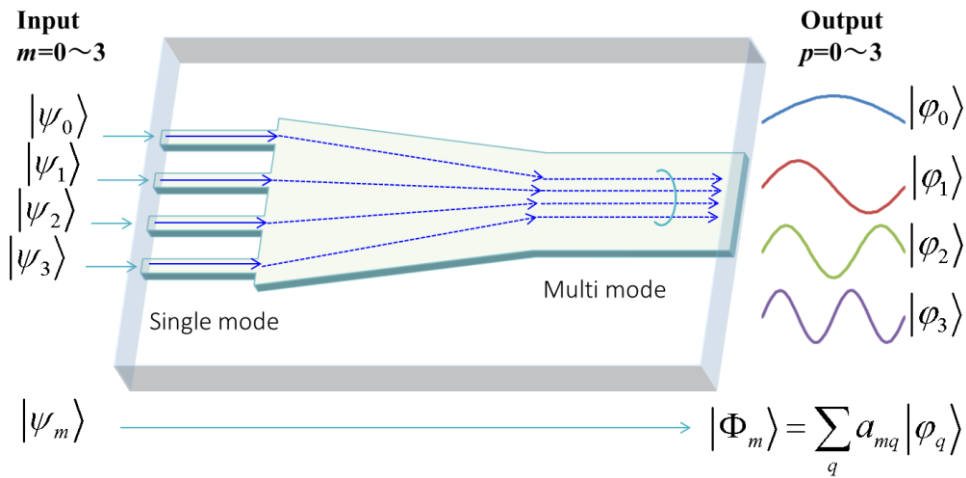


図 4-15 シングルモード 4 入力を 1 出力マルチモード導波路のモードの重ね合わせに変換する光回路

節 4-2 の (3) 入力と出力の設定の自由度で議論したとおり、シングルモードに 4 つのシングルモード入力の合波をすると（位相を合わせない限り）1/4 に損失する。これは入力がそれぞれ直交した状態（重なり積分が 0）であるのに対して、出力が直交した状態となっていないために生じる損失である。各シングルモード導波路からの入力信号の出力はマルチモード導波路に出力させる場合は、モードを使って直交させれば損失なくマルチモード導波路に結合させることができる。 m 番目の導波路から入力した光のフィールドの出力は、図 4-15 のように出力側の各モード $|\varphi_q\rangle$ ($q=0,1,2,\dots$) の重ね合わせとして、

$$|\Phi_m\rangle = \sum_q a_{mq} |\varphi_q\rangle \quad (\text{式 4-31})$$

と表せる。このとき独立の条件(式 4-26)に相当する直交条件として

$$\langle \Phi_m | \Phi_{m'} \rangle = \sum_q a_{mq}^* a_{m'q} = \delta_{mm'} \quad (\text{式 4-32})$$

が成り立たせれば、損失は発生しない。ここで、 a_{mq} は m 番目の導波路から入力した際の出力側 q 番目のモードの振幅を表している。この回路から受信器までを光ファイバで繋ぐ際には、各モードへの分配が均等である方がよく、かつ、できるだけ低次モードである方が安定した通信が期待できる。そこで 0 次から 4 次までのモードの振幅を均等にとり

$$|a_{m0}|^2 = |a_{m1}|^2 = |a_{m2}|^2 = |a_{m3}|^2 = 1/4$$

とする。このとき各振幅の間に位相についての設計の自由度が残っている。式 4-32 が成り立てばよいので、 $a_{mq} \leftarrow e^{i\theta_q} a_{mq}$ として、 q のみに依存し、 m に共通な位相をつけても良いことがわかる。この関係は特に不思議な関係でなく、 q 番目のモードについて、どのような位相をつけても直交性には関係ないという当たり前のことを表しているのに過ぎない。しかし、波面整合法の観点からは、この位相は重要である。光回路の相反性から各シングルモード導波路から入力した光は必ず直交して、各モードに分解できるが、このときの位相が、モード間で相対的に固定されていると、設定した位相を実現するために、光回路の屈折率分布の自由度の一部が使われて、そのぶん透過損失等の特性が劣化することになる。そこで

$$a_{mq} = \frac{1}{4} \exp\left(i \frac{2\pi}{4} qm + \theta(q)\right) \quad (\text{式 4-33})$$

として、波面整合法で出射側の出力を各モードに分解してその振幅の位相を $\theta(q)$ とする。均等な振幅となっていない場合は直交性が自然に成り立つことはないが、波面整合法の反復計算が収束に近い状況では適切な位相が得られると想定して位相の付け替えを行った。図 4-16 に位相の自由度をつかった場合と、比較対象として位相を固定した従来の波面整合法で回路を設計した場合の回路と各入力導波路（ポート）から光を入射した場合の伝搬の様子を示した。この場合は、実際に回路を作ることを想定して、光導波路側面を変形させることとして、高さ方向のコアの厚みについても考慮して有効屈折率法により屈折率の値を調整して 2 次元回路として計算を行った。

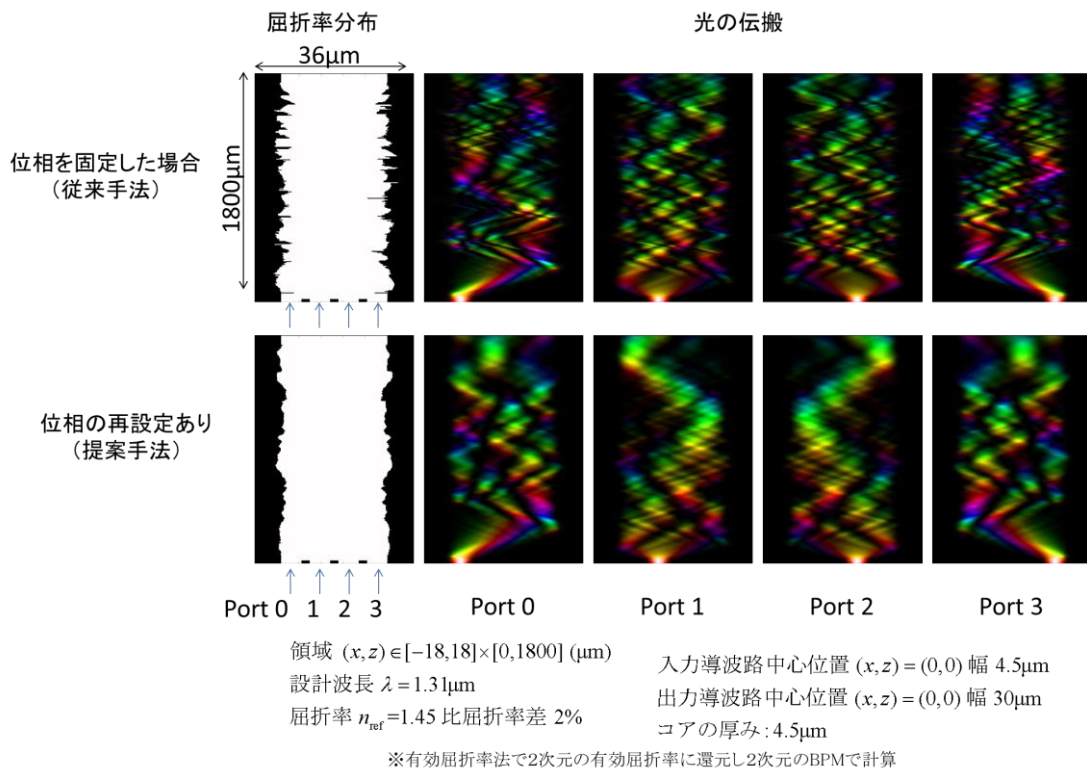


図 4-16 波面整合法を用いて位相を固定した場合と位相の再設定がある手法により得られた光回路と光の伝搬の様子

位相を固定した場合は、導波路側面に細かなパターンが発生して、伝搬している光についても細かなパターンが発生している。それに対して位相の自由度を使うと細かな導波路側面パターンとならず伝搬する光のフィールドも位相を固定した場合と比較して細かなパターンが少ない。また、出力についてはモードの振幅の大きさが均等で位相により直交した状態であることを反映して、出力の光が空間的に集中した出力となっている。これは、Fourier変換において、同一の振幅ですべての空間周波数成分を重ね合わせるとデルタ関数となることに対応している。図 4-17 に各入力導波路（ポート）からの入射に対する出力の各モードの成分量を示した。この場合の光導波路に存在できるモードは8次のモードまでで、設計上のターゲットとしては0次～3次までのモードに均等に分配して出力させるように設定している。位相を固定して波面整合法を実行して得られた屈折率分布の場合は各モードへの分配が崩れ、さらに、高次モードに分配されない放射される成分も多く含むようになって

しまっているのがわかる。それに対して、位相を再設定することにより低次モードへの均等な分配が実現していることが確認できる。

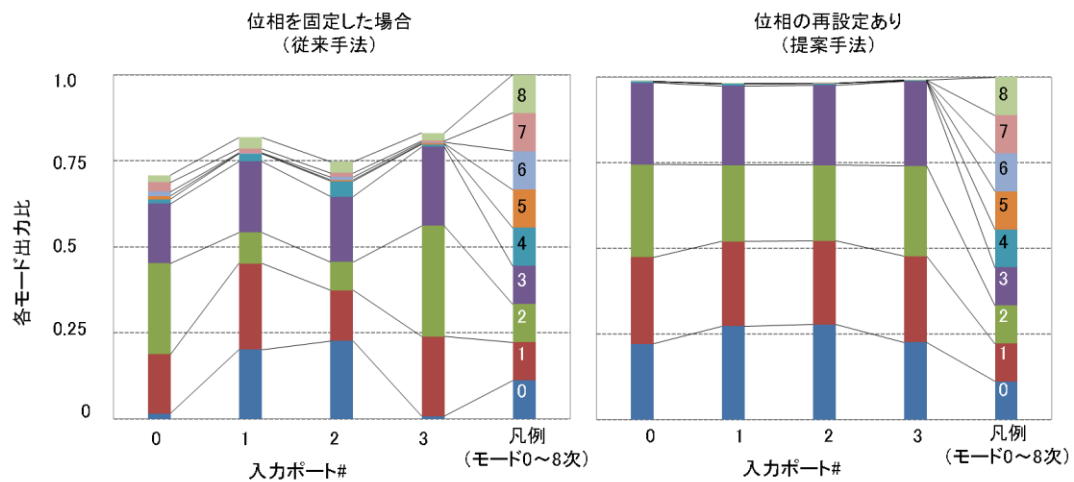


図 4-17 波面整合法により設計した回路の
各入力ポートに対する出力の各モードの成分比

この回路については実際に石英系平面光波回路 (PLC) 技術により作製し、透過損失を評価している (図 4-18)。100nm に渡って約 1dB 程度の損失でフラットな特性が得られている。図 4-17 の棒グラフの総和が出力となるから計算上はほぼ損失のない回路ができるはずであるが、伝搬損失およびファイバ接続ズレ等の影響で約 1dB の損失が発生しているものと考えられる。このような損失があるものの、シングルモード出力とした場合に生じる原理損失 6dB と比較して 5dB 程度出力特性を改善できる光回路となっている。

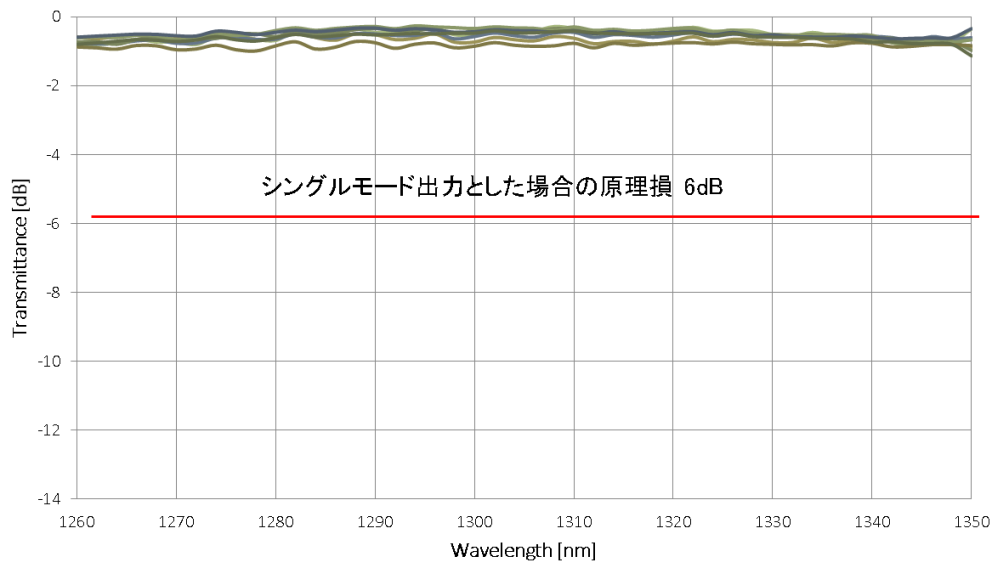


図 4-18 作製したシングルモード 4 入力を 1 出力マルチモード導波路の出力特性

以上のように、複数の入出力ポートや複数のモードがあるような光回路の場合で、各ポート間あるいはモード間の相対的な位相差を自由に設定して良い場合は、本節のような入力の位相も波面整合法で決められる設計の自由度として取り込むことで、光回路特性の改善が望めることがわかった。多チャンネルの信号入出力回路では、チャンネル間の信号は独立で一般に各ポート間あるいはモード間の相対的な位相差を自由に設定して良い場合がほとんどであるから、このような回路設計は多くの回路に有効であると考えられる。

4-5. 波面整合法の改良～深層ニューラルネットワーク手法の応用

波面整合法は大きな自由度を制御して光回路を設計する手法である。全く異なる分野の技術となるが、大きな自由度を制御する系として近年活発に研究されているものとしては、深層ニューラルネットワーク (DNN Deep Neural Network) がある。計算機およびデータセンタの発達とネットワークの発達により活用が可能となった莫大なデータを駆使して従来の計算方法では難しかった言語処理や画像認識等、さまざまな分野への応用が期待され、そ

の技術は爆発的に発展してきている。本節で示すように、DNN と波面整合法は類似性をもっており、発展を続ける DNN の手法を波面整合法に適用できれば、波面整合法の発展が期待できる。また、以下に示すように波面整合法でつくられた光回路はある種のニューラルネットワークの一種とも考えられるので、DNN を物理実装できれば超低消費電力な計算につながる可能性もある。さらに、光学的な観点から光回路特性に相当する DNN のネットワーク特性等を考えることで新たな手法の創出等につながる可能性もある [37-44]。

本節では、波面整合法と DNN の対応関係を示し、さらに、特性面での性質の類似性を確認して、ドロップアウトとよばれる DNN の手法をもとに波面整合法の過剰適用の解消を確認する。

(1) 最適化手法としての波面整合法と DNN の対応

波面整合法と DNN について、どちらもパラメータ（波面整合法は屈折率分布、DNN は学習パラメータ）で評価関数を最適化する問題とみなせば自然な対応関係が成り立つことが予想される。実際に随伴法と呼ばれる方法を通して対応関係をみることができる。随伴法 [46] による式の導出については Appendix の A.5 に記載した。結論だけ使うとパラメータ θ を含む発展方程式 $d|\psi\rangle/dz = f(|\psi\rangle, \theta)$ が与えられたら、初期値が $\langle\phi_{\text{out}}| = \partial L / \partial |\psi_{\text{out}}\rangle$ で、発展方程式 $d\langle\phi|/dz = -\langle\phi|B$ (B は i, j 成分を $B_{ij} = \partial f_i / \partial \psi_j$ とする行列) となる随伴変数 $\langle\phi|$ を用いて、評価関数 L のパラメータ $\theta(z)$ に対する勾配

$$\frac{dL}{d\theta(z)} \propto \langle\phi| \frac{\partial}{\partial \theta(z)} |f\rangle \quad (\text{式 4-34})$$

が得られるというものである。波面整合法については 式 4-8 が随伴変数の方程式に他ならない。DNN の発展方程式は離散化されていて、典型的なものとしては

$$|\psi^{(l+1)}\rangle = \left| f^{(l)} \left(W^{(l)} |\psi^{(l)}\rangle \right) \right\rangle \quad (\text{式 4-35})$$

となっている。 $|\psi^{(l)}\rangle$ は l 層目の入力状態で l 層目の重みを表す行列 $W^{(l)}$ を学習パラメータとして、 $W^{(l)}|\psi^{(l)}\rangle$ に l 層目の活性化関数 $f^{(l)}$ を作用させて、次の $l+1$ 層目の状態 $|\psi^{(l+1)}\rangle$ を得る。DNNにおいては、再帰的に活性化関数を作用させるため、学習パラメータ $W^{(l)}$ の更新で用いる学習パラメータ $W^{(l)}$ による評価関数の勾配計算においてチェーンルールにより活性化関数の微分が層方向に掛け合わされるため層数が増大すると勾配の消失、あるいは、発散が生じる、という課題があった。その課題を解決したのがResidual-Network (ResNet)である。ResNetでは、入力の一部を活性化関数を通さずにそのまま次の層に伝搬させるというスキップコネクションが用いられ、これにより例えば100層（多いものでは1000層）という層数の多い=深いニューラルネットワークが可能となり、ニューラルネットワークによる画像認識精等を飛躍的に向上させた[47]。伝搬の式を具体的に書くと（次元の異なる層についても伝搬させるための操作を行う必要があるが、ここでは層の間の次元を同じにしている）、

$$|\psi^{(l+1)}\rangle = |\psi^{(l)}\rangle + \left| h^{(l)} \left(W^{(l)} |\psi^{(l)}\rangle \right) \right\rangle \quad (\text{式 4-36})$$

となる。 $h^{(l)} \left(W^{(l)} |\psi^{(l)}\rangle \right) = f^{(l)} \left(W^{(l)} |\psi^{(l)}\rangle \right) - |\psi^{(l)}\rangle$ としたのと同じことになるので、Residual-Networkと呼ばれている。(式 4-36)は差分式にほかならないので、これを発展方程式とみなして、随伴法を適用するとDNNでよく知られた誤差逆伝搬法が得られる。評価関数を例えば教師パターン $|\psi_{\text{教師}}\rangle$ との2乗誤差 $\left(\langle \psi_{\text{out}} | - \langle \psi_{\text{教師}} | \right) \left(|\psi_{\text{out}}\rangle - |\psi_{\text{教師}}\rangle \right)$ とすると、随伴変数 $\langle \phi |$ は

$$\langle \phi_{\text{out}} | = \frac{\partial L}{\partial |\psi_{\text{out}}\rangle} = \langle \psi_{\text{out}} | - \langle \psi_{\text{教師}} |$$

出力の誤差を初期として行列で前の層に逆伝搬していく誤差逆伝搬法の誤差に対応する。一方、波面整合法については、随伴法を適用すると実は第4章4-1節(1)の波面整合式の導出と同じになる。発展方程式(式 4-1) $i\partial_z |\psi(z)\rangle = \left[-\partial_x^2 / 2\beta - \beta\Lambda(z) \right] |\psi(z)\rangle$ で、記号を簡単に

するために $H \stackrel{\text{def}}{=} [-\partial_x^2/2\beta - \beta\Delta(z)]$ と置いて $i\partial_z|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ と表すこととする。DNN との対応関係を明確にするために、発展方程式を形式的に差分式で表して、微小ステップ Δz に対して $|\psi^{(l+1)}\rangle = |\psi^{(l)}\rangle - i\Delta z H^{(l)}|\psi^{(l)}\rangle$ とする。これをもとに ResNet と波面整合法を比較したのが表 4-3 である。重みの更新については成分ごとの記述ほうが簡潔なので成分で表示している。

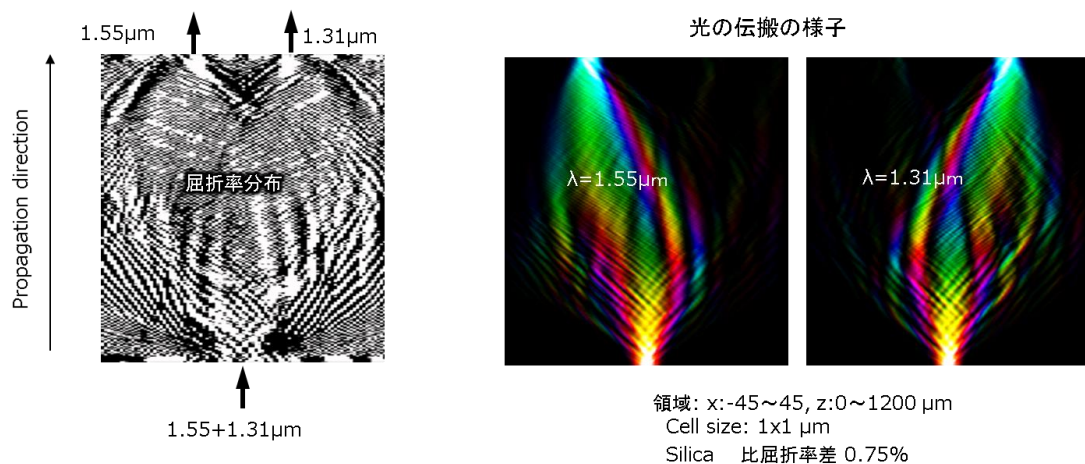
表 4-3 波面整合法と ResNet の対応

	波面整合法	ResNet
順伝搬	$ \psi^{(l+1)}\rangle = \psi^{(l)}\rangle - i\Delta z H^{(l)} \psi^{(l)}\rangle$	$ \psi^{(l+1)}\rangle = \psi^{(l)}\rangle + \left h^{(l)} \left(W^{(l)} \psi^{(l)} \right) \right\rangle$
逆伝搬	$ \varphi^{(l)}\rangle = \varphi^{(l+1)}\rangle + i\Delta z H^{(l)} \varphi^{(l+1)}\rangle$	$ \varphi^{(l)}\rangle = \varphi^{(l+1)}\rangle + {}^t W^{(l)} \partial h^{(l)} \varphi^{(l+1)}\rangle$
重みの更新	$\Delta n_i^{(l)} \leftarrow -2k_0 \eta \text{Im} \left(\varphi_i^{(l+1)*} \psi_i^{(l)} \right)$	$w_{ij}^{(l)} \leftarrow -\eta \varphi_i^{(l+1)} \partial h_i^{(l)} \psi_j^{(l)}$

ここで、 $\partial h^{(l)}$ は活性化関数の微分を対角成分とする行列である。また η は適当な正の係数である。随伴法というスキームで波面整合法および ResNet 両者とも記述することができるので対応関係が成り立つのは当然であるが明確な対応付ができることがわかる。違いは、波面整合法の重み（屈折率分布）は対角行列で与えられるのに対して、ResNet の重みは非対角成分を持つことである。ResNet は一層ですべてのノードと結合することが可能であるのに対して、波面整合法の場合は光が回折して物理的に離れた位置に伝搬により到達することでノード間の結合が得られる。この違いが波面整合と ResNet との間にどのような違いをもたらすかはわかっておらず、今後の課題である。近年では DNN のモデルが巨大化して消費電力や遅延、学習に掛かる時間などが課題になっている。そのためモデルの圧縮等の技術も進んできており、今後、モデルの圧縮手法の波面整合法へ適用や、逆に光のホログラム的な特性をモデルの圧縮に活用する等、議論の余地が多く残っている。

(2) 特性からみた波面整合法と DNN の対応

最適化手法として波面整合法と ResNet の間に対応関係が成り立つことから、特性面においても対応関係が成り立つことが期待できる。ResNet は、入力の一部を活性化関数を通さずに、そのまま次の層に伝搬させるスキップコネクションがあるため、小さな学習機を組み合わせたアンサンブル学習機になっているとの指摘があり、それを実験的に証明するために ResNet においてニューラルネットワークへの“lesion studies”（病変研究）という手法が取られた[48]。これはあえて、ネットワークの一部を切断してその時の特性変化をみることでネットワークのつながりやネットワーク間の関係を見出そうという解析手法ある。具体的には、ResidualNet の部分、すなわち、式 4-36 の活性化関数 h を取り除いてその特性変化の調査を行っている[48]。そこで、波面整合法の回路に対しても同様の操作を行い数値計算上で特性変化を見ることとした。この後の計算に用いる光回路系とパラメータを図 4-19 に示す。光回路としては通信でよく使われる $1.31\mu\text{m}$ と $1.55\mu\text{m}$ の波長分離回路を波面整合法で設計して、それに対して“lesion studies”を行う。屈折率分布や光のフィールドの表示方法については、図 4-6 の凡例に従う。



まず、ResNet に対する “lesion studies” のとおり、回路の一部を部分的にそのまま次の層に転送する部分を設け、そのまま次の層に転送する部分の割合を増やしたときに特性がどのように変化するかを検証した。図 4-20 にその結果を示す。図 4-20(a)に示すように、次の層にそのまま転送することは、光回路においては回路を除去することと同義であるため、その割合を除去割合と呼ぶことにした。図 4-20(b)は除去割合に対する損失の変化を示している。除去割合が 10%までの間に急速に損失が増加しており、光回路のネットワーク（光の伝搬）が分断されてうまく機能しなくなっていることが示唆される。ResNet に関する “lesion studies” の文献[48]の場合はなだらかに変化することが示され、文献[48]の著者らは、なだらかに変化することをもって、小さな学習機のアンサンブルが形成されていると主張している。図 4-20 の結果はその傾向と一致しない。

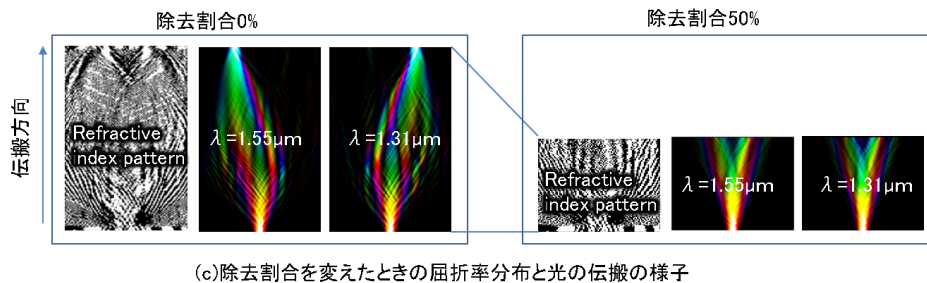
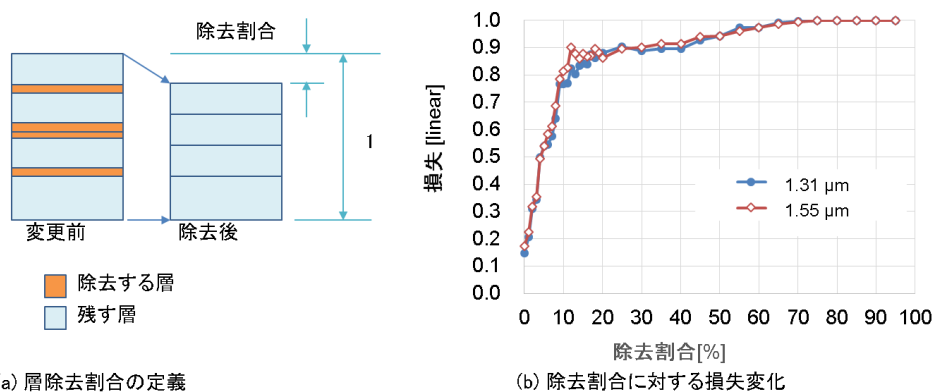


図 4-20 波面整合法に対する除去による “lesion studies”

そこで、光の伝搬の様子を見てみると、図 4-20(c)の左側の除去を行わない場合に対して、図 4-20 の右側の除去割合が 50%の場合のように層を除去すると、光が広がるまえに光回路の出力面に光が到達して出力ポートに光が届かずに大きな損失が発生していることがわかる。このことはネットワークの構造の問題というよりは物理的に出力ポートに光を到達させるのが難しい状況が発生してしまったことが原因であると考えられる。そこで、再度、波面整合法と ResNet の発展方程式を比較してみると

$$\begin{aligned}
 \text{波面整合法} \quad |\psi^{(l+1)}\rangle &= |\psi^{(l)}\rangle - i\Delta z H |\psi^{(l)}\rangle \\
 &= |\psi^{(l)}\rangle - i\Delta z \left(-\partial_x^2 / 2\beta - \beta\Delta(z) \right) |\psi^{(l)}\rangle \\
 \text{ResNet} \quad |\psi^{(l+1)}\rangle &= |\psi^{(l)}\rangle + |h^{(l)}(W^{(l)}\psi^{(l)})\rangle
 \end{aligned}$$

において、ResNet では、そのまま前方に転送するという事は重み $W^{(l)}$ を無くすことと考えると、波面整合法では、重み=屈折率分布部分、具体的には比屈折率差の分布 $\Delta(z)$ のみを無くす方が自然である。そこで、波面整合法においては、屈折率分布部分を取り除くこと、すなわち、

$$|\psi^{(l+1)}\rangle = |\psi^{(l)}\rangle - i\Delta z \left(-\partial_x^2 / 2\beta \right) |\psi^{(l)}\rangle$$

と与えて、光学的スキップコネクションと呼ぶこととした。

光学的スキップコネクションを用いて“lesion studies”を行った結果が図 4-21 である。図 4-21(a)にあるように、スキップコネクションのみのからなる層は高屈折率部分を除去して一様に低屈折率とした部分をブランクと呼ぶこととした。図 4-21(b)にあるようにブランク率に対してする損失の値はなだらかな変化がみられており、ResNet の場合と同様の変化となっている。また、図 4-21(c)にあるようにブランク率の違いがあっても光は出力ポートに到達しており、ネットワークが途切れて大きな損失が発生することは起こっていない。ResNet について小さな学習機のアンサンブルとなっている、との指摘に対応して、波面整合法の回路についても同様のことが言えると考えられる。この結論は“lesion studies”こ

のような分析を行うまでもなく、Huygens の原理に基づいて考えると明らかで、光は様々な方向に広がっていった光のリンクが無数に形成されており、一部を取り去った場合でも光回路が残って、特性が緩やかに劣化していきと光学的な観点から解釈することができる。

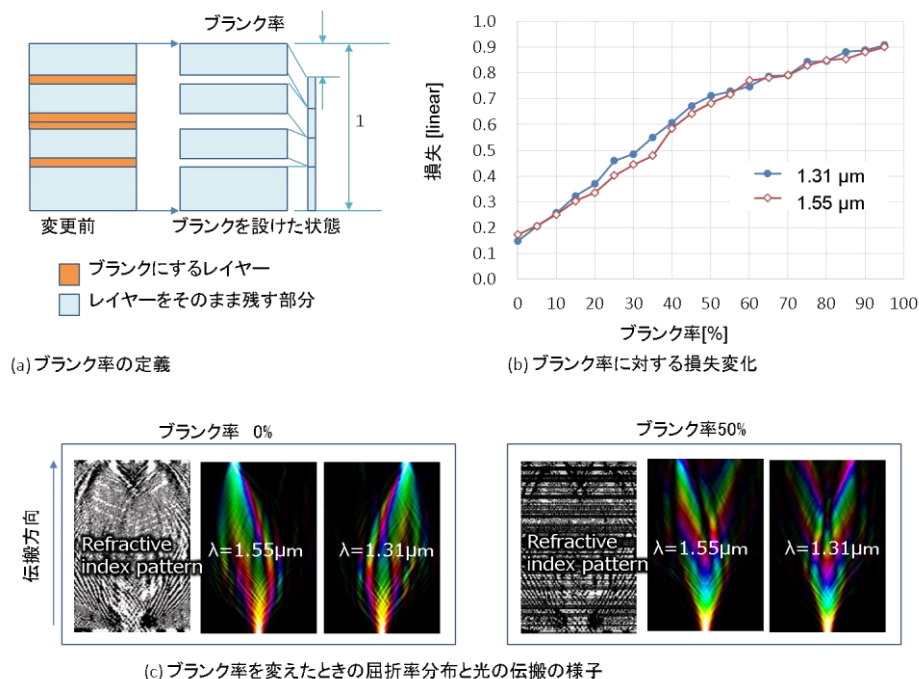


図 4-21 光学的スキップコネクションを用いた“lesion studies”

(3) DNN 手法の波面整合法への適用

ここまで、ResNet と波面整合法の類似性を考えてきた。そのような類似性を考える最大の理由は DNN 手法を波面整合法に適用してさらに技術を発展させることである。DNN においてはさまざまな手法が見いだされてきたが、比較的良好に知られており有用性を示しやすいドロップアウトの適用を波面整合法に適用して効果を確認する。図 4-22 は過剰適応している波面整合法の回路設計に対してドロップアウトを適用し過剰適応を抑制した様子を示している。ドロップアウトは DNN の学習において、意図的にコネクションを切断する（重みを取り除いた状態にする）ことで、過学習を抑制する手法である [49]。ドロップアウトを波面整合法に適用するにあたっては前の節で定義した光学的スキップコネクションを用いて、一

様に高屈折率に置き換えることにした。また、スキップコネクションはコネクションごと（重みのパラメータごと）に設定するのが一般的であるが光の場合、重みによる明確なコネクションが存在しないので、レイヤー単位でドロップアウトを行うこととした。図 4-22(a) はドロップアウトを用いず屈折率分布の更新を繰り返した際の、屈折率更新回数に対する光の透過率の変化をプロットしたものである。

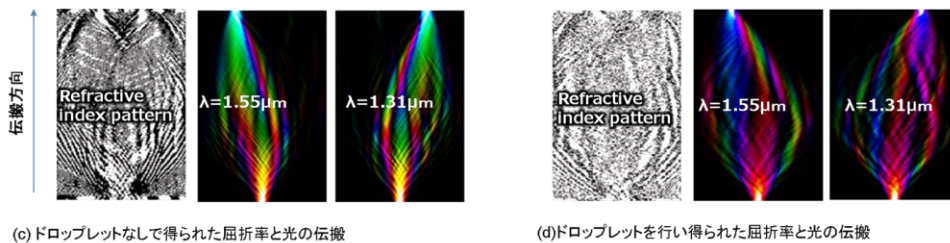
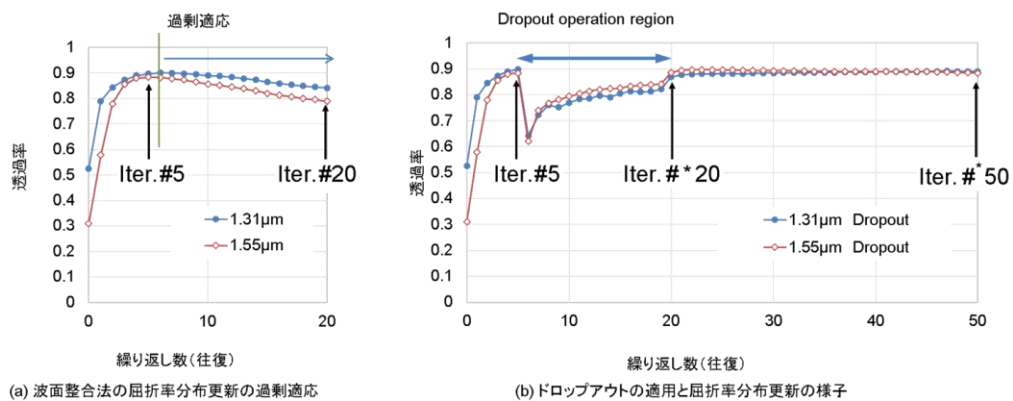


図 4-22 波面整合法においてロップアウトを適用し過剰適応を抑制した例

図 4-22(a) では 5~6 往復の計算で透過率はピークに達して、その後、徐々に劣化していることがわかる。これは過剰適応と呼ばれる現象で、一因として、屈折率分布の細かいパターンの影響で、横方向の光のフィールドに高い空間周波数成分が含まれるようになり、高い空間周波数成分を制御するために屈折率分布にも細かいパターンが生成されるため、さらに高い空間周波数成分が発生し、そこに光が徐々に移行していってしまう現象ではないかと考えられる。DNN で用いられる方法としてはピークの点で計算を停止するアーリーストッピ

ングと呼ばれている手法があるが、ここではアーリーストッピングを使わずにドロップアウトで過剰適用の抑制を行った。図 4-22 (b)は過剰適応が始まる 6 往復目から 19 往復目にドロップアウトを適用して、20 往復目から、ドロップアウトを適用しないで計算を続けたときの透過率の変化をプロットしたものである。20 往復目以降、透過率が安定していることがわかる。図 4-22 (c)、(d)ではドロップアウトしないものよりドロップアウトとした方が屈折率分布の高い部分（白い部分）が多くなっていることがわかる。ここで得られた屈折率分布による光回路の出力のスペクトルを図 4-23 に示す。

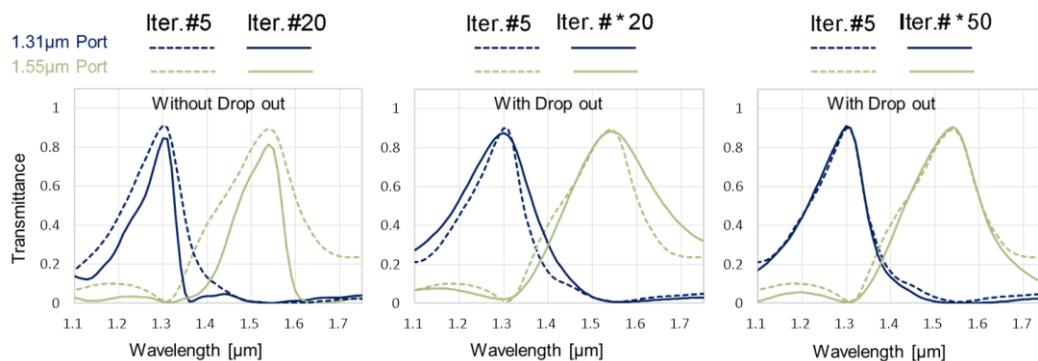


図 4-23 波面整合法においてロップアウトを適用し過剰適応を抑制した例

破線は 3 つのグラフに共通の 5 往復目までの光回路のスペクトル (Iter. #5) でこれと比較していく。左側のグラフはドロップアウトしなかった場合の 20 往復目のスペクトル (Iter. #20) で、設計波長での透過率の低下とともにスペクトルのピークが尖っているのがわかる。図 4-23 中央のスペクトルは図 4-22 の (b) ドロップアウトを適用したもので 20 往復目の特性としてスペクトル (Iter. #20) が 5 往復目までの光回路のスペクトル (Iter. #5) と比較してブロードになっていることがわかる。光のフィールドについて、ドロップアウトしない場合と比較すると、ドロップアウトした方が全体的に光のフィールドが広がっているが位相が一様になっているのがわかる (図 4-22 (d))。そのため、光の経路の干渉が少なくブロードなスペクトルが実現しているものと考えられる。このようになる理由はドロップ

アウトにより屈折率分布が変動して、結果として、屈折率分布の変動に対して特性変化の少ない光回路が実現され、屈折率の変化と等価となる波長についての変動に対しても鈍感な回路ができるためではないかと考えられる。ドロップアウトを停止した直後から十分屈折率更新を繰り返したあとのスペクトルとして 50 往復目のもの(Iter. #*50)をプロットしたのが図 4-23 の右側のスペクトルである。ドロップアウトをなくした直後の 20 往復目のものと比較するとスペクトルが狭くなっており、ゆっくりと過剰適合が続いている可能性を示している。

以上のように、DNN の手法であるドロップアウトを適用し過剰適応を抑制し、スペクトルが広げられることを確認した。このような形でさらに様々な手法を取り入れていくことで、波面整合法が発展するものと期待できる。

4-6. 波面整合法に関する課題と今後の展望

波面整合法においては、波面整合法では決められない自由度（設計の自由度）が数多く存在する。設計の自由度を使いこなすことが、波面整合法を用いた光回路設計というべきものではないかと思われる。設計の自由度として残され自由度は膨大であり、その自由度に様々な作製上の制限条件や要求仕様を取り込むことができれば、良い光回路が実現可能であることをいくつかの例を通して見てきた。逆に設計の自由度を使いこなせない場合は、乱雑なパターンが生成されやすくなり特性の制御も難しくなる傾向にあるように思われる。これらの自由度を使いこなすためには、出来上がった光回路の良し悪しを評価する手法を創出する必要がある。本節で示したように DNN の手法や考え方と影響しあいながら、大きな自由度を使いこなす技術が確立されていくことを期待したい。

5. まとめと今後の展望

本研究では、光導波路のような1次元の光信号ではなく、波面を扱える光波制御回路の実現を目指し、導波路パラメータ制御法と波面整合法の2つの光回路設計手法を提案した。得られた結果を下記にまとめる。

得られた結果（1）設計手法の提案

- (a) 導波路パラメータ制御法について：2乗屈折率分布と光のフィールドとして Gauss 分布を考えて、それらの広がりや中心位置のパラメータ間の関係式を導出し、その関係式をもとに光回路を設計できることを示した。
- (b) 波面整合法について：入力側から入射した光を順伝搬させて、出射側から出力させる光を逆伝搬させて、それらの位相差がなくなるように屈折率分布を繰り返し更新して光回路を生成する波面整合法を提案し、その手法により、光回路が設計できることを示した。

得られた結果（2）提案設計手法の評価

最初に設定した課題の観点で提案設計手法を評価する。最初に設定した課題は、光波制御回路の設計の課題として（1）計算規模の問題と（2）「良い」光波制御回路をどうやって求めるか、という2点であった。その課題に対する結果は下記の通りである：

- (a) 計算規模の問題：導波路パラメータ制御法においては、少数のパラメータの方程式として得られることから極めて軽量の計算が実現されており大規模な回路の検討も可能である。波面整合法についても、FDTD でなく BPM と親和性の高いアルゴリズムを実現しており、FDTD では困難な mm サイズの大規模な光回路の設計にも適用可能と考えられる。

(b) 「良い」光波制御回路をどうやって求めるか：導波路パラメータ制御法については光のフィールドにより光の伝搬する領域全体で屈折率分布を決定することから、光のフィールドを決めることができれば光波制御回路が実現される。2乗屈折率分布と光のフィールドとして Gauss 分布に制限されている状態を、拡張してより一般的なものに対応できるようにすることが今後の課題である。

波面整合法については、物理的に解釈が容易となるよう複数の導出方法を示した。さらに波面整合法では決定できない系の自由度を設計の自由度として分類してそれぞれの特徴を把握した。設計の自由度の種類に応じて、その自由度を制御する方法を示して有効性を確認した。いずれも単純な例題への適用であり、今後、より複雑かつ現実的な光回路設計への適用を進めていきたい。また、深層ニューラルネットワークとの関係も分析して、深層ニューラルネットワークで用いられるテクニック（ドロップアウト）を波面整合法による光回路設計に適用して過剰適応を抑制可能であること確認した。これについても初期的技術確認レベルであるので、今後、より複雑かつ現実的な光回路設計への適用を進めていきたい。

結果をまとめると、空間的に広がった波面を制御する手法を提案し、数値シミュレーションによる評価により有効性を確認するとともに、深層ニューラルネットワークの手法の適用可能性等、今後の発展の可能性を示した。

今後の展望

光波制御回路は、波面を制御するために全体で光回路として動作させることを目指すものである。本博士論文では、波面を制御する設計手法として導波路パラメータ制御法と波面整合法を提案し、簡単な光回路に適用して有効性を確認するところまでを示した。しかし、

光波制御回路と呼べるような大規模な光回路へは適用できていない。逆説的になるが、光波制御回路を実現するためには、目標となる光波制御回路が必要である。目標となる光波制御回路は、DNN に必要とされるような積和演算を高速に行える光回路のようなものになるのではないかと予想している（通信向けの光回路の高度化は、結局のところ、信号処理の高度化と等価で、デジタル信号処理回路の限界を補うものであるとすると、おそらく DNN による信号処理と同じようなものとなるのではないかと予想している）。本博士論文の中では波面整合法と DNN の類似性を示したが、波面整合法の適用先である光波制御回路もまた、DNN 技術につながっていくと考えられる。DNN の発展は良いアルゴリズムが見つかったからだけではなく、ベンチマーク問題となる大規模な良いデータセットが整備されたからとも言われている。そのアナロジーで考えるなら、データセットに相当する光波制御回路へのニーズとして良いものを見出すことができれば、それをもとに、本博士論文で提案した光回路の設計技術の発展が加速されるのではないかとと思われる。今後は、DNN を始めとする情報科学の成果や情報科学分野の情報処理や信号処理のニーズを取り込んで、光波制御回路に向けた光回路の設計技術が発展していくものと期待したい。

参考文献

1. “Special Feature : Silica-based Planar Lightwave Circuits for Photonic Networks” , NTT Technical Journal, Vol.3, No.7, pp.13-41 (2005)
 - S. Suzuki, et al., “Recent Progress in Silica-based Planar Lightwave Circuits (PLCs)”
 - H. Takahashi, et al., “PLC Optical Switch that Enhances the Optical Communication Network”
 - Y. Inoue, et al., “PLC Components Used in FTTH Access Networks”
 - A. Kaneko, et al., “Multi-functional Optical Module Using Multi-chip PLC Integration Technology for Next-generation Optical Networks”
 - K. Takiguchi, et al., “PLC Optical Signal Processing Devices for Developing Highly Functional Optical Networks”
 - M. Kohtoku, et al., “New Waveguide Fabrication Techniques for Next-generation PLCs”
2. H. Takahashi, “High performance planar lightwave circuit devices for large capacity transmission” , Optics Express, Vol. 19, Issue 26, pp. B173-B180 (2011)
3. M. Oguma, et al., “100-Gbit/s Optical Receiver Front-end Module Technology” , NTT Technical Review, Vol. 9, No. 3 (2011)
4. N. Hanazawa, et al., “Two-mode PLC-based mode multi/demultiplexer for mode and wavelength division multiplexed transmission” , Optics Express Vol. 21, Issue 22, pp. 25752-25760 (2013)
5. Y. Ding, et al., “Silicon Photonic Integrated Circuit Mode Multiplexer IEEE Photonics Technology Letters No.25, Vol.7, pp 648-651 (2013)
6. K. Watanabe, et al., “Recent Progress in Optical Waveguide Technologies Enabling Integration of High-density Compact Photonics” , NTT Technical Journal, Vol.15, No.1, pp.1-6 (2017)
7. L. B. Soldano et al., “Optical Multi-Mode Interference Devices Based on Self-Imaging : Principles and Applications,” IEEE J. Lightwave Technology, Vol. 13, No. 4, pp. 615-627 (1995)
8. H. Tsuda, “Silicon photonics platforms for optical communication systems, outlook on future developments” , IEICE Electronics Express Vol.17 No.22 (2020)
9. J. Lu, et al., “Nanophotonic computational design” , Optics Express Vol. 21, No. 11 , pp.13351-13367 (2013)
10. Z. Zhang, et al., “Design of ultra-compact triplexer with function-expansion based topology optimization” , Optics express Vol. 23, No 4, pp.3937-3950 (2015)

11. B. Shen, et al., “An integrated-nanophotonics polarization beamsplitter with $2.4 \times 2.4 \mu\text{m}^2$ footprint” , Nature Photonics volume 9, pages378-382 (2015)
12. T. Hashimoto et al., “Optical circuit design based on a wavefront-matching method,” Optics Letters Vol. 30, Issue 19, pp. 2620–2622 (2005)
13. “Introduction to Optical Waveguide Analysis: Solving Maxwell’s Equation and the Schrödinger Equation” by K. Kawano and T. Kitoh. Wiley-Interscience; 1st edition (2001)
14. “Fundamentals of Optical Waveguides” by K. Okamoto, Academic Press; 2nd edition (2014)
15. M. Suzuki, “Generalized Trotter’s formula and systematic approximants of exponential operators and inner derivations with applications to many-body problems” , Commun. Math. Phys. 51, 183 (1976)
16. “Advanced Engineering Mathematics” by E. Kreyszig, 5th edition, Wiley (1983)
17. J. Crank and P. Nicolson, “A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type”. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 43 No. 1, pp.50-67 (1947).
18. “Accuracy and Stability of Numerical Algorithms” by N. J. Higham, Second Edition. SIAM (2002)
19. R. Olshansky, et al., “Pulse broadening in graded-index optical fibers,” Applied Optics, Vol. 15, No. 2, pp. 483-491, (1976)
20. M. K. Soudagar, et al., “Pulse broadening in graded-index optical fibers: Errata,” Applied Optics,, Vol. 32, No. 33, p. 6678 (1993)
21. T. Hashimoto, et al., “Spot-size conversion of guided optical wave with Gaussian approximation” , Journal of lightwave technology, Vol.2, No. 10, pp. 2340–2351 (2003)
22. T. Sakamoto, et al., “Low-loss and Low-DMD 6-mode 19-core Fiber with Cladding Diameter of Less Than $250 \mu\text{m}$,” J. Lightw. Technol., Vol. 35, No. 3, pp. 443-449, (2017)
23. J. Roland et al., “Quantum search by local adiabatic evolution,” Phys. Rev. A 65, 42308 (2002)
24. S Morita, et al., “Mathematical foundation of quantum annealing,” J. Math. Phys, 49, 125210 (2008)
25. P. K Mallapragada, et al., “Non-parametric Mixture Models for Clustering” , Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition pp 334–343 (2010)
26. “Techniques and Applications of Path Integration” by L. S. Schulman , Wiley-VCH; 1st edition (1981)

27. M. Tan et al., "EfficientNet: Rethinking Model Scaling for Convolutional Neural Networks." arXiv preprint arXiv:1905.11946 (2019)
28. Y. Sakamaki et al., "New Optical Waveguide Design Based on Wavefront Matching Method," IEEE J. Lightwave Technol. Vol. 25, Issue 11, pp. 3511-3518 (2007)
29. Y. Sakamaki et al., "Loss Uniformity Improvement of Arrayed-Waveguide Grating With Mode-Field Converters Designed by Wavefront Matching Method", IEEE J. Lightwave Technol. Vol. 27, Issue 24, pp. 5710 - 5715 Dec. 15 (2009)
30. Y. Sakamaki et al., "Loss reduction of silica-based 8×8 optical matrix switch by optimizing waveguide crossings using WFM method" IEICE Electronics Express Vol.4, No. 23 (2007)
31. K. Sugiyama et al., "Broadband 2×2 Multimode Interference Coupler for T- and O-band Communication by Wavefront Matching Method," Advanced Photonics 2015 OSA Technical Digest (online), JM3A.32 (2015)
32. J. Sakamoto et al., "Shape-optimized multi-mode interference for a wideband visible light coupler," Optics Communications." Vol. 433, pp. 221-225 (2019)
33. Y. Sawada et al., "Development of the Wavefront Matching Method Based on the 3-D Finite-Element Method and Its Application to Si-wire Mode Converters," IEEE J. Lightwave Technol. Vol. 36, Issue 17, pp. 3652 - 3659 (2018)
34. H. Yamazaki, et al., "PDM-QPSK Modulator With a Hybrid Configuration of Silica PLCs and LiNbO3 Phase Modulators" Journal of Lightwave Technology Vol. 29, Issue 5, pp. 721-727 (2011)
35. 片寄 他、" マルチチップ集積型石英-シリコン熱光学スイッチの作製と多ポート化に向けた石英系フェーズアレイ型光スイッチの高性能化" 電子情報通信学会論文誌 C Vol. J99-C No. 4 pp.107-113 (2016)
36. Fontaine et al., "Multi-plane light conversion of high spatial mode count," SPIE Optical Engineering + Applications, Proceedings Volume 10744, Laser Beam Shaping XVIII; 107440M (2018)
37. J. Sakamoto, et al., "Computer-generated optical mode-managed funnel coupler for reducing intrinsic coupling loss" CLEO 2016, SM1F. 2, 5 June (2016)
38. M. Fujiwara, et al., "High-splitting-ratio PON systems using a PLC-based funnel-shaped waveguide with dual-mode fiber" IEEE/OSA Journal of Optical Communications and Networking, Vol. 7, pp A1-A6 (2015)
39. L. Xing, et al., "All-optical machine learning using diffractive deep neural networks," Science 361, pp. 1004-1008 (2018)
40. Yichen Shen, et al., "Deep learning with coherent nanophotonic circuits," Nature Photonics, pp. 441, Vol.11 (2017)

41. K. Nakajima, "Physical reservoir computing—an introductory perspective," *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol, 59, No. 6, 060501 (2020)
42. M. Nakajima, et al., "Scalable reservoir computing on coherent linear photonic processor." *Communications Physics* 4.1 pp. 1-12 (2021)
43. J. Tang, et al., "Extreme Learning Machine for Multilayer Perceptron," in *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 27, no. 4, pp. 809-821 (2016)
44. R. T. Q. Chen et al., "Neural Ordinary Differential Equations," *Proceedings of Conference on Neural Information Processing Systems (Nuri' s)* (2018).
45. T. Hashimoto, "Wavefront matching method as a deep neural network and mutual use of their techniques", *Optics Communications*, Vol. 498, pp. 127216 (2021)
46. N. Pollini, et al., "Adjoint sensitivity analysis and optimization of hysteretic dynamic systems with nonlinear viscous dampers". *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 57 (6) (2018)
47. K. He et al., "Deep Residual Learning for Image Recognition," 2016 *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 770-778 (2016)
48. A. Veit et al., "Residual networks behave like ensembles of relatively shallow networks," *Proceedings of the 30th International Conference on Neural Information Processing Systems*, pp. 550-558 (2016)
49. N. Srivastava et al., "Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting," *Journal of Machine Learning Research* 15(1):1929-1958 (2014)
50. Yin, Minghao, et al. "On the Mathematical Understanding of ResNet with Feynman Path Integral." *arXiv preprint arXiv:1904.07568* (2019).

本博士論文に関する文献

- Authors:** T. Hashimoto, T. Saida, R. Kasahara, I. Ogawa
Title: Spot-size conversion of guided optical wave with Gaussian approximation
Journal of lightwave technology, Vol. 21, No. 10, pp. 2340-2351, October 10, 2003
- Authors:** T. Hashimoto, T. Saida, I. Ogawa, M. Kohtoku, T. Shibata, H. Takahashi
Title: Optical circuit design based on a wavefront-matching method
Optics letters, Vol. 30. No. 19, pp. 2620-2622, October 1, 2005
- Authors:** J. Sakamoto, K. Watanabe, M. Itoh, T. Hashimoto
Title: Computer-generated optical mode-managed funnel coupler for reducing intrinsic coupling loss
Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO): Science and Innovations, SM1F. 2, June 5, 2016
- Authors:** T. Hashimoto
Title: Wavefront matching method as a deep neural network and mutual use of their techniques
Optics Communications, Vol. 498, pp. 127216-, June 25, 2021

謝辞

本博士論文をまとめるにあたり、懇切な御指導と御鞭撻を賜りました九州大学大学院 総合理工学研究院 浜本貴一 教授、また、貴重な御見解と御助言をいただきました同大学総合理工学研究院 吉武剛教授、ならびに、システム情報科学研究院 加藤和利教授に謹んで感謝申し上げます。同大学 総合理工学研究院 姜海松 助教には、浜本貴一教授とともに、研究のご指導をはじめ、光エレクトロニクス(浜本)研究室での生活面においてもサポートを頂きました。大変ありがとうございました。コロナ禍の中で、なんとか本博士論文をまとめられたのは、研究上のご指導に加えて、浜本先生、姜先生の粘り強いサポートがあればこそ、と感謝の念に堪えません。

本博士論文における成果の多くは、日本電信電話株式会社（以下、NTT）旧光エレクトロニクス研究所・旧フォトニクス研究所、および、先端集積デバイス研究所の研究開発を通して生まれたものです。

NTT における研究業務を続けながら社会学生として論文執筆を行うにあたり、岡田顕 先端集積デバイス研究所長、寺田純 企画部長、坂本健 光電子融合研究部長には、全面的に支援いただきました。大変ありがとうございました。

新入社員のときからご指導くださった山田泰文様を始め NTT 茨城研究開発センタの皆様には、本研究の基礎となる光デバイス研究はもとより研究や仕事に取り組む姿勢・考え方を含め多くのことをお教えいただきました。大変ありがとうございました。特に河内正夫様や大森保治様には、職場を離れたあとも、ポイントポイントで熱のあるご助言をいただきました。本博士論文に記載している内容について研究として考え続けてこられたのは、思いをもって取り組むことの大切さを、様々なご助言を通して教えていただいたからではないかと思えます。感謝いたします。

本博士論文に記載されている研究を開始したのは、ちょうど NTT 茨城研究開発センタから NTT 厚木研究開発センタに研究所ごと引っ越してきたころでした。鳥羽弘様、北川毅様、鈴木扇太様にサポートいただきながら、職場の先輩・同僚である小川育生様、大山貴晴様、山田貴様や、PLC 技術について議論して下さった、井上靖之様、笠原亮一様をはじめ多くの方々と議論させていただき、この論文の研究を芽吹かせることができました。大変ありがとうございました。その後、NTT 東日本に2年ほど出向することになり、その間、研究を終わらせることなく育てて下さった、高橋浩様、才田隆志様、研究を大きく発展させて下さった坂巻陽平様なくしては、本博士論文の中で、引用させていただいた多くの研究事例はもとより、そもそも研究自体もなかったのではないかと思います。大変ありがとうございました。また、現在進行形で新たな切り口で本研究を発展させてくださっている、中島光雅様、阪本隼志様には、日々刺激をいただき、本博士論文に深みを加えていただきました。大変ありがとうございました。茨城研究開発センタの時代からずっとご指導いただき、いまでも NTT エレクトロニクスという立場からご指導くださっている日比野善典様、柳澤雅弘様からは、日々PLC について考える機会をいただき、勉強させていただくことができました。大変ありがとうございました。

ここに書ききれなかった本研究に関わっていただいた皆様に感謝申し上げます。ありがとうございました。

最後に、いつもあたたかく支援してくれた妻・領子に心から感謝いたします。

Appendix

A.1 有限差分 BPM の式

実際の計算に用いている有限差分 BPM の式を以下に記す。式 2-1 の Schrödinger 方程式 $i\partial_z \psi = H\psi$ ($H = K + V, K = -\partial_x^2 / (2\beta), V = -\beta\Delta(x, z)$) について Crank-Nicolson 法を適用する。Crank-Nicolson 法では、伝搬方向に離散化した z と $z + \Delta z$ の中心、 $z + \Delta z / 2$ の方程式になるように、左辺は通常の差分式、右辺についてはフィールド ψ の z と $z + \Delta z$ の値の平均値となるように平均値で近似した式 $i \frac{\psi_m - \psi_{m-1}}{\Delta z} = H \frac{\psi_m + \psi_{m-1}}{2}$ を解いていく。この式を変形して、次のステップのフィールド ψ_m をフィールド ψ_{m-1} で表して下記が得られる：

$$\begin{aligned} \psi_m &= \left(1 - i \frac{1}{2} H \Delta z\right)^{-1} \left(1 + i \frac{1}{2} H \Delta z\right) \psi_{m-1} \\ &\left| \begin{array}{l} \because H = -\frac{1}{2\beta} (\partial_x)^2 + \frac{1}{2\beta} (\beta^2 - k_0^2 n^2(x)) \\ \because 1 \pm i H \Delta z = -\frac{i \Delta z}{2\beta} \left(i \frac{4\beta}{\Delta z} \pm (\partial_x)^2 \mp (\beta^2 - k_0^2 n^2(x)) \right) \\ \because (\partial_x)^2 f \approx \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{(\Delta x)^2} = D^2 / (\Delta x)^2 f \end{array} \right. \quad D^2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \left(i \frac{4\beta}{\Delta z} (\Delta x)^2 - D^2 - (\beta^2 - k_0^2 n^2(x)) (\Delta x)^2 \right)^{-1} \left(i \frac{4\beta}{\Delta z} (\Delta x)^2 + D^2 + (\beta^2 - k_0^2 n^2(x)) (\Delta x)^2 \right) \psi_{m-1} \\ &\quad \left| \because k_0^2 n^2(x) = k_0^2 n_{\text{ref}}^2 (1 + \Delta(x))^2 \approx k_0^2 n_{\text{ref}}^2 + 2k_0^2 n_{\text{ref}}^2 \Delta(x) \approx \beta^2 + 2\beta^2 \Delta(x) \right. \\ &\approx \left(i \frac{4\beta}{\Delta z} (\Delta x)^2 - D^2 - 2\beta^2 (\Delta x)^2 \Delta \right)^{-1} \left(i \frac{4\beta}{\Delta z} (\Delta x)^2 + D^2 + 2\beta^2 (\Delta x)^2 \Delta \right) \psi_{m-1} \\ &\quad \left| \because a \stackrel{\text{def}}{=} i \frac{4\beta}{\Delta z} (\Delta x)^2, \quad b \stackrel{\text{def}}{=} 2\beta^2 (\Delta x)^2 \right. \\ &= (a - D^2 - b\Delta)^{-1} (a + D^2 + b\Delta) \psi_{m-1} = \left(2a(a - D^2 - b\Delta)^{-1} - 1 \right) \psi_{m-1} \end{aligned}$$

この式は、方程式 $i\partial_z \psi = H\psi$ に対して、微小ステップ Δz だけ形式的に時間発展させた $\psi(z + \Delta z) = \exp(iH\Delta z)\psi(z)$ について指数関数を Cayley 変換で近似したことと同じである。

$\exp(iH\Delta z)$ も $\left(1 - i \frac{1}{2} H \Delta z\right)^{-1} \left(1 + i \frac{1}{2} H \Delta z\right)$ も、行列 H が Hermite 行列であるため、ユニタリ行列となる。このことは、フィールド ψ のノルムが保たれることを意味しており、数値計算が安定であることを意味する。 $\left(1 - i \frac{1}{2} H \Delta z\right)^{-1} \left(1 + i \frac{1}{2} H \Delta z\right) \psi$ が $\exp(iH\Delta z) \psi$ に対して良い近似とな

るのは、 ψ が $H\Delta z$ の固有値の絶対値が小さい固有状態の和で表される場合となる。光の伝搬でいえば、横方向の波数が小さい近軸光線近似が成り立つような場合となる。

なお、 -1 乗は逆行列を作用させることを意味するが三重対角行列なので Thomas 法を用いることで効率的が可能になる。

A.2 2次元以上の Gauss 分布パラメータの発展方程式

式 3-1 の Gauss 分布は伝搬方向 z に垂直な横方向の座標 x については、簡単のため 1 次元としているが、2次元以上の次元であってもよい。一般の次元で考えて

$$\psi(x, z) = \sqrt[4]{\det\left(\frac{2}{\pi}\text{Re}\mathbf{M}(z)\right)} \exp\left[-{}^t(\vec{x} - \vec{\chi}(z))\mathbf{M}(z)(\vec{x} - \vec{\chi}(z)) + i\phi(z)\right] \quad (\text{式 A. 2-1})$$

とする。ここでベクトル \vec{a} は N 次元の複素数値ベクトルとする。 \mathbf{M} は複素数値の行列で指数関数の中の座標 \vec{x} の 2 次形式のパラメータを与えるので対称行列である。これに対する発展方程式として、式 3-2 を拡張して

$$i\frac{\partial}{\partial z}\psi = (K+V)\psi \left(K = -\frac{1}{2\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^2, V = \frac{2}{\beta}\left[{}^t(\vec{x} - \vec{\xi}(z))\mathbf{M}_e(z)^2(\vec{x} - \vec{\xi}(z))\right] \right) \quad (\text{式 A. 2-2})$$

とする。すべてのパラメータは実数値である。式 A. 2-1 と式 3-1 との対比から、 $\mathbf{M}(z)$ の固有値は固有ベクトルの方向に対する Gauss 分布の広がり $w(z)$ で表される $w(z)^{-2}$ となっている。式 A. 2-2 と式 3-2 との対比から、 $\mathbf{M}_e(z)^2$ の固有値は固有ベクトルの方向に対する実効導波路幅 $w_e(z)$ で表される $w_e(z)^{-4}$ に対応している。 $\left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^2$ は N 次元のラプラシアンである。(式 A. 2-1) を (式 A. 2-2) に代入して、 \vec{x} の成分 x_i の 2 次式、1 次式、定数項を両辺で比較すると

$$x_i x_j \text{の係数から} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{M} = \frac{2}{i\beta} (\mathbf{M}^2 - \mathbf{M}_e^2) \quad (\text{式 A. 2-3})$$

$$x_i \text{の係数から} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\chi} = \frac{2}{i\beta} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_e^2 (\bar{\chi} - \bar{\xi}) \quad (\text{式 A. 2-4})$$

$$\begin{aligned} \text{定数の比較から} \frac{\partial}{\partial z} \phi = \frac{-1}{\beta} & \left(\text{tr}(\text{Re} \mathbf{M}) + \frac{i}{2} \text{tr}(\text{Re} \mathbf{M})^{-1} \text{Im} \mathbf{M}_e^2 \right. \\ & \left. + 2^t (\bar{\chi} - \bar{\xi}) \mathbf{M}_e^2 (\bar{\chi} - \bar{\xi}) \right) \end{aligned} \quad (\text{式 A. 2-5})$$

が得られる。 tr は行列のトレースを表す。行列の微分 $\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \mathbf{M}^{-1}$ 等を使えば、2次元以上の次元でも第3章と同じ議論ができる。特に、行列 \mathbf{M} や \mathbf{M}_e^2 の固有軸で議論すれば1次元の場合と同様になるが、 \mathbf{M} と \mathbf{M}_e^2 の固有軸は同じとは限らないので、行列まま取り扱うのが良い。

A.3 入力と出力の組が独立でない場合の波面整合法の簡略化

波面整合法において入力と出力の組が独立でないとは、入力と出力 $|\psi_0^q\rangle, |\phi_0^q\rangle$ ($q=1,2,\dots,N_q$) に対して式 4-26 で与えられる直交性が崩れている場合に相当する。そこで、まず、直交基底を用いてそれぞれの状態を表す。入力と出力を十分に表すことのできる $N_r (\geq N_q)$ 個と $N_s (\geq N_q)$ 個の直交する基底 $|\bar{\psi}^r(z)\rangle$ ($r=1,2,\dots,N_r$), $|\bar{\phi}^s(z)\rangle$ ($s=1,2,\dots,N_s$) をとり、その基底で入力と出力を展開して $|\psi^q(z)\rangle = \sum_r f_{qr} |\bar{\psi}^r(z)\rangle$ 、 $|\phi^q(z)\rangle = \sum_s g_{qs} |\bar{\phi}^s(z)\rangle$ とできるとする。ここでの基底の選び方は最終的な結論と関係しないので不足なく展開できていればよい。この展開式を用いると波面整合式 (式 4-27) は

$$\begin{aligned} \delta\Delta(x, z) &= - \sum_q \eta_q \text{Im} \langle \phi^q(z) | x \rangle \langle x | \psi^q(z) \rangle \\ &= - \sum_{r,s} \sum_q \eta_q f_{qr} g_{qs}^* \text{Im} \langle \bar{\phi}^s(z) | x \rangle \langle x | \bar{\psi}^r(z) \rangle \end{aligned}$$

となる。 m_{ij} を i 行 j 列の成分とする行列を $M = [m_{ij}]$ と表して、 $F = [f_{ij}]$ 、 $G = [g_{ij}]$ 、 $H = [\eta_i \delta_{ij}]$

として、 $N_s \times N_r$ 行列 $M = [m_{ij}]$ を $M \stackrel{\text{def}}{=} G^\dagger H F$ とすると

$$\delta\Delta(x, z) = - \sum_{r,s} m_{sr} \text{Im} \langle \bar{\varphi}^s(z) | x \rangle \langle x | \bar{\psi}^r(z) \rangle$$

となる。 $M = [m_{ij}]$ を特異値分解して、特異値 $\tilde{\eta}_p$ に対する N_s 次元の左特異ベクトルを

$|s_p\rangle_{N_s} = {}^t (s_{p1}, s_{p2}, \dots, s_{pN_s})$ 、 N_r 次元の右特異ベクトルを $\langle r_p |_{N_r} = (r_{p1}, r_{p2}, \dots, r_{pN_r})$ とすると、

$N_s \times N_r$ 行列 M を $M = \sum_p \tilde{\eta}_p |s_p\rangle_{N_s} \langle r_p |_{N_r} = \left[\sum_p \tilde{\eta}_p s_{pi}^* r_{pj} \right]$ と表すことができる。この特異値分解

の特異ベクトルの成分を使って $|\tilde{\varphi}^p(z)\rangle = \sum_s s_{ps} |\bar{\varphi}^s(z)\rangle$ 、 $|\tilde{\psi}^p(z)\rangle = \sum_r r_{ps} |\bar{\psi}^r(z)\rangle$ と置くと

$$\begin{aligned} \delta\Delta(x, z) &= - \sum_p \tilde{\eta}_p \text{Im} \sum_s s_{ps}^* \langle \bar{\varphi}^s(z) | x \rangle \langle x | \sum_r r_{ps} |\bar{\psi}^r(z)\rangle \\ &= - \sum_p \tilde{\eta}_p \text{Im} \langle \tilde{\varphi}^p(z) | x \rangle \langle x | \tilde{\psi}^p(z) \rangle \end{aligned}$$

となる。特異値分解の性質から、 $|\tilde{\varphi}^p(z)\rangle$ 、 $|\tilde{\psi}^p(z)\rangle$ は独立な組、すなわち、(式 4-26) で与え

られる直交性を満たす。波面整合式 (式 4-27) $\delta\Delta(x, z) = - \sum_q \eta_q \text{Im} \langle \varphi^q(z) | x \rangle \langle x | \psi^q(z) \rangle$ と比

較すると似た式になっているが、最終的に得られた式の p の取りうる範囲は最初の式の q 取

りうる範囲以下となる。つまり、 $|\psi_0^q\rangle$ 、 $|\varphi_0^q\rangle$ ($q=1, 2, \dots$) ではなくて、 $|\tilde{\varphi}^p(z)\rangle = \sum_s s_{ps} |\bar{\varphi}^s(z)\rangle$ 、

$|\tilde{\psi}^p(z)\rangle = \sum_r r_{ps} |\bar{\psi}^r(z)\rangle$ を使って波面整合法を行えば、少ない入出力のペアで計算すればよい

ので、計算量を減らすことができる。

A.4 複数ポートへの出力における自由度について

q 番目の出力 $|\varphi_o^q\rangle$ をとしたとき独立条件 (直交条件) $\langle \varphi_o^q | \varphi_o^{q'} \rangle = \delta_{qq'}$ が成り立つことが要求される。いま、出力における直交する基底をチャンネルとよび、チャンネルを $|c_m\rangle$ とすると、

$$|\varphi_o^q\rangle \text{ をチャンネルで分解して } |\varphi_o^q\rangle = \sum_m |c_m\rangle \underbrace{\langle c_m | \varphi_o^q \rangle}_{a_{mq}} = \sum_m |c_m\rangle a_{mq} \text{ とおける。このとき独立条件}$$

(直交条件) を満たすためには $\langle \varphi_o^q | \varphi_o^{q'} \rangle = \delta_{qq'} = \sum_m a_{mq}^* a_{mq'}$ という条件が成り立つ必要がある。

適当なユニタリ行列 U を $|\varphi_o^q\rangle$ に作用させて再びチャンネルで分解すると、

$$|\tilde{\varphi}_o^q\rangle = U \sum_m |c_m\rangle a_{mq} = \sum_n |c_n\rangle \underbrace{\langle c_n | U | c_m \rangle a_{mq}}_{\tilde{a}_{nq}} = \sum_m |c_m\rangle \tilde{a}_{mq}$$

となる。ユニタリ行列 U を $|\varphi_o^q\rangle$ に作用させても内積を保つので、このときの係数 a_{mq} の変換

式 $\tilde{a}_{nq} \leftarrow \sum_m \langle c_n | U | c_m \rangle a_{mq}$ という変換であれば許容されることを意味していて、これが自由

度となる。特別な場合として U を対角行列として $U = \sum_m |c_m\rangle e^{i\theta_m} \langle c_m|$ とすれば、これは係数

a_{mq} の位相を変更する式 $\tilde{a}_{nq} \leftarrow \sum_m \langle c_n | U | c_m \rangle a_{mq} = e^{i\theta_n} a_{nq}$ を与え、位相の付け替の自由度を与え

いる式となる。

A.5 随伴法 ^[46]

随伴法は発展方程式 $\frac{d}{dz} |\psi\rangle = |f(|\psi\rangle, \theta)\rangle$ を束縛条件として、評価関数 $L(|\psi_{\text{out}}\rangle, \theta)$ を最小化する

問題において Lagrange 未定乗数法から未定乗数の発展方程式を得て、その解を元に発展方程式のパラメータ θ による評価関数の勾配を得る方法である。Lagrange 未定乗数を $\langle \varphi|$ と

して Lagrange 関数 J を

$$\begin{aligned}
J &\stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{L(|\psi_{\text{out}}\rangle)}_{\text{評価関数}} - \int_{z_{\text{in}}}^{z_{\text{out}}} \underbrace{\langle\varphi| \left(\frac{d}{dz} |\psi\rangle - |f(|\psi\rangle, \theta)\rangle \right)}_{\substack{\text{未定定数} \\ \text{発展方程式=束縛条件}}} dz \\
&= L(|\psi_{\text{out}}\rangle) - (\langle\varphi_{\text{out}}|\psi_{\text{out}}\rangle - \langle\varphi_{\text{in}}|\psi_{\text{in}}\rangle) + \int_{z_{\text{in}}}^{z_{\text{out}}} \left(\frac{d\langle\varphi|}{dz} |\psi\rangle + \langle\varphi| f(|\psi\rangle, \theta)\rangle \right) dz
\end{aligned}$$

と定義する。Lagrange 未定乗数法では未定乗数を含んで各 z で $\partial J/\partial|\psi\rangle = \langle 0|$, $\partial J/\partial\langle\varphi| = |0\rangle$ を解いて、極値条件を求める。いまの場合、 $\partial J/\partial|\psi\rangle = \langle 0|$ が未定乗数 $\langle\varphi|$ の発展方程式

$$\frac{d\langle\varphi|}{dz} = -\langle\varphi|B$$

を与える。ここで B は i, j 成分が $B_{ij} = \partial f_i / \partial \psi_j$ となる行列である。 $|\psi_{\text{out}}\rangle$ による変分から $\langle\varphi|$ の

初期条件 $\langle\varphi_{\text{out}}| = \frac{\partial L}{\partial |\psi_{\text{out}}\rangle}$ が得られる。さらに、 $\partial J/\partial\langle\varphi| = |0\rangle$ が $|\psi\rangle$ の発展方程

$$\frac{d}{dz} |\psi\rangle = |f(|\psi\rangle, \theta)\rangle$$

を与える。それぞれの発展方程式の解 $\langle\varphi|$ と $|\psi\rangle$ は θ の値に対して変化するので θ の関数であると考えて、 $\langle\varphi|$ と $|\psi\rangle$ を Lagrange 関数 J に代入すると発展方程式の束縛条件を与える項は消えるから、 $J=L$ となって、 J の θ に対する勾配は

$$\frac{dJ}{d\theta} = \frac{dL}{d\theta} = \frac{\partial\langle\varphi|}{\partial\theta} \underbrace{\frac{\partial J}{\partial\langle\varphi|}}_{=|0\rangle} + \frac{\partial J}{\partial|\psi\rangle} \underbrace{\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial\theta}}_{=|0\rangle} + \frac{\partial J}{\partial\theta} = \frac{\partial J}{\partial\theta} = \int_{z_{\text{in}}}^{z_{\text{out}}} \left(\langle\varphi| \frac{\partial}{\partial\theta} |f\rangle \right) dz$$

となる。これより、場所 z の θ による微分は $\frac{dL}{d\theta(z)} \propto \langle\varphi| \frac{\partial}{\partial\theta(z)} |f\rangle$ となる。