九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Refined Reduction Techniques to Online Linear Optimization

劉, 亚雄

https://hdl.handle.net/2324/4784639

出版情報：Kyushu University, 2021, 博士（理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式 2）

氏　　名　：劉　亚雄

論 文 名　：Refined Reduction Techniques to Online Linear Optimization
（オンライン線形最適化への帰着技法の精密化）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

オンライン意思決定過程とは，株式投資や動的ルーティングなどにみられる，アルゴリズムによる意思決定と環境からのフィードバックが交互に繰り返される逐次的な意思決定過程であり，意思決定の範囲を規定する決定空間，フィードバックの種類，および，アルゴリズムの性能評価指標の違いにより，様々な理論モデルが提案されている．特に，決定空間をKとしたとき，各試行 t においてアルゴリズムが選択した決定 $x_t \in K$ に対し，損失関数 $f_t: K \to \mathbb{R}$ がフィードバックされ，リグレット $\sum_t f_t(x_t) - \min_{x^* \in K} \sum_t f_t(x^*)$ を最小化することを目的とするオンライン最適化問題は，機械学習理論の分野において，長年にわたり中心的なトピックの一つとなっている．この問題の特徴は，(1)アルゴリズムの性能が累積損失に基づいて定義されていること，および，(2)敵対的な環境を仮定し，最悪の場合の性能保証を与えることを基本理念としていることである．逆にいうと，(1)累積損失型でない問題への拡張や，(2) 必ずしも敵対的な振る舞いをするとは限らない環境の下での，よりタイトな性能保証導出の方法論（学習容易性解析）については不明なことが多い．

そこで本論文では，累積損失型ではない問題としてオンライン負荷分散問題，学習容易性解析の対象となる問題として，オンライン行列補完問題とエキスパート予測の統合問題にそれぞれ取り組んだ．これらの問題は，いずれも，決定空間を凸集合，損失関数を線形関数に制限したオンライン線形最適化（Online Linear Optimization，以下 OLO）問題に帰着可能であることが知られているが，オンライン負荷分散問題とオンライン行列補完問題に対しては，タイトな性能保証が得られていなかった．本論文では，これらの帰着手法をそれぞれ精密化し，タイトな性能保証を与えることに成功した．また，エキスパート予測の統合問題については，既存研究で置いていた強い仮定を外し，より現実的な状況のもとでの性能保証を有するアルゴリズムを構築した．

オンライン負荷分散問題では，各試行において，N 個のサーバーに 1 単位の量のタスクを分散して割り当て（意思決定），それぞれのサーバーのタスク処理時間を観察する（フィードバック）．アルゴリズムの目標は，全サーバーのタスク総処理時間の均等化，すなわち，サーバーごとのタスク処理時間の総和からなるベクトルの無限大ノルム（メークスパン）を最小化することである．従来手法では，この問題を Blackwell 問題と呼ばれる累積損失型ではない別の問題に帰着し，さらに，これを OLO 問題に帰着することにより，リグレット上界を導出していた．Blackwell 問題では距離関数がパラメータの一つとなっているが，従来手法では標準的な 2 ノルム距離を採用していたのに対し，本論文では，特殊な距離尺度を導入し，さらに，Blackwell 問題から 2 つの独立な OLO 問題へという新しい帰着手法を導入することにより，リグレット上界の改善を達成した．

オンライン二値行列補完問題では，各試行 t において，$n \times m$ の 0-1 行列を予測すると，環境からある (i_t, j_t) 成分の真の値が観測される．アルゴリズムの目標は，真の値の予測誤り回数を最小化

することである．従来手法では，この問題を，初めに真値行列に関する補助情報が与えられると一般化した上で，OLO 問題の行列版であるオンライン半正定値計画（OSDP）問題に帰着し，真値行列の分解によって定義されるマージン複雑度 γ と疑似次元 D を学習容易性指標として導入し，誤り回数の上界 $O(D\log(m+n)/\gamma^2)$ を導出している．ただし，OSDP 問題のリグレット上界から直ちに行列補完問題の誤り回数上界が導出できないという点で帰着は不完全であり，導出の過程が複雑である上に，得られた上界は下界とギャップがあった．本論文では，OSDP 問題を解くアルゴリズムで用いる正則化項を，補助情報を用いて補正することで，OSDP 問題のリグレット上界を改善しただけでなく，そのリグレット上界から，行列補完問題の誤り回数の上界 $O(D/\gamma^2)$ を直接得ることに成功した．

エキスパート統合問題では，各試行 t において，N 人のエキスパートのそれぞれの信頼度を N 次元確率ベクトル $x_t \in \Delta_N$ として予測した後，損失ベクトル $l_t \in [0,1]^N$ が環境から与えられ，損失 $x_t \cdot l_t$ を被る．学習容易性解析に関する既存研究では，エキスパートの振る舞いの相関の強さを表す指標を導入し，その指標を用いてよりタイトなリグレット上界を与えるというものがある．特に，損失ベクトルを並べた損失行列のランクを指標とし，ランクが小さい場合にタイトなリグレット上界が得られるという結果があるが，損失行列が低ランクであるとする仮定は非現実的である．また，損失行列が低ランク行列で近似できると仮定を緩和した研究もあるが，その低ランク行列の独立なベクトル集合が張る部分空間に関する情報をアルゴリズムに与えているという点で，非現実的であった．本論文では，そのような事前情報を与えることなく，損失行列が低ランク行列で近似できる場合，ある条件の下で，最悪のリグレット上界よりタイトなリグレット上界を導出することに成功した．