

## On some inhomogeneous differential equations and zeros of L-functions

金城, 俊輝

<https://hdl.handle.net/2324/4784420>

---

出版情報 : Kyushu University, 2021, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

氏 名	金城 俊輝			
論 文 名	On some inhomogeneous differential equations and zeros of $L$ -functions (ある非斉次の微分方程式と $L$ 関数の零点について)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	金子 昌信
	副 査	九州大学	准教授	権 寧魯
	副 査	上智大学	教授	都築 正男

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文で研究されていることは、ある種の局所対称空間上の非斉次線形微分方程式の解となっているような保型関数の性質を、いくつかの種類の  $L$  関数の零点に結びつける、というものである。究極的な目標としてはリーマン予想があり、30 年以上殆ど顧みられていない志村五郎の先行研究を発展させたものである。

所謂リーマンゼータ関数の非自明な零点に関するリーマン予想は、150 年以上未解決の難問であるが、一つのアプローチとして、ヒルベルトとポリヤによって提唱されたとされる、リーマンゼータ関数の零点をある微分作用素の固有値と関連付けることによって解けるのではないかと、という方針がある。この方向での一つの成功例は 1956 年のセルバーグの結果で、彼の名を冠するゼータ関数の零点がラプラシアン固有値と関連付けられることによって、リーマン予想の類似が証明された。しかしながら、本来のリーマンゼータ関数については、空間と作用素についていくつもの候補が挙げられてきたものの、未だ大きな進展はないと言ってよい。

1989 年に志村五郎は、セルバーグの研究にも影響されたであろう、複素上半平面上のラプラシアンを用いて記述される、パラメータ  $s$  を持つある非斉次の線形微分方程式の解として現れる保型関数と、リーマンのゼータ関数を因子として持つような  $L$  関数の零点との間に興味深い関係が成り立つことを示した。志村の主結果は、その微分方程式の解が急減少関数になることと、パラメータ  $s$  が、対応する  $L$  関数の零点となることが同値であるということとを主張する。志村の手法は保型 Green 関数を用いて解を具体的に構成し、その Fourier 展開を計算することで解の尖点での挙動を精密に調べ、対応する  $L$  関数との関係を明示的に得る、というものである。志村は高次元の群に関する微分方程式の解について類似の結果が成立するかを問うていたが、その後この論文は殆ど引用されることもなく、埋もれてしまっていた状況にあった。

本論文の提出者金城俊輝はこの志村の研究を取り上げ、変数  $s$  を含む  $n$  次元上半空間の非斉次の線形微分方程式の解と  $L$  関数の関係を研究した。志村の手法を参考に、 $n$  次元実上半空間上の保型 Green 関数を用いて、方程式の解を具体的に構成した。技術的にはやはり格段に面倒な計算をこなす必要がある。この解の Fourier 展開を具体的に記述することによって、 $n$  次元上半空間上のカスプ関数に関するランキンセルバーグ型の  $L$  関数、有理数体上の定符号四元数環に関するゼータ関数、実 2 次体のデデキントゼータ関数という、それぞれに数論的に興味深い、異なる三つの型の  $L$  関数について、その零点と非斉次の微分方程式の解の間について志村と同様の結果を得た。特に四元数環のゼータ関数の場合は、合同部分群の楕円モジュラー形式の空間がテータ級数で張られるのはいつかというヘッケの問題とも絡めてゼータ関数が構成されており、筆者の独創性が発揮され

た定理になっている。その結果自体も大変興味深く、今後の発展が期待できるものに思われる。また、得られた微分方程式の解に更にある微分作用素を作用させることで、ラプラシアンに関する、ある偶数  $2m$  次の非斉次の線型微分方程式の解を構成した。そうして、このようにして得られた関数が急減少関数となることと対応する  $L$  関数の零点の位数が  $m$  以上であることが必要十分であるということを証明した。これは志村の結果にはない一般化であり、 $L$  関数の零点の位数に関する言明をこのような形で得られるというのは興味深く、高く評価できる。

参考論文として、上半平面上の、本論文とは異なるある微分方程式の解の保型性（モックモジュラー性）に関する研究があり、これは既に学術雑誌に受理済みである。本論文の結果については近く投稿予定で、一定以上の水準の学術誌に受理されると見込まれる。

これらの研究結果は整数論、とくにゼータ関数と保型形式の分野において価値あるすぐれた業績と認められる。よって本研究者は博士（数理学）の学位を授与される資格があるものと認める。