E, de Shalit 「The Explicit Reciprocity Law in Local Class Field Theory」(preprint)の紹介 (代数的整数論)

金子, 昌信
東京大学

出版情報：京都大学数理解析研究所講究録. 589, pp.105-111, 1986-04. Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University

数理解析研究所講究録
589巻 1986年 105-111

E. de Shalit「The Explicit Reciprocity Law in Local Class Field Theory」(preprint)の紹介

東大理 金子 昌信 (Masanobu Kaneko)

§.1 準備

k : 局所体

$\mathcal{O}$; その整数環　$\mathfrak{p}$; 極大イデアル

π : ひとつの素元, $q = \#(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$　とする

まず, 以下で必要な Lubin-Tate theory を復習する

$$\mathcal{F}_\pi \overset{\mathrm{def}}{=} \{ l \in \mathcal{O}[[T]] \mid l(T) \equiv \pi T \bmod \deg 2,\ l(T) \equiv T^q \bmod \pi \}$$

◎各 $l \in \mathcal{F}_\pi$ に対し, $\mathcal{O}$ 上の1次元可換形式群 F_l で, $l \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}} F_l$ なるものが唯一存在する. F_l による加法を $[+]_l$, 或いは l を省略して $[+]$ で表す.

◎ ring hom

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\text{inj}} & \mathrm{End}_{\mathcal{O}} F_l \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & [a]_l(T) = aT + \cdots\cdots \end{array}$$

があって, 特に $[\pi]_l(T) = l(T)$

◎ $l, l' \in \mathcal{F}_\pi \Rightarrow F_l \underset{\mathcal{O}}{\cong} F_{l'}$

$l \in \mathcal{F}_\pi$, $l' \in \mathcal{F}_{\pi'}$ (π' は異なる素元) ならば

$F_f \underset{\mathcal{O}_K}{\simeq} F_{f'}$ ただし $K=\hat{k}_{ur}$ (kの最大不分岐拡大の完備化)

◎ $\mathbb{Z}\ni n\geq 0$ に対し
$W_f^n \overset{\mathrm{def}}{=} \{w\in \bar{k} \mid [\pi^n]_f(w)=0\}$ とおくとき
$k(W_f^n)$ はfに無関係なkの拡大体で，これをk_π^nとかく．
k_π^n/k は有限次完全分岐アーベル拡大 ($[k_\pi^n:k]=(q-1)q^{n-1}$)
ノルム群 $N(k_\pi^n/k)=\langle\pi\rangle\times(1+\mathfrak{p}^n)$
$\tilde{W}_f^n \overset{\mathrm{def}}{=} W_f^n - W_f^{n-1}$ とすると $\tilde{W}_f^n$の任意の元はk_π^nの素元

以上 cf. Lubin-Tate [4]

Kummer pairing の定義

$\mathfrak{p}_n$ を k_π^n の整数環の極大イデアルとする．
また，$F_f(\mathfrak{p}_n)$で，集合$\mathfrak{p}_n$にF_fによる加法及び，$\mathcal{O}\hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}}F_f$ によって$\mathcal{O}$-加群の構造を入れたものを表す．
このとき，pairing

$$(\ , \ )_{n,f} \ ; \ F_f(\mathfrak{p}_n)\times(k_\pi^n)^\times \longrightarrow W_f^n$$

を次のように定義する．

まず，$\alpha \in \mathfrak{p}_n$ に対し，$\exists a \in \bar{k}$ s.t. $[\pi^n]_\ell(a) = \alpha$
（存在は，$[\pi]_\ell$：多項式の場合に帰着させる）
このとき $k_\pi^n(a)/k_\pi^n$ は有限次アーベル拡大となる．
$\beta \in (k_\pi^n)^\times$ に対し σ_β で対応する Artin symbol を表す
そこで，

$$(\alpha, \beta)_{n,\ell} \overset{\text{def}}{=} \sigma_\beta(a)\,[-]_\ell\, a \quad \in W_\ell^n$$

右辺は a のとり方によらない．

$(\alpha, \beta)_{n,\ell}$ は α について $\mathcal{O}$-linear
β について linear

§2 定理

F_ℓ の Tate module の generator $(\omega_n)_{n \geq 1}$ を fix する
即ち，$\omega_n \in \widetilde{W}_\ell^n$，$[\pi]_\ell(\omega_n) = \omega_{n-1}$
$\alpha \in \mathfrak{p}_n$ に対し $\exists f \in T\cdot\mathcal{O}[[T]]$ s.t. $f(\omega_n) = \alpha$.
（ω_n は k_π^n の素元であった）
また，Coleman [1] によって
$\beta \in (k_\pi^n)^\times$ に対し $\exists g \in \mathcal{O}((T))^\times$
s.t. $g(\omega_i) = N_i^n(\beta) \quad 1 \leq i \leq n$
$(N_i^n = N_{k_\pi^n/k_\pi^i})$

i.e. $\overset{\substack{k_\pi^1 \\ \Downarrow}}{g(\omega_1)}, \overset{\substack{k_\pi^2 \\ \Downarrow}}{g(\omega_2)}, \text{-----------}, \overset{\substack{k_\pi^{n-1} \\ \Downarrow}}{g(\omega_{n-1})}, \overset{\substack{k_\pi^n \\ \Downarrow}}{g(\omega_n)} = \beta$

ノルム　ノルム　ノルム　ノルム

定理 (de Shalit)

$\alpha \in \mathfrak{p}_n$, $\beta \in (k_\pi^n)^\times$ に対し先のように f, g をとる

$$(f, g)_{n,\ell} \overset{\mathrm{def}}{=} \pi^{-n} \sum_{\omega \in W_\ell^n} \left(\lambda \circ f - \frac{\lambda \circ f \circ [\pi]}{\pi}\right)(\omega)\, \delta g(\omega) + \pi^{-n} \frac{df}{dT}(0)\left(1 - \frac{Ng}{g}(0)\right)$$

とおく

ここで λ は F_ℓ の Lubin-Tate logarithm

$$\delta g = \frac{1}{d\lambda/dT} \cdot \frac{dg/dT}{g} \in T^{-1}\mathcal{O}[[T]]$$

$N : \mathcal{O}((T)) \longrightarrow \mathcal{O}((T))$ は Coleman's norm operator (cf. [1])

この時, $(f, g)_{n,\ell} \in \mathcal{O}$ で

$$(\alpha, \beta)_{n,\ell} = [(f, g)_{n,\ell}]_\ell (\omega_n)$$

注意

・この定理は Coleman によって予想され ([2]) 彼自身, $k = \mathbb{Q}_p$, $[\pi]_\ell = (1+T)^p - 1$ の場合に証明した ([3])

・$(f, g)_{n,\ell}$ の右辺の2項をそれぞれ $\int_{n,\ell}(f, g)$, $\langle f, g \rangle_{n,\ell}$ と書くと, Coleman は, それぞれが $\mathcal{O}$ に属し, $(f, g)_{n,\ell} \bmod \pi^n$ は α, β のみにより, f, g のとり方によらないことを示した. ([2])

・$\langle f, g\rangle_{n,\ell}$ は"補正項"と見なせる．それは，

$\alpha \in \mathfrak{p}_n^2$ 又は $\beta \in N(k_\pi^{2n}/k_\pi^n)$

$$\Rightarrow (f, g)_{n,\ell} \equiv \int_{n,\ell}(f, g) \mod \pi^n$$

・$\beta \in N(k_\pi^{2n}/k_\pi^n) \Rightarrow [(f, g)_{n,\ell}]_\ell(\omega_n)$

$$= [\pi^{-n} \mathrm{Tr}_{k_\pi^n/k}(\lambda(\alpha)\delta g(\omega_n))]_\ell(\omega_n)$$

これは Wiles の結果（[5]）に一致する．

§.3 証明の方針

$[\alpha, \beta]_{n,\ell} = [(f, g)_{n,\ell}]_\ell(\omega_n)$（定理の右辺）とおく

$[\alpha, \beta]_{n,\ell}$ は α について $\mathcal{O}$-linear

β について linear

示すべきは $(\alpha, \beta)_{n,\ell} = [\alpha, \beta]_{n,\ell}$ であるから，

乗法性によって β は k_π^n の素元としてよい

① $\beta \in N(k_\pi^m/k_\pi^n)$ $\forall m \geq n$ の場合．

上の注意にある通り，この場合は Wiles（[5]）によって O.K.

・de Shalit は Coleman power series を使って $\beta = \omega_n$ の場合に帰着させ，簡易化された証明を与えている．

②. 一般の場合.

①に帰着させる.

k_π^n/k ; 完全分岐で, βは素元と仮定しているから

$N_{k_\pi^n/k}(\beta) = \pi'$ は k の素元である.

このとき, 局所類体論 (及び k_π^n の性質 §1) より

$$\begin{cases} k_\pi^i = k_{\pi'}^i & 1 \leqq i \leqq n. \\ \beta \in N(k_{\pi'}^m/k_{\pi'}^n) & \forall m \geqq n \end{cases}$$ がわかる.

すると, ①によって $l' \in \mathfrak{F}_{\pi'}$ (記号は §.1 の通り)

に対し, $(\alpha, \beta)_{n,l'} = [\alpha, \beta]_{n,l'}$ である.

そこで, O_K 上の同型 η ; $F_{l'} \xrightarrow{\sim} F_l$ を

使い, この式を l での pairing に持ち込んで定理

を得る. (この計算は簡単ではないが難しいことは

使わない)

• Wiles ([5]) が, $l = X^q + \pi X$ に固定して考えて

いたのに対し, de Shalit は l 及び π も動かし,

そのときの相互の関係を調べたところに証明のポイ

ントがある.

§.4 応用

$k_\pi^\infty = k(\bigcup_n W_l^n)$.

M ; k_π^∞ に, $\forall n$, $\forall \alpha \in \mathfrak{p}_\infty$ についての $[\pi^n]_l(a) = \alpha$

の根 a（ひとつの代数閉包における）をすべて添加した体

$(k_\pi^\infty)^{p,ab}$; k_π^∞ の最大 pro-p abel 拡大（$p = \mathrm{char}\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}$）

この時

<u>定理（de Shalit）</u>

$$M = (k_\pi^\infty)^{p,ab}$$

証明には explicit reciprocity（§.2の定理）と．Coleman による，$\lambda(\mathfrak{p}_n)$ の dual に関する結果（[2]）を使う．

文献

[dS] de Shalit, E ; The Explicit Reciprocity Law in Local Class Field Theory. preprint.

[1] Coleman, R ; Division values in local fields. Inv. Math. 53, 91-116 (1979)

[2] Coleman, R ; The arithmetic of Lubin-Tate division towers. Duke Math. J. 48, 449-466 (1981)

[3] Coleman, R ; The dilogarithm and the norm residue symbol. Bull. Soc. Math. France. 109, 373-402 (1981

[4] Lubin, J - Tate, J ; Formal complex multiplication in local fields. Ann. of Math. 81, 380-387 (1965)

[5] Wiles, A ; Higher explicit reciprocity laws. Ann. of Math. 107, 235-254 (1978