「エクセル」による実験データの微分、積分計算

馬田, 俊雄
九州大学応用力学研究所技術室

https://doi.org/10.15017/4744061

出版情報：應用力學研究所所報. 85, pp.55-61, 1999-02. 九州大学応用力学研究所

技術報告

「エクセル」による実験データの微分、積分計算

馬　田　俊　雄*

Differential and Integral Calculations of Experimental Data Using "Microsoft Excel"

Toshio MADA

Abstract

A method is presented to suitably and quickly deal with thousands of experimental data using "Microsoft Excel" spread sheet.

Key words : Waveform analysis, Running average method, Differential calculation, Integral calculation

1. は じ め に

実験で得られた数千点にもおよぶ数値データを微分あるいは積分する場合、市販されているパソコンソフト（「Kaleida Graph」など）を用いたりコンピュータ言語（フォートラン等）でプログラムを組んで計算させることになる。なお、この報告で記述する内容のほとんどが「Kaleida Graph」によって実行可能である。しかしこのソフトを利用できる環境にない場合には別の方法を考えなければならないが、パソコンソフトでは思い通りの操作ができないことが多くコンピュータ言語を利用するには専門的な知識と準備の時間が必要となる。

マイクロソフトの表計算ソフトである「エクセル」[2)] は広く普及しているので、これによって実験データの微積分ができれば手軽である。しかし「エクセル」は微積分のメニューを持たない。著者の経験によると手軽にかつ短時間で「エクセル」によって微積分ができ、ほとんど専門的な知識を必要としない方法があるので、それをここで紹介したい。

2. 微　　　分

実験データの微分について述べる前に「エクセル」によって微分をおこなう方法に触れておく。関数$y=f(x)$において、微分は微少なxの増加量（Δx）に対するyの増加量Δyの比であるのでxを極限まで小さくすれば微分値が得られる。なおセルの参照はA1参照形式（詳しくはオンラインヘルプを参照されたい）を用いて記述する。いま、Table 1でA列に等刻みの時間データ、B列に$y=-4900x^2$（yは自由落下の移動距離mm、xは時間）の値、これをもとにC列にばらつきのある数値を作った。C列のデータを微分する手順としては

① D列に微分結果を収める場合はD4（D列の４行目を指す）のセルをマウスでクリックする。そうするとこのセルの周りが黒い縁どりになる。

② ＝を入力し、続いて（C5-C4）/（A5-A4）の記号を入力しEnter（リターン）キーを押す。計算結果がD4に示される。

③ 列の全てにわたって同様な計算を実行させるには、セルD4をクリックしマウスを黒い縁どりの右下に持っていく。マウスポインタが＋になった状態でCtrl（コントロール）キーを押すとポインタが$+^{+}$になるのでCtrlキーとマウスの左ボタンを押したままポインタを列に沿って最後のセルまで下方向にドラッグする。Ctrlキーとマウスの左ボタンを離すことで微分された数値がセルに収められる。

この結果はΔxが十分に小さいなら微分値を表す。Table 1のD列（微分１）は上記の方法による結果であり、E列（微分２）は（C5-C4）/（A5-A4）の計算結果をセルのE5に入れた上で同様の計算をさせている。これだと正確な微分値がセルに入らないのでＦ列（平

1998年10月30日　受理

＊ 九州大学応用力学研究所技術室（高橋　清紹介）

A	B	C	D	E	F	H	I	Row
Time		Data	Differential	Diff. 2	Diff. 3	Diff. average	True value	number
s		mm	calculation 1		mm/s	mm/s	mm/s	
0	0	0	−3				0	4
0.001	−0.0049	−0.003	−27	−3	−15		−9.8	5
0.002	−0.0196	−0.03	−20	−27	−23.5		−19.6	6
0.003	−0.0441	−0.05	−10	−20	−15		−29.4	7
0.004	−0.0784	−0.06	−100	−10	−55		−39.2	8
0.005	−0.1225	−0.16	−50	−100	−75		−49	9
0.006	−0.1764	−0.21	30	−50	−10	−61.2272727	−58.8	10
0.007	−0.2401	−0.18	−120	30	−45	−70.3181818	−68.6	11
0.008	−0.3136	−0.3	−100	−120	−110	−81.8181818	−78.4	12
0.009	−0.3969	−0.4	−100	−100	−100	−95	−88.2	13
0.01	−0.49	−0.5	−50	−100	−75	−99.0909091	−98	14
0.011	−0.5929	−0.55	−250	−50	−150	−103.636364	−107.8	15
0.012	−0.7056	−0.8	20	−250	−115	−116.363636	−117.6	16
0.013	−0.8281	−0.78	−320	20	−150	−131.818182	−127.4	17
	omitted							

Table 1 Examples of differential calculations (D～H) for artificial data (A～C)

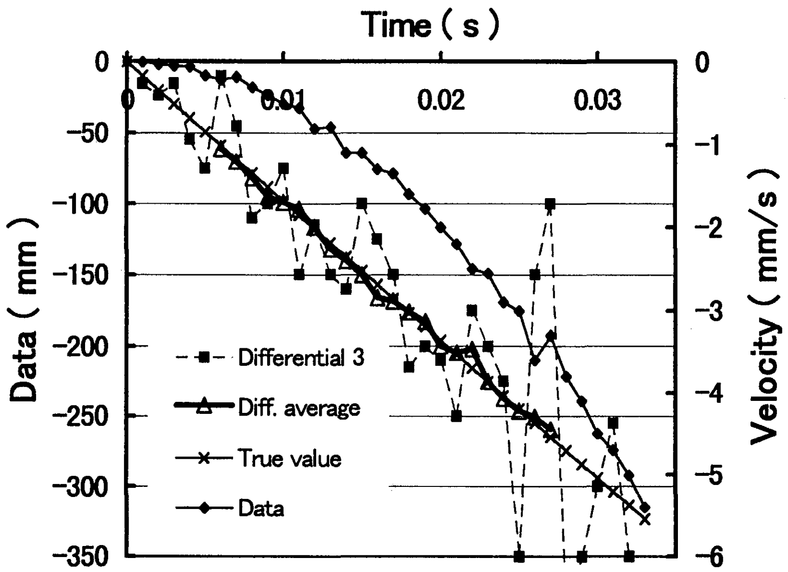

Fig. 1 Examples of diferential calculations

均微分）のようにセル F5 の数式を（C6-C4)/(A6-A4）とし、列の全てに同様な計算を行う。この方法を平均微分と呼ぶことにする。B 列を平均微分すれば I 列(−9800x の値を入れている)と一致するが、ばらつきを持った C 列の微分結果は I 列とは一致しない。これを解消する一つの方法として、F 列(平均微分)で得られた数値に対して同列上の近接する多点のセルの値を合計し、点数で除した値（平均値）を得ることが考えられる。H 列（まるめ）に 11 点（例えばセル F5 から F16 の数値合計の平均値がセル H10 に収められている）の平均値を算出し、それらの結果を Fig. 1 に示す。横軸は時間（s)、縦軸は左がデータ（mm)、右が速度 (mm/s) である。図の中の太実線がまるめたものであり I 列(微分真値)とほぼ同じ線上になる。しかしながらデータにもっと大きなノイズやばらつきが含まれことが予想される実際の実験データにこの方法が適用可能であるか、又まるめを行うことによって波形がどのような影響を受けるかについては後に詳しくふれる。

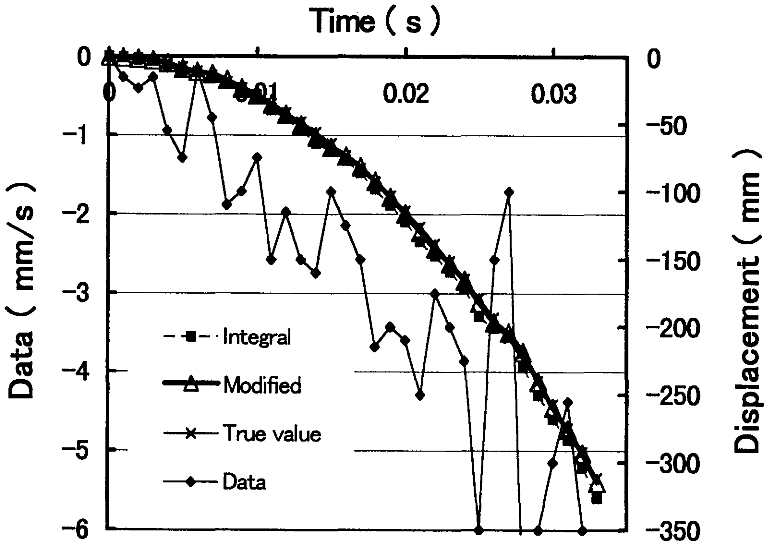

Fig. 2　Examples of integral calculations

3. 積　　　分

得られているデータが例えば加速度の場合これを積分すれば速度が得られる。積分の場合はノイズやばらつきがあってもその割合は縮小するが、数値の違いは累積されるので積分値は真の積分値から大きく離れていくことになりかねない。積分値は直前の累計値に$\Delta x \cdot y$の値（その極限値）を加えることで得ることができる。しかし、実験データのxの刻みは有限なので、真の積分値と完全に一致しないのが普通である。A列にxの値、B列にyの値がありC列に積分結果を収めたい場合にはセルの数式は例えばC2=C1+B2×(A2-A1）とすれば良いが、累積誤差が大きい場合はC2=C1+(B2+B1)×(A2-A1)/2とすることで補正することもできる。

微分の例の様に自由落下におけるばらついた速度データを想定して正しく積分されるかを検証してみる。計算結果をFig. 2に示す。横軸は時間(s)、縦軸は左が速度データ(mm/s)、右が変位(mm)である。データにばらつきがあっても積分の初期値を正しく与えれば、この場合には問題なく積分できていることがわかる。

4. 実際の実験データによる検証

4.1 単純移動平均法[2)]

得られた実験データが多項式の数式に置き換えられるなら微分は簡単である。パソコンソフトのいくつかはデータの分布を9次までの多項式回帰曲線に置き換える事ができるが、実験で得られた衝撃波形などを9次の式で表わそうとしてもその曲線は実際の曲線とは大幅に異なったものになる。実際はさらにノイズも含まれているので数千点におよぶ計測データを多項次数の等価数式に置き換えるのは不可能に近い。そこで何らかの処理をすることになるが波形データの処理手法は数多い。その中の一つとして単純移動平均法がある。

通常実験データはxに対応する数値が等刻みの時間であり、yに対応するものが測定される電圧を物理量（変位、速度、加速度など）に換算した値である。しかしこのxの量はサンプリングタイムより小さくできないし、サンプリングタイムがμsオーダのときこれをもとに微分すると使用に耐えないほどその結果は振動してしまう。移動平均をおこなえばこの振動を減らすことが可能であり、「エクセル」はこの操作を容易におこなうことができる。移動平均法では重み関数を定義できるがここでは点の重みを等しく取る単純移動平均法を移動平均と言うことにする。例えばA列の行10のセルに上下に隣接する行6～14の9点の移動平均計算結果をB列の行10行に置く場合の計算式は=SUM(A6:A14)/9とすればよい。そのセルの数式は列の他のセルにコピーすることができるので、数千点におよぶセルの計算も数式が同じで参照するデータが異なる場合、自動的に相対参照が変更され一括処理をすることができる。なお、一般的に良く知られたコピーの方法は、マウスの左ボタンとCtrlキーを押したままドラッグする方法であるが、セルの数が多い場合は大変な作業になる。これを手軽におこなうには

① コピーする数式が入力されたセルを選択する。

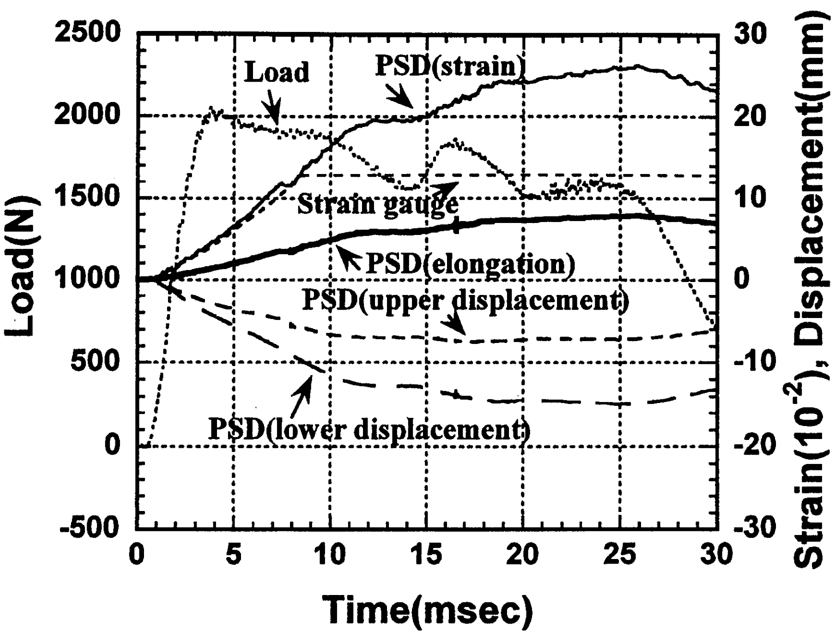

Fig. 3 Plots of experimental data obtained from impact test

② Ctrl キーを押しながら C キーを押す。セルが点線で囲まれる。

③ セルの数式をコピーするには、コピーしたい最初のセル（通常は直下）にマウスポインタを持っていきマウスの左クリックを行い、次に右サイドにあるスライドバーを最後のセルが現われるまで下げる（通常は最下部)。コピーしたい最後のセルにマウスポインタを持っていき Shift キーを押しながらマウスの左クリックを行うと選択範囲が黒色表示になる。

④ この状態のまま Ctrl キーを押しながら V キーを押す。

⑤ 計算結果がセルに納められる。最後に Esc キーを押し、コピーが可能な状態を解除する。

この方法はマウスを押し続けて滑らせ続けなくて良いので、大変に楽である。CPU がペンティアムの 200 MHz クラスのパソコンにおける 4000 個のセルに対する上述の計算は数秒で終了する。

4.2 衝撃試験研究への応用例

これまでに述べた方法を用いて材料の衝撃試験において実際に変位計[3]を用いて得られた変位データを微分してみる。Fig. 3[4] において太実線 PSD (elongation) は衝撃試験で得られた標点間の変位データの差（伸び）である。これを微分して、伸び速度のデータに変換する。前記平均微分計算に相当するグラフを Fig. 4 に示す。グラフ内には伸びと同時に測定された荷重も記入されている。横軸は時間(ms)、縦軸は左が

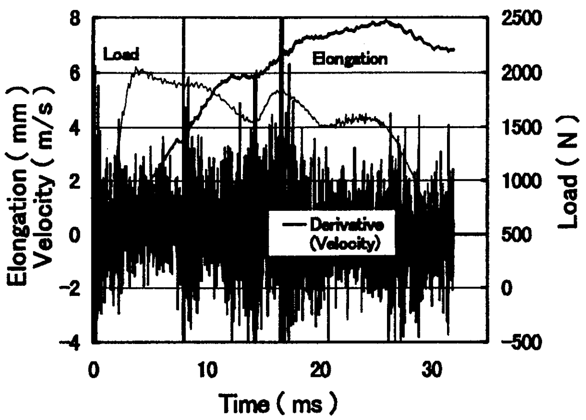

Fig. 4 Time derivative of elongation

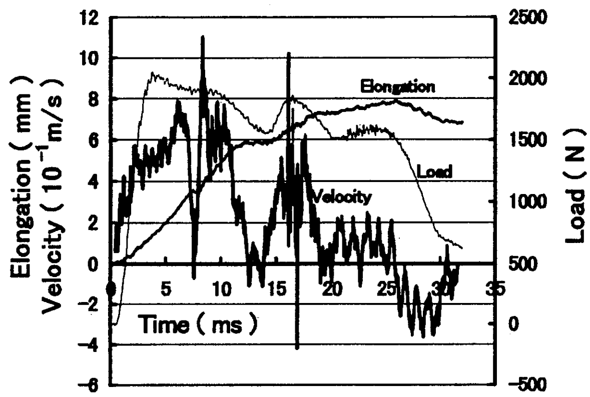

Fig. 5 Velocity obtained by running average method

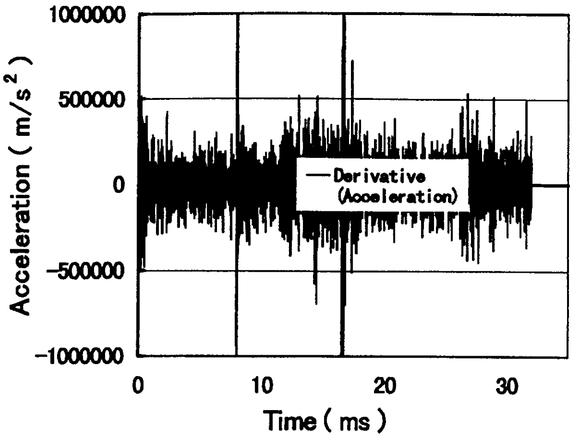

Fig. 6 Acceleration obtained from time derivative of elongation velocity

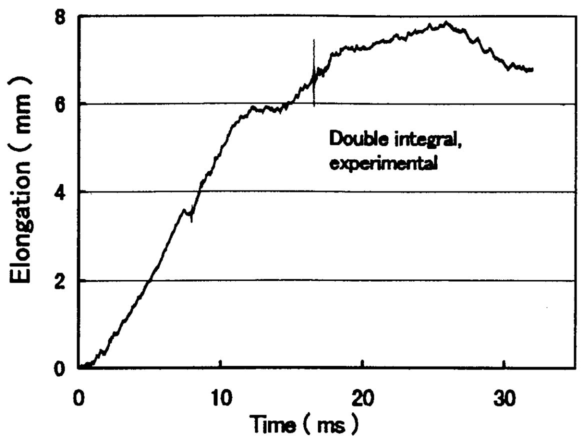

Fig. 7 Results on elongation obtained from double integration and experimental data

伸び（mm）とその速度（m/s）、右が荷重（N）である。サンプリングタイムは8 μsなのでx軸の刻み値5の中には625個のデータが存在する。微分（速度）はノイズが大きく速度変化の持つ本質はつかみにくい。そこで微分データの101点を移動平均し（さらに見やすいようにそれを10倍にしている）同様にプロットする。このグラフをFig. 5に示す。振動が大幅に削減され、速度の変化が見やすくなり、本質も見えてきそうである。101点の平均をした事によって伸びのデータに含まれる現象が速度波形では失われているとしたら本方法は採用できない事になるが、グラフを見る限りにおいては問題なさそうである。なお、元のデータを移動平均した上で平均微分しても結果は同じになる。

次にFig. 4で示した伸びを微分したもの（伸びの速度）をさらに微分すると伸びの加速度が得られる。この結果をFig. 6に示しているが移動平均は全くしていないので、極端に尖ったピークを無視しても桁違いな加速度の値（単位はm/s^2）と激しい振動を伴ったものになっている。しかしながらこのデータを前記の方法で2回積分するとFig. 7に示すように伸びのデータと良く一致する。この結果は、このレポートで述べている微、積分法が正しく、かつ実用的であることを示している。

5. 単純移動平均法の使用限界についての考察

速度や加速度の単純移動平均をおこなって妥当な波形が現われた場合でもその手法による波形変化を知らないと、その結果についての信頼性の程度がわからず、誤った解釈をしてしまう恐れがある。ここで単純移動

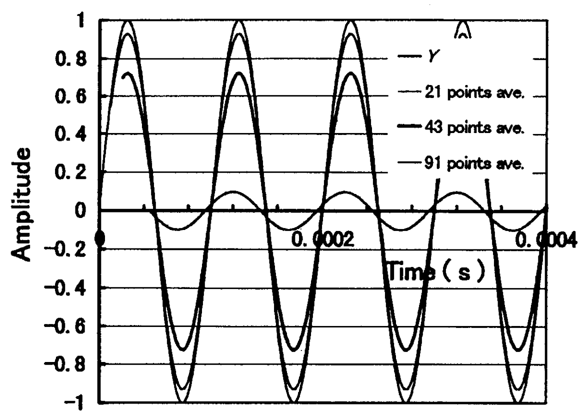

Fig. 8 Examples of the application of running average method to sin wave

平均法の適用限界を考察してみる。単純移動平均をおこなってできた関数は波形を電気回路のローパスフィルターに通した時と同様に高周波成分がカットされる。実験データは種々の基本周波数の合成といえる。関数が種々の周波数から成り立っている場合は個々の基本波の振幅変化を考え、それらを足し合わせれば良い。そこで一つの基本波について考察してみる。$y=\sin(2\pi ft)=\sin(2\pi n/S)$の正弦波を考える。ここで周波数は$f$、$t$は時間、1周期のサンプリングの点数は$S$、$n$は最初のデータから数えたデータの順番である。サンプリングタイムをT、振動の周期をτとすると、$f=1/TS$、$\tau=TS$、$t=nT$の関係がある。例として関数$y=\sin(2\pi\times10000t)$を移動平均処理した場合の結果をFig. 8に示す。横軸は時間（s）、縦軸は振幅であり、サンプリグタイムが$1\mu s$、周波数が10kHzである。43

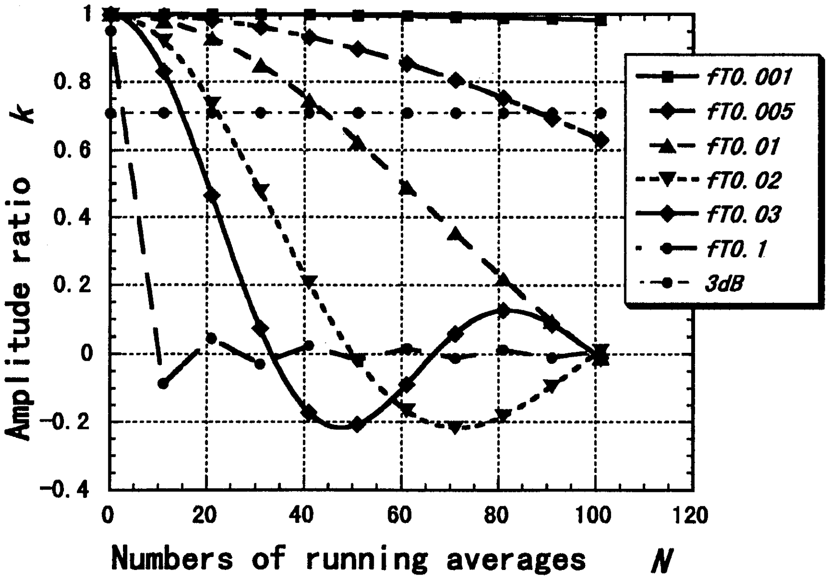

Fig. 9　Relation between N and K

点の単純移動平均によって振幅は約 0.7 倍 (約-3dB) になり、91 点の平均では約 0.1 の振幅となっている。

Fig. 9 にこの関係を示した。fT をパラメータとして横軸には移動平均の点数、縦軸には振幅の減衰比 k をとっている。平均化をおこなう点数を N とすると正弦波の振幅は時間 TN における関数yの値の平均を取るので、TN が 1 周期 TS の数値に近づくほどゼロに近づいていく。さらに多点の平均を行うと振幅の絶対値は増加に転じ増減を繰り返しながらゼロへと漸近する（符号がマイナス時は位相が反転する)。例えば 100 点の移動平均をおこなうと fT 0.001（サンプリングタイムを 1μs とすると 1kHz の周波数）の振幅はほとんど減衰しないのに対して fT0.01（10kHz の周波数）ではほぼゼロに減衰している。このことがノイズを減らすことのできるメカニズムになっている。

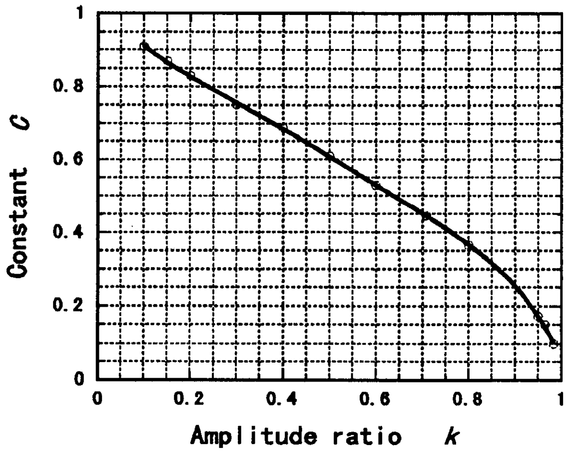

Fig. 11　Relation between k and C

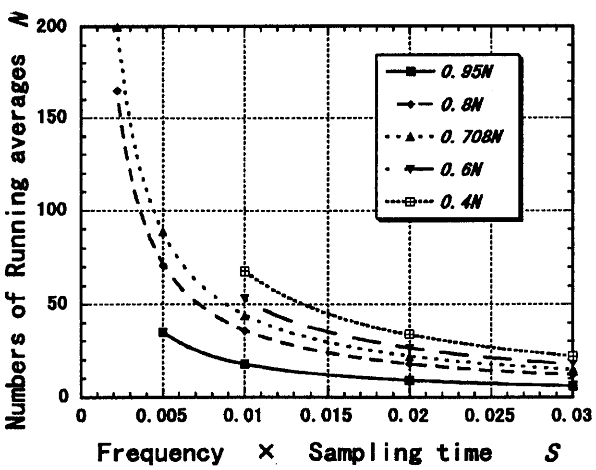

Fig. 10　Relaton betwee S and N

波形記憶装置によってデジタルデータを取り込む場合、現象の速度に応じてサンプリングタイム T を決定する。波形に振動成分がある揚合、1 周期を問題なく表わすために 10 点が必要と考えると、データの中には最大でも約1/10T の周波数までが記録されている。例えば 1μs のサンプリングだと 100kHz もの高速現象を記録できるが、たかだか 10 点の移動平均をおこなうことで、パラメータ fT0.1 の点からわかるように振幅はゼロになる。これは移動平均処理に適さない例と言える。Fig. 9 のデータをもとに fT を横軸に取り、縦軸

に平均化できる個数を取ったグラフがFig. 10である。fTの逆数は1周期のデータ点数であるから、$fT=0.01$即ち1周期のデータ点数が100点のときにkを0.708に押さえたいとすれば約45点の移動平均までなら可能なことがグラフから読み取れる。しかし、実際の計測データはこのように単純ではない。移動平均をおこなえば取り出したい周波数成分の振幅も（周波数に対応して）減少する。現象の周波数が高い場合にノイズだけを取り去るのは困難であり、単純移動平均法の限界と言える。例えば半周期が100点のデータから成り立っているときの移動平均の最大の点数はその5分の1（20点）が目安となろう。なお、NとSには$N \leq CS=C/fT$の関係がある。ここでNは整数、CはFig. 11から求められる定数である。評価したい周波数における振幅の減衰比kを横軸から決定し、この時の定数Cを縦軸から求めておくことでfとNの関係を知ることができる。

最後に実験データ（伸び）の微分波形について再度考察してみる。実験データは単純な周波数で成り立ってはいないので、単純移動平均をおこなって解釈しやすい波形が現われた場合でも、全ての時間における振幅の減少率が一様ではなく、真の微分波形を知るのは困難である。しかし、ある短い時間に分割して考えればその時々の主な周波数はわかりやすい。したがって、分割した時間にこれまで記述した考察を適用すれば微分波形の解釈が相当に信頼性の高いものとなろう。それほど厳密に考えないで良い場合には次の事が言える。Fig. 11から振幅0.708を確保したいときのCは0.44である。4.2で微分した伸びの速度は8μSサンプリングで101点の移動平均をおこなっているので、このデータに含まれる544Hz($f=0.44/(101\times0.000008)$)を超えない周波数成分において、表現されている振幅は最低でも真の振幅値の70.8%は評価できていることがわかる。

6. まとめ

実験データにはばらつきやノイズが含まれており、記憶装置に取り込まれたこれらのデータを正確に微分、積分するのは容易でない。このような場合は本格的な計算をおこなうことになるが概略的な傾向を見たい場合には時間の浪費となる。この報告に示した方法を用いることにより普及したソフトである「エクセル」により、手軽に微積分計算ができることを示した。実際の計測データを処理する場合に波形に高周波成分が含まれていると、応答挙動や振幅が実際のものと異なる微積分結果が生じる恐れがある。しかしながら実際の衝撃実験データに本方法を適用してみて、実用上問題のないことがわかった。また振動を除去するための波形処理（単純移動平均）が応答周波数にどのように影響しているかを定量的に見積もった。ここで述べた方法には当然利用上の限界が存在する。その限界を把握した上でこの方法を活用すれば実験データを微分、積分する場合において、解析時間を大幅に短縮できるであろう。

謝辞

応用力学研究所基礎力学部門破壊力学分野の高橋清教授にはこの技術報告を書くにあたって種々の助言を頂いた。また同分野の新川和夫助教授、東藤貢助手には何かと相談にのって頂いた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

[1] Microsoft Excel 97ヘルプ、ユーザーズ ガイド.

[2] 南　茂夫編著：科学計測のための波形データ処理、(1986)、CQ出版株式会社、38-110.

[3] 馬田俊雄、高橋　清、Ph. Beguelin, G. Aggag：機械学会論文集、**63**-611，A(1997)，1431-1436.

[4] 高橋　清、馬田俊雄、Ph. Beguelin：機械学会論文集、**64**-628，A(1998)，2975.