

差分法における幾つかの知見

内田, 孝紀
九州大学大学院総合理工学研究科 : 博士課程

大屋, 裕二
九州大学応用力学研究所

<https://doi.org/10.15017/4744052>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 84, pp.29-43, 1998-10. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

差分法における幾つかの知見

内 田 孝 紀^{*1} 大 屋 裕 二^{*2}

Some Findings in a Finite-Difference Method

Takanori UCHIDA and Yuji OHYA

Abstract

In order to establish a proper numerical simulation code using a finite-difference method for solving time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, we have examined the following problems: (1) the body shape approximated by a Cartesian coordinate system; (2) the finite-difference form of the convective terms in the Navier-Stokes equations; (3) the outflow boundary condition (or open boundary condition). In this paper, some findings about problems aforementioned are described.

Kew words: Incompressible flow, Computational fluid dynamics, Finite-difference method, Direct numerical simulation, Cartesian coordinate system, Boundary-fitted coordinate system, Regular grid, Staggered grid, Collocated grid, Multi-directional finite-difference method, Interpolation method, Outflow boundary condition

1. 緒 言

本研究は差分法 (FDM) を用いた直接数値シミュレーション (DNS) やラージ・エディ・シミュレーション (LES) の計算コードを構築し、非圧縮性流れの高精度な非定常数値解析を行うことを目標としている。そこで本報では差分形式^{1)~3)}、流出境界条件 (OBC)⁴⁾、デカルト座標系における物体の表現方法⁵⁾の問題を取り上げ、具体的な定式化や実際の計算例を示し、その性質や有効性などを詳細に検討する。

2. デカルト座標系における物体の表現方法

デカルト座標系を用いて複雑配置された物体や複雑地形 (あるいは複雑形状を有する物体) を過ぎる流れを計算する場合、フラグgingと呼ばれる方法によって流体領域と物体領域とを区別し、物体内部の計算は行わずに流体領域のみの計算を行う場合が多い。しかし、この方法では物体の角部などで複雑な手続を要する。そこで、物体内部に含まれる格子点上に流速ゼロの条件を課すのみで、流体領域と物体領域とを区別す

ることなく計算する方法⁶⁾が提案されている。この方法は2次元、3次元を問わず汎用的に使用可能な方法であり、非常に有効であると考えられる。本報ではこの方法を2次元複雑地形を過ぎる流れに適用した。Fig. 1に速度ベクトル図を示す。地形からの流れの剥離や地形下流の渦構造が明確に捉えられ、その有効性が確認された。3次元の計算例は文献⁶⁾を参照された。

3. 差分形式の検討

3.1 デカルト座標系、物体適合座標系(BFC)のレギュラー格子における多方向差分法(MDFDM)

最近、デカルト座標系、物体適合座標系 (BFC) のレギュラー格子 (計算格子の節点上に全ての物理量を定義する。Fig. 2を参照) を用いた支配方程式の空間項の離散化に関して、多方向差分法 (MDFDM)¹⁾が提案された。この方法は物理現象が観測者の設定した座標系には無関係であるという基本原理を念頭に考案された方法である。具体的に2次元の場合は以下のように考える。ある点の離散化を行う際に通常座標系に加えて斜めの座標系の離散化も同時に行い、連続の式に対する差分式の誤差の主要項が座標系の回転に対して不変となるように両座標系から得られた数値解の重みを決定し、これらを線形結合して真の数値解とする。

1998年5月26日 受理

*1 九州大学大学院、総合理工学研究科、大気海洋環境システム学専攻、後期博士課程3年

*2 九州大学応用力学研究所

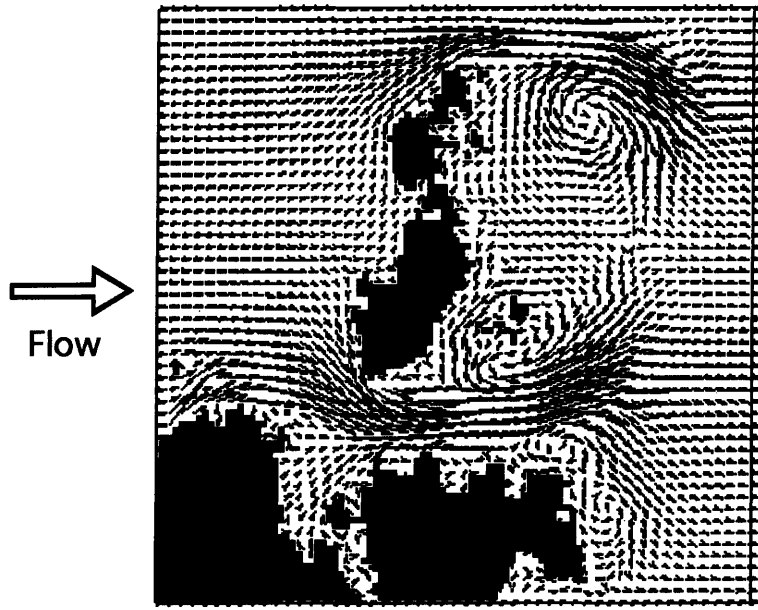


Fig. 1 Flow past two-dimensional complex terrain (velocity vectors).

よって、離散化に関する格子点の情報が多くなり精度の高い数値解が得られることが期待される。また同時に計算の安定性からも有効であると考えられる。以下に多方向差分法 (MDFDM) の定式化を示す。簡単のため、Fig. 2 に示すデカルト座標系の2次元等間隔格子を考える。但し、 $x'-y'$ 系は $x-y$ 系を反時計方向に45度回転させた座標系である (注：以下のプライムは $x'-y'$ 系を意味する)。スカラー量である圧力 p は座標系にはよらないが、速度成分 u, v は両座標系で以下のような対応関係が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= A \mathbf{v} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$x-y$ 系、 $x'-y'$ 系の無次元化された勾配型 (非保存型) の Navier-Stokes 方程式は以下の形で与えられる。

【 $x-y$ 系の Navier-Stokes 方程式】

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$

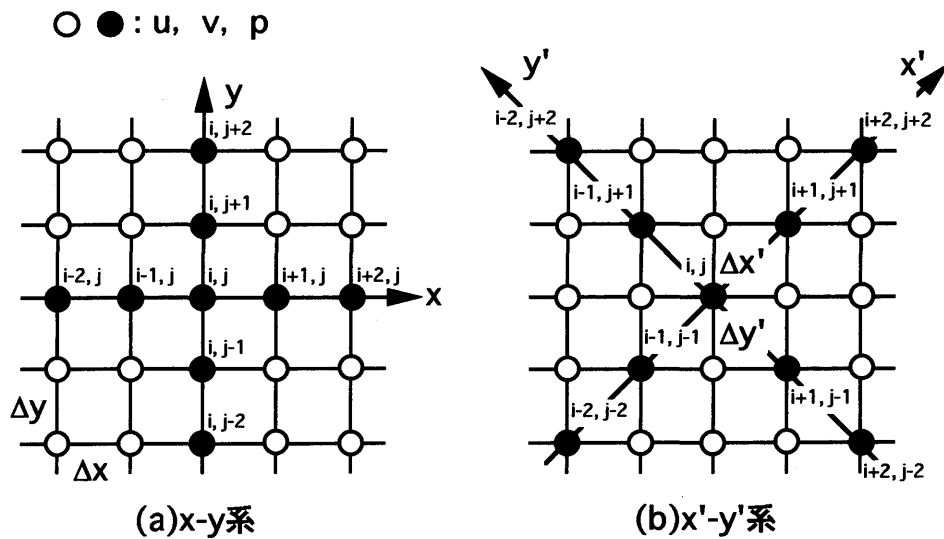


Fig. 2 Two coordinate systems based on a MDFDM (regular grid).

【 $x'-y'$ 系の Navier-Stokes 方程式】

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla' p + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{v}' \quad (3)$$

ここで、(1)式を用いて(3)式を以下の形に変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A\mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') (A\mathbf{v}) &= -\nabla' p + \frac{1}{Re} \nabla'^2 (A\mathbf{v}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v} &= -A^{-1} \nabla' p + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v} &= -\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \nabla' p + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4)$$

(2)式と(4)式を具体的に書き下すと、 $x-y$ 系、 $x'-y'$ 系の無次元化された勾配型（非保存型）の Navier-Stokes 方程式は以下の形に整理される。

【 $x-y$ 系の Navier-Stokes 方程式】

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

【 $x'-y'$ 系の Navier-Stokes 方程式】

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u' \frac{\partial u}{\partial x'} + v' \frac{\partial u}{\partial y'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u' \frac{\partial v}{\partial x'} + v' \frac{\partial v}{\partial y'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

圧力は(5)式と(6)式の発散を取って得られる Poisson 方程式を SOR 法などで反復計算して求める場合が多い。よって、以下に圧力に関する Poisson 方程式を示す。

【 $x-y$ 系の圧力に関する Poisson 方程式】

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{v}) \\ &\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

【 $x'-y'$ 系の圧力に関する Poisson 方程式】

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div}' \mathbf{v}') \\ &\quad - \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right) - \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

実際の計算手順について説明する。1) (7)式と(8)式と

をあらかじめ 2 : 1 に線形結合した式から SOR 法などで圧力 p を求める。2) この圧力 p をもとに(5)式と(6)式から $x-y$ 系と $x'-y'$ 系の速度成分 u, v を各々求めて 2 : 1 に線形結合し、これを真の数値解とする。1)、2)を繰り返して流れ場の時間発展を求める。以下に(5)式と(6)式における対流項の離散化に関して、通常良く用いられる 3 次精度風上差分 (K-K スキーム) を具体的に示す (Fig. 2 を参照)。

【(5)式における対流項の離散化 (K-K スキーム)】

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &\approx u_{i,j} \frac{-u_{i+2,j} + 8(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + u_{i-2,j}}{12\Delta x} \\ &\quad + |u_{i,j}| \frac{u_{i+2,j} - 4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + u_{i-2,j} + 6u_{i,j}}{4\Delta x} \\ &\quad + v_{i,j} \frac{-u_{i,j+2} + 8(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + u_{i,j-2}}{12\Delta y} \\ &\quad + |v_{i,j}| \frac{u_{i,j+2} - 4(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + u_{i,j-2} + 6u_{i,j}}{4\Delta y} \end{aligned} \quad (9)$$

【(6)式における対流項の離散化 (K-K スキーム)】

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial u}{\partial x'} + v' \frac{\partial u}{\partial y'} &\approx u'_{i,j} \frac{-u_{i+2,j+2} + 8(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1}) + u_{i-2,j-2}}{12\Delta x'} \\ &\quad + |u'_{i,j}| \frac{u_{i+2,j+2} - 4(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + u_{i-2,j-2} + 6u_{i,j}}{4\Delta x'} \\ &\quad + v'_{i,j} \frac{-u_{i-2,j+2} + 8(u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + u_{i+2,j-2}}{12\Delta y'} \\ &\quad + |v'_{i,j}| \frac{u_{i-2,j+2} - 4(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + u_{i+2,j-2} + 6u_{i,j}}{4\Delta y'} \end{aligned} \quad (10)$$

3.2 デカルト座標系のスタッガード格子における対流項補間法

一般に Navier-Stokes 方程式の対流項に関して、勾配型（非保存型）を用いた方法は高次精度差分への拡張は比較的簡単であるが、運動量あるいは運動エネルギーの保存性は発散型（保存型）を用いた方法よりも満足されにくい（注：その他に混合型や回転型もある）。これに対して最近、デカルト座標系のスタッガード格子（セル中心に圧力 p を定義し、セル中心から半格子ずらした点に速度成分 u, v を定義する。Fig. 3 を参照）を用いた勾配型（非保存型）の Navier-Stokes 方程式の離散化に関して、エネルギー保存型の対流項補間法²⁾が提案された。以下に対流項補間法の定式化を示す。簡単のため、Fig. 3 に示すデカルト座標系の 2 次元等間隔格子を考える。対流項補間法ではまず速度成分 u, v の定義点から対流速度の方向に半格子ずらした幾つかの点列で対流項を差分近似する。次にこれらの差分近似値を速度成分 u, v の定義点に補間して対流項を評価する。以下に 2 次精度の対流項補間法（2 点差分・2 点補間）、すなわち、2 次精度中心差分

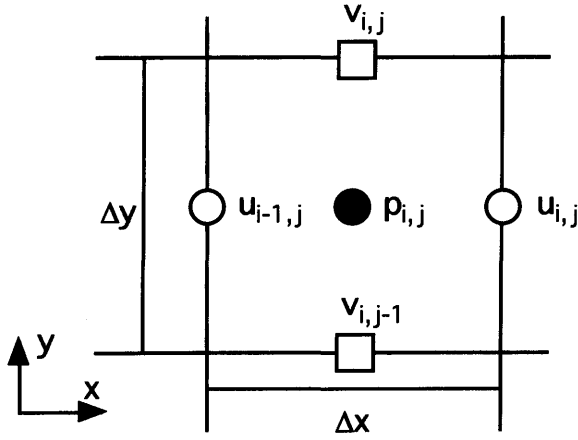


Fig. 3 Staggered grid.

を具体的に示す。

$$\begin{aligned}
 \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} &\approx [\overline{u^x \delta_x u^x} + \overline{v^y \delta_y u^y}]_{i,j} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1/2,j} + \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i-1/2,j} \right) + \frac{1}{2} \left(\left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j+1/2} + \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j-1/2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} \times \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \times \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i,j+1} + v_{i,j}}{2} \times \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2} \times \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \quad (11)
 \end{aligned}$$

ここで、 δ は下付添字方向の中心差分、 $-$ は上付添字方向の補間を表す。このように差分、補間ともに速度成分 u , v の定義点から半格子ずらした点列から展開されるために、より近接点での評価が可能となり、スタaggered格子に適した方法となる。

梶島²⁾ は対流項補間法の整合性、互換性、保存性について論じ、この方法のより本質的な利点は $\partial u / \partial x$, $\partial v / \partial y$ をセル中心における圧力 p の定義点で連続の式と同じ差分式で評価することによってもたらされると説明している。すなわち、2次精度中心差分の場合、以

下に示す連続の式が離散的に満足されている限り対流項と連続の式との整合性が向上し、勾配型(非保存型)と発散型(保存型)、さらにその混合型との間で互換性が保たれ、エネルギーが保存される。

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j} &\approx [\delta_x u + \delta_y v]_{i,j} \\
 &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} = 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

3.3 物体適合座標系(BFC)のコロケート格子における対流項補間法

物体適合座標系(BFC)の差分法(FDM)の構成に関しては速度場の基本変数と計算格子上的変数配置との選択において任意性がある。スタaggered格子を用いた場合は反変速度成分との組み合わせ⁷⁾、コロケート格子を用いた場合は物理速度成分との組み合わせ⁸⁾が良いとされている。後者を用いた勾配型(非保存型)のNavier-Stokes方程式の離散化に関してもエネルギーの保存性が期待できる差分形式³⁾が提案されている。この方法は3.2節で述べた対流項補間法をコロケート格子を用いた物体適合座標系(BFC)に拡張したもので、以下のように定式化される。簡単のため、Fig. 4に示す2次元の物体適合座標系(BFC)を考える。コロケート格子ではセル中心に圧力 p 、物理速度成分 u , v を定義し、対流速度成分は反変速度成分 U , V にヤコビアン J を乗じた JU , JV をセル表面にスタaggered配置する(Fig. 4を参照)。ここで、反変速度成分 U , V とヤコビアン J は以下の形で与えられる。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (13)$$

2次元の物体適合座標系(BFC)における無次元化された連続の式、勾配型(非保存型)のNavier-Stokes方程式は以下の形で与えられる。

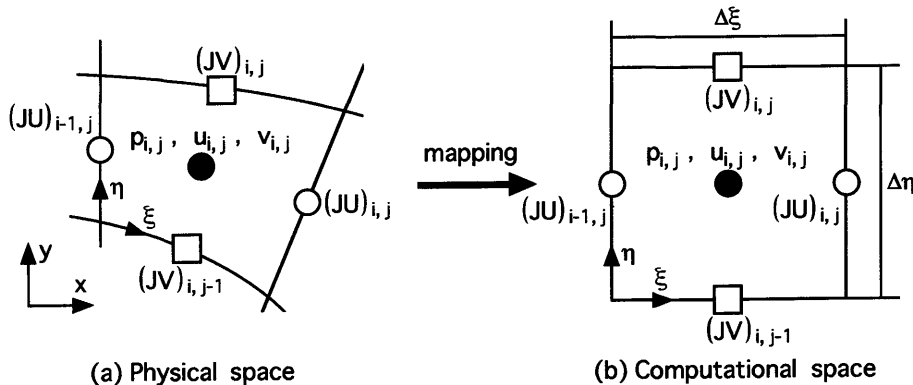


Fig. 4 Collocated grid.

【連続の式】

$$\frac{1}{J} \left[\frac{\partial(UV)}{\partial\xi} + \frac{\partial(UV)}{\partial\eta} \right] = 0 \quad (14)$$

【Navier-Stokes 方程式】

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[(UV) \frac{\partial u}{\partial\xi} + (UV) \frac{\partial u}{\partial\eta} \right] = -\xi_x \frac{\partial p}{\partial\xi} - \eta_x \frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[(UV) \frac{\partial v}{\partial\xi} + (UV) \frac{\partial v}{\partial\eta} \right] = -\xi_y \frac{\partial p}{\partial\xi} - \eta_y \frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (15)$$

Table 1 Simulation codes developed in the present study.

	Dimension of cal.	Coordinate system	Variable arrangement	Coupling algorithm	FDM form	Discritization of advective terms	
code 1	2-D	Cartesian uniform grid (without coordinate transformation)	regular	MAC method	usual FDM	K-K scheme	
code 2					MDFDM		
code 3			staggered	F-S method	usual FDM	interpolation method (2nd-order)	
code 4		Cartesian non-uniform grid ($x=x(\xi), y=y(\eta)$)	regular	MAC method		usual FDM	K-K scheme
code 5		BFC ($x=x(\xi, \eta), y=y(\xi, \eta)$)					
code 6							
code 7		Cartesian non-uniform grid (without coordinate transformation)	staggered	F-S method	usual FDM	interpolation method (2nd-order)	
code 8		BFC ($x=x(\xi, \eta), y=y(\xi, \eta)$)	collocated				
code 9	3-D	Cartesian uniform grid (without coordinate transformation)	staggered				
code 10		BFC ($x=x(\xi, \eta, \zeta), y=y(\xi, \eta, \zeta), z=z(\xi, \eta, \zeta)$)	collocated				

(15)式の時間積分法として Euler の 1 次陽解法に基づいた Fractional-Step 法を用いた場合の計算手順を説明する。1) (15)式を 2 つに分けてセル中心において対流項、粘性項を求め、物理速度成分 u, v の中間値 u^*, v^* を予測する。2) (13)式を用いてセル中心における u^*, v^* を反変速度成分 U^*, V^* に変換し、ヤコビアン J を乗じて JU^*, JV^* としてセル表面にスタッガード配置する。3) JU^*, JV^* が(14)式を満足するように圧力 p^{n+1} を Poisson 方程式から SOR 法などで反復計算して求める。4) u^*, v^*, JU^*, JV^* に p^{n+1} の勾配を加えて新たな時間ステップの $u^{n+1}, v^{n+1}, JU^{n+1}, JV^{n+1}$ を得る。1)-4)を繰り返して流れ場の時間発展を求める。以下に 2 次精度の対流項補間法 (2 点差分・2 点補間)、すなわち、2 次精度中心差分を具体的に示す。但し、 $\Delta\xi=\Delta\eta=1$ とする。

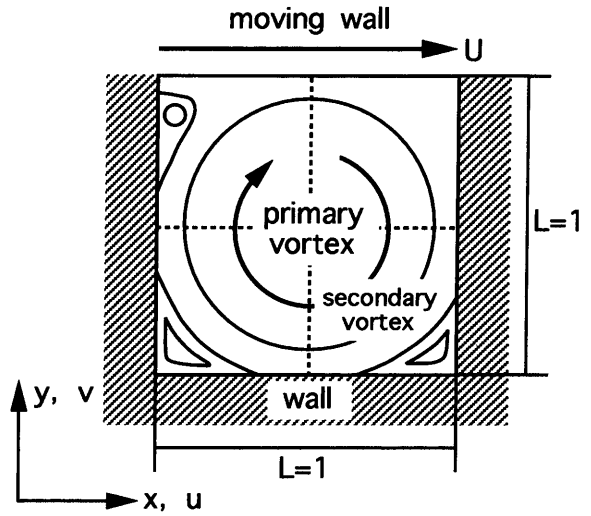
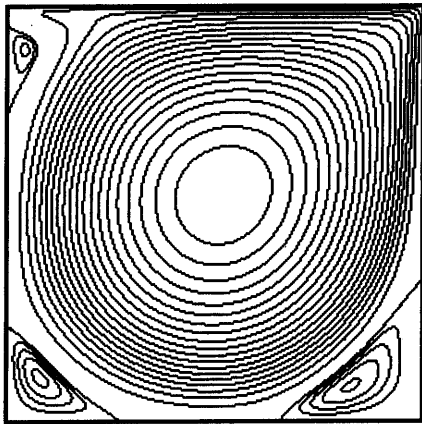
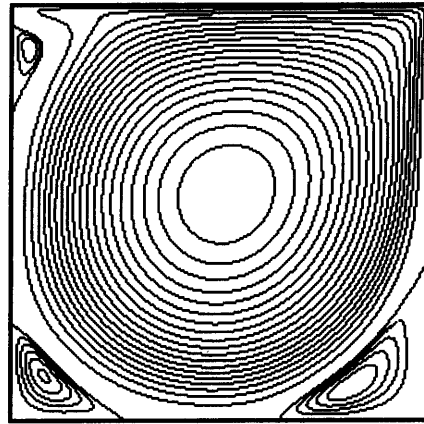


Fig. 5 A schematic view of a cavity flow.



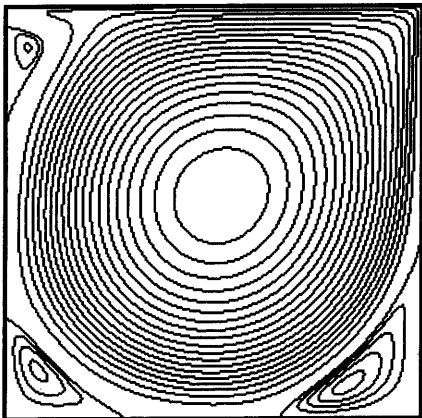
(a) code1

(regular grid, usual FDM)



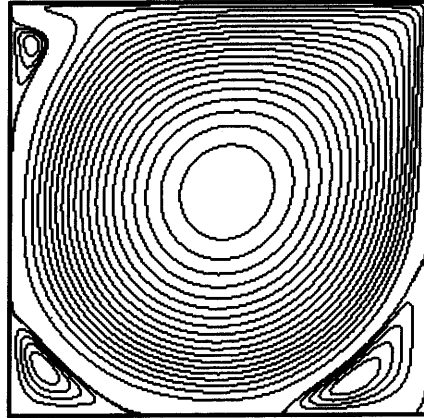
(b) code2

(regular grid, MDFDM)



(c) code3

(staggered grid, interpolation method)



(d) code8

(collocated grid, interpolation method)

Fig. 6 Comparison of streamlines at a fully-developed state ($Re=3200$).

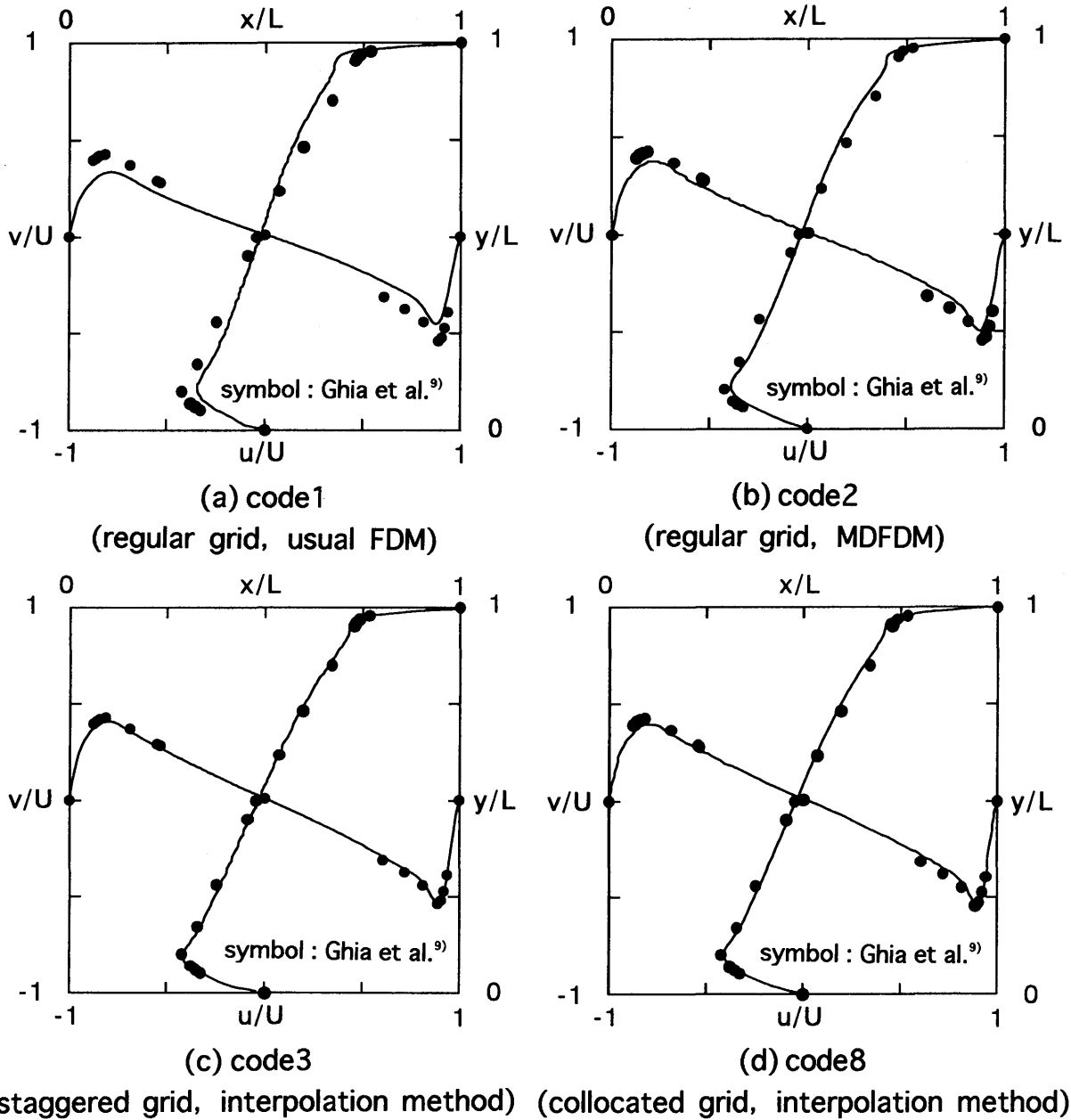


Fig. 7 Comparison of velocity components (u , v) on the broken line shown in Fig. 5 ($Re=3200$).

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J} \left[(JU) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (JV) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_{i,j} \approx \frac{1}{J} \left[(\overline{JU}) \delta_{\xi} u^e + (\overline{JV}) \delta_{\eta} u^e \right]_{i,j} \\
 & = \frac{1}{2J_{i,j}} \left(\left[(JU) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{i+1/2,j} + \left[(JU) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{i-1/2,j} \right) \\
 & + \frac{1}{2J_{i,j}} \left(\left[(JV) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_{i,j+1/2} + \left[(JV) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_{i,j-1/2} \right) \\
 & = \frac{1}{2J_{i,j}} \left([JU]_{i,j} \times \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta \xi} + [JU]_{i-1,j} \times \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta \xi} \right) \\
 & + \frac{1}{2J_{i,j}} \left([JV]_{i,j} \times \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta \eta} + [JV]_{i,j-1} \times \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \eta} \right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

この方法の特徴はデカルト座標系のスタガード格子

を用いた場合と同様、(14)式を直接的に満足するセル表面に定義された JU , JV を時間積分するところにある。なお、セル中心における圧力 p の定義点で以下に示す(14)式の離散式が成立していれば対流項の型、すなわち、勾配型（非保存型）と発散型（保存型）は数値精度の範囲内で一致する。

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{J} \{ \delta_{\xi} (JU) + \delta_{\eta} (JV) \} \right]_{i,j} &= \frac{1}{J_{i,j}} \left[\frac{(JU)_{i,j} - (JU)_{i-1,j}}{\Delta \xi} \right. \\
 & \left. + \frac{(JV)_{i,j} - (JV)_{i,j-1}}{\Delta \eta} \right] = 0 \quad (17)
 \end{aligned}$$

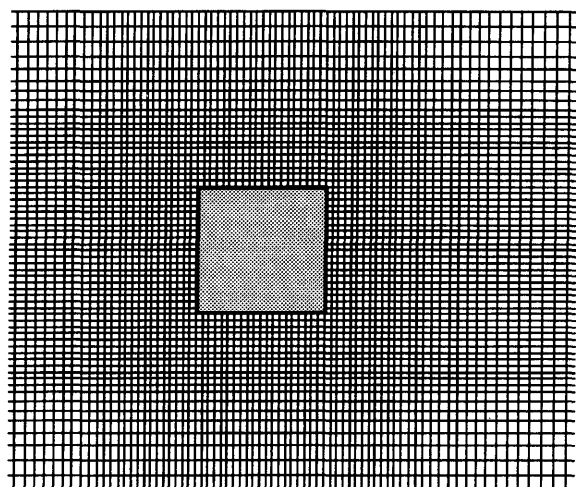


Fig. 8 Computational grid near the rectangular cylinder. Note that this grid was used in all computations.

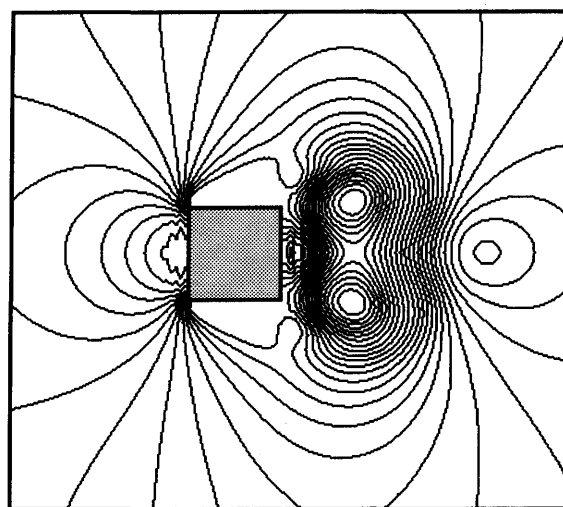
3.4 実際の計算例

本報では上記の方法に基づき、幾つかの計算コードを開発した。Table 1 に計算コードの特徴、すなわち、計算のアルゴリズムや差分スキームなどを示す。以下ではこれらの計算コードを用いた計算例を示し、上記の方法の性質や有効性などを詳細に検討する。

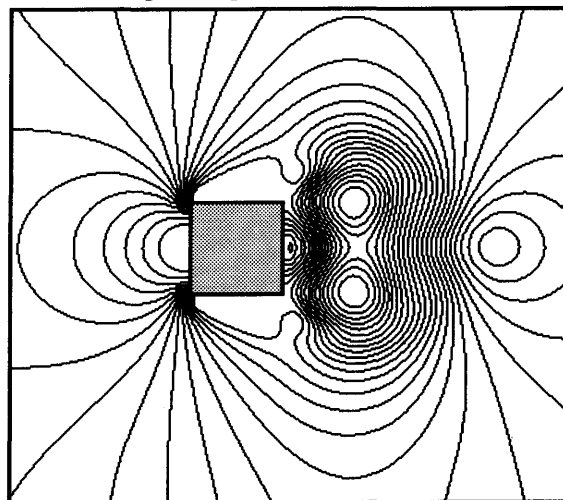
3.4.1 2次元計算例

内部流れのベンチマーク問題として良く知られた正方キャビティー内流れ (Fig. 5 を参照) を考える。本報では (a) 計算コード 1、(b) 計算コード 2、(c) 計算コード 3、(d) 計算コード 8 を適用し、Ghia ら⁹⁾ の計算結果と比較した。格子点数は Ghia ら⁹⁾ の計算と同様に x 軸、 y 軸方向に 129×129 点の等間隔とし、Reynolds 数は $Re(=UL/\nu)=3200$ とした。Fig. 6 に流線図の比較を示す。(a)-(d) とともに主渦や 2 次渦が明確に再現されており、その大きさや中心位置などに顕著な違いは見られない。Fig. 7 に Fig. 5 の点線上の速度成分 u , v と Ghia ら⁹⁾ の計算結果との比較を示す。(a)-(d) で計算結果に若干の差異が見られる。すなわち、(a) では Ghia ら⁹⁾ の計算結果との不一致が全体的に目立つ。これに対し、同じ条件で多方向差分法 (MDFDM) を施した (b) では (a) と比べて Ghia ら⁹⁾ の計算結果との対応が向上している。一方、(c), (d) では (a), (b) と比べて Ghia ら⁹⁾ の計算結果とより良い一致を示している。なお、(a)-(d) とともに計算結果に非物理的な数値振動は一切見られなかった。

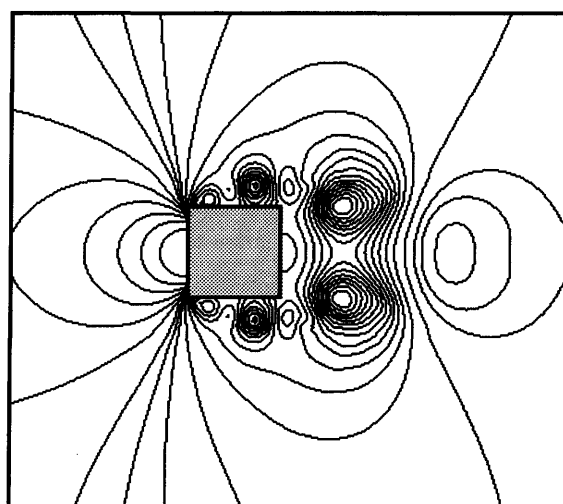
実際の計算では物体適合座標系 (BFC) やデカルト座標系の不等間隔格子を用いる場合が多い。そこで本



(a) code4
(regular grid, usual FDM)



(b) code6
(regular grid, MDFDM)



(c) code7
(staggered grid, interpolation method)

Fig. 9 Comparison of contourlines of pressure ($Re=1000$, $t=6$).

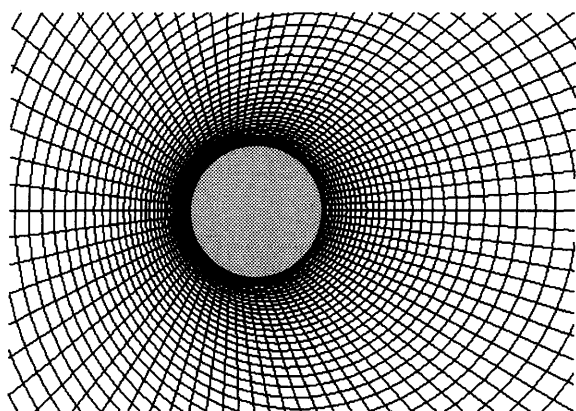
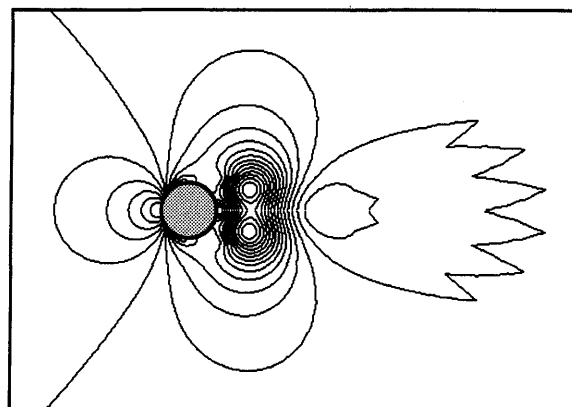


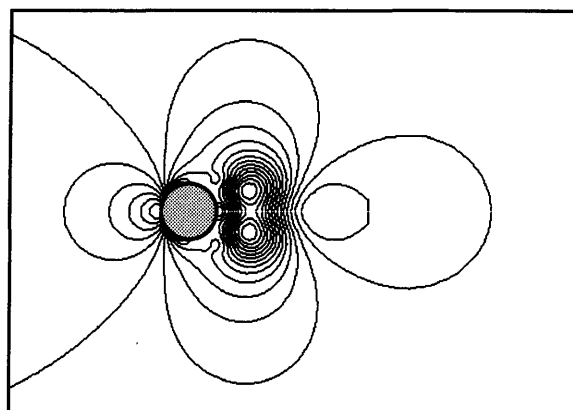
Fig. 10 Computational grid near the circular cylinder. Note that this grid was used in all computations.

報では上記の方法を物体適合座標系 (BFC) や不等間隔格子に拡張した計算を行い、その有効性などを検討した。計算対象は外部流れ (剝離を伴う渦流れ) として最も基本的な1) デカルト座標系の不等間隔格子を用いた2次元正方形角柱を過ぎる流れ、2) 物体適合座標系 (BFC) のO型格子を用いた2次元円柱を過ぎる流れとした。

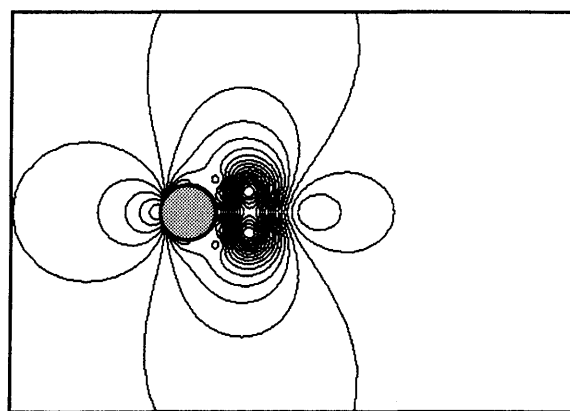
1) の計算について説明する。本報では(a)計算コード4、(b)計算コード6、(c)計算コード7を適用した。格子点数は主流方向、横断方向に 121×81 点の不等間隔とし、計算初期に注目した。角柱の横断方向長さで定義した Reynolds 数は $Re=1000$ である。Fig. 8 に角柱近傍の計算格子を示す (注: 全ての計算コードでこの計算格子を用いた)。角柱形状は2節で述べたように角柱内に含まれる格子点上に流速ゼロの条件を課すことで表現した。Fig. 9 に等圧力線図の比較を示す。(a)では角柱のすぐ上流と下流に非物理的な数値振動が若干見られる (注: この数値振動は格子幅に対応している)。一方、(b)、(c)ではそのような数値振動は全く発生していない。特に(c)では対流項に風上化 (上流化) を施すことなく、すなわち、対流項に数値粘性項を付加することなく数値振動が抑制されている。ここで角柱の側方付近の流れの挙動に注目する。(a)、(b)では角柱の上流角部から剝離したせん断層が形成する細かな渦の挙動が全く再現されていない (注: 格子分解能を上げた計算では(a)、(b)ともに細かな渦の挙動は再現された)。一方、(c)では比較的粗い計算格子を用いたにも関わらず、(a)、(b)と比べて細かな渦の挙動が再現されている。これは(c)の計算格子上の変数配置がスタッガード配置であること、スタッガード格子に適した中心差分を対流項に施していることに



(a) code5
(regular grid, usual FDM)



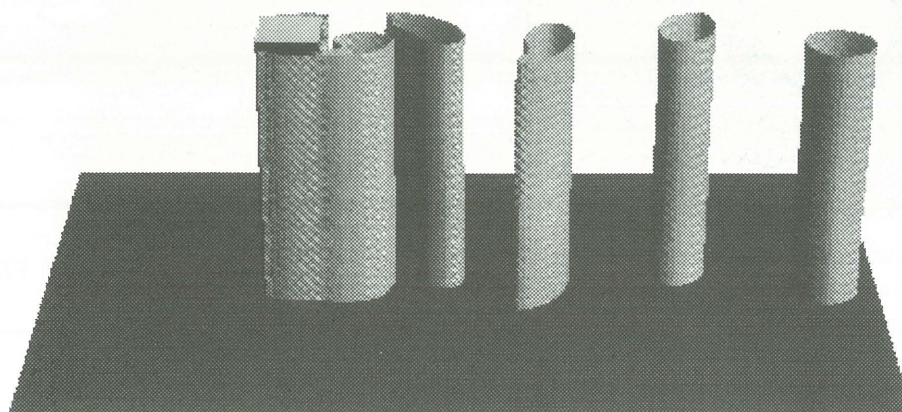
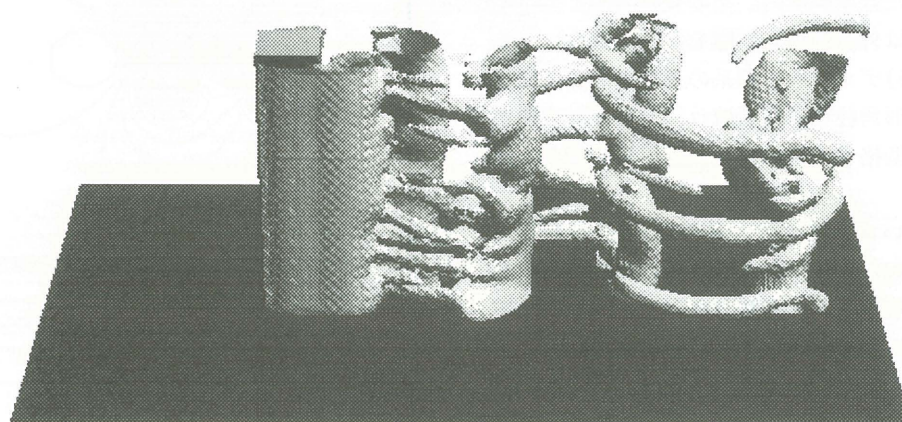
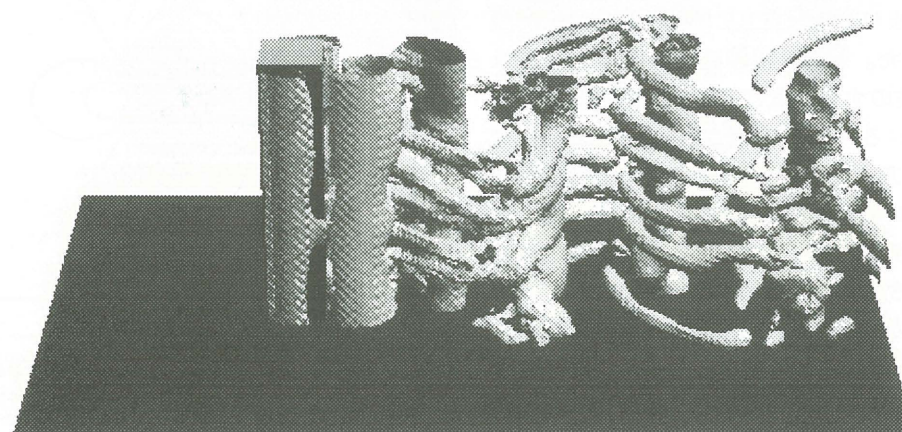
(b) code6
(regular grid, MDFDM)



(c) code8
(collocated grid, interpolation method)

Fig. 11 Comparison of contourlines of pressure ($Re=1000$, $t=6$).

よると考えられる。非圧縮性流体解析における計算時間の90%以上は圧力に関する Poisson 方程式の解法に費やされる。そこで(a)-(c)の圧力に関する Poisson

(a) $Re=200$ (b) $Re=250$ (c) $Re=300$ **Fig. 12** Contour-surface of laplacian of pressure.

方程式の解法に関して、本報で用いた SOR 法の反復回数や収束状況などを調べた。その結果、流れ場の性状には先に述べたように若干の違いが見られたが、SOR 法の反復回数や収束状況などは (a)-(c) に殆ど違いは見られなかった。速度場の解法などを含めた全体の計算時間比は (a) : (b) : (c) = 1 : 1.6 : 3.8 であった。

次に2)の計算について説明する。本報では(a)計算コード5、(b)計算コード6、(c)計算コード8を適用した。格子点数は周方向、半径方向に 81×61 点とし、計算初期に注目した。円柱の直径で定義した Reynolds 数は $Re=1000$ である。Fig. 10 に円柱近傍の計算格子を示す(注:全ての計算コードでこの計算格子を用いた)。Fig. 11 に等圧力線図の比較を示す。(a)-(c)ともに円柱背後の双子渦の大きさやその中心位置などに顕著な違いは見られない。しかしながら、(a)では円柱下流に非物理的な数値振動が見られる(注:この数値振動は格子幅に対応している)。一方、(b)、(c)ではそのような数値振動は全く発生していない。特に(c)では対流項に風上化(上流化)を施すことなく、すなわち、対流項に数値粘性項を付加することなく数値振動が抑制されている。この場合も計算の進行状況(圧力に関する Poisson 方程式の解法に用いた SOR 法の反復回数や収束状況など)は(a)-(c)に殆ど違いはなく、速度場の解法などを含めた全体の計算時間比は(a) : (b) : (c) = 1 : 1.6 : 0.9 であった。

3.4.2 3次元計算例

2次元計算において良好な計算結果を与えた計算コード4、計算コード8を3次元に拡張し、その有効性を検証した。本報ではそれらを計算コード9、計算コード10とし、前者を1)3次元正方形角柱を過ぎる流れに、後者を2)有限流路内の3次元丘陵地形を過ぎる安定成層流に適用した。本報では紙面の都合上、1)の計算結果のみを示す(同様の方法を用いた角柱周りの計算は文献¹⁰⁾が報告されている)。

格子点数は主流方向、横断方向、スパン方向に $151 \times 91 \times 51$ 点の等間隔とした。角柱の横断方向長さで定義した Reynolds 数は $Re=200, 250, 300$ である。角柱のスパン方向長さは横断方向長さの5倍とし、スパン方向には周期境界条件を課した。Fig. 12 に圧力のラプラシアン等の等値面図を示す。(a)では角柱後流に規則正しいカルマン渦列が明確に見られる。一方、(b)、(c)ではカルマン渦列に3次元性が見られ、かつカルマン渦列に巻込むように縦渦が出現している。特に(c)では(b)と比べて多数の縦渦が出現している。このように対流項補間法を用いた計算コード9によって角柱後

流の渦構造の Reynolds 数による変化、すなわち、カルマン渦列の3次元性や縦渦の出現を再現することが出来た。なお、空間項を全て2次精度中心差分で近似したにも関わらず、計算結果に非物理的な数値振動は一切見られなかった。

4. 流出境界条件(OBC)の検討

計算流体力学(CFD)において、流入・流出を伴う流れ場をシミュレーションする場合は計算領域のある場所で切断し、そこでの境界条件を与える必要がある。しかしながら、多くの場合は境界条件として厳密解を与えることは不可能であり、何らかの形で人工的に境界条件を与えなければならない。よって、境界条件の設定は流れ場に与える影響や計算の安定性の観点から重要な要素になる。その中でも流出境界条件(OBC)は重要であり、かつ興味深い問題である。流出境界付近で最も自然な流れを求めることが計算流体力学(CFD)の課題である。これまで差分法(FDM)の流出境界条件(OBC)は流れ方向の物理量の変化量(1階微分あるいは2階微分)をゼロとする自由流出条件(以下“Neumann 条件”と呼ぶ)が主流であった。この方法を採用している計算では上流側に関する議論が殆どであり、流出境界付近における数値解の振る舞いや上流側への影響についてはあまり議論されてこなかった。しかし、計算領域が十分に長く取れない場合には流出境界条件(OBC)の影響は無視できない。最近、速度場に対する流出境界条件(OBC)としてゾンマーフェルト放射条件⁴⁾(以下“SRC”と呼ぶ)が注目を集めている。そこで本報ではまず Neumann 条件と SRC の定式化を示す。次にこの両者を2次元正方形角柱を過ぎる流れに適用し、計算結果を詳細に比較・検討する。

4.1 Neumann 条件と SRC の定式化

Neumann 条件は流出境界における物理量の1階微分あるいは2階微分をゼロとし、片側差分近似によって境界値を求める。1次精度では以下の形になる(但し、(19)式は1次外挿式と同一になる)。本報では(18)式を採用した。

$$f_{NX} = f_{NX-1} \quad \text{for } f = u, v \quad (18)$$

$$f_{NX} = 2f_{NX-1} - f_{NX-2} \quad \text{for } f = u, v \quad (19)$$

一方、SRC の基礎式は以下の形で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{for } f = u, v \quad (20)$$

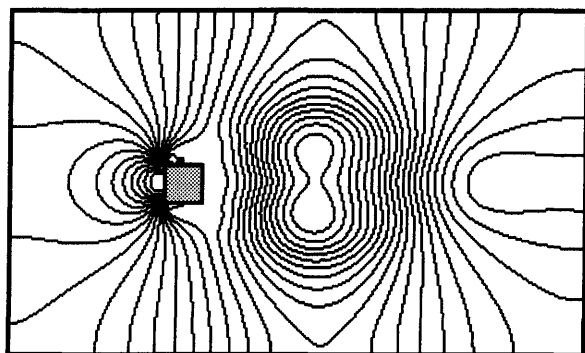
(20)式を数値的に解いて境界値を求める。本報では時間項に1次精度前進差分、空間項に2次精度後退差分を用いた。

$$f_{Nx}^{n+1} = f_{Nx}^n - \frac{C\Delta t}{2\Delta x} (3f_{Nx}^n - 4f_{Nx-1}^n + f_{Nx-2}^n) \quad \text{for } f = u, v \quad (21)$$

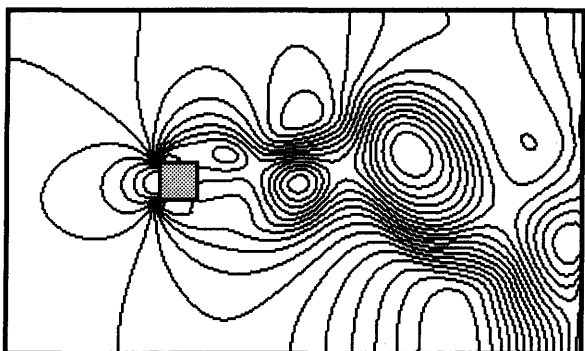
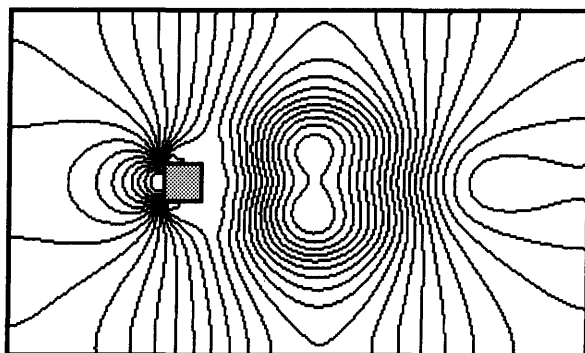
対流速度 C の取扱いについては種々の方法¹¹⁾が提案されており、本報では以下に示す1)-4)を検討した。1)

-4)で計算結果に殆ど違いは見られなかったが、計算時間の効率は4)が最も優れていた。以下に示す計算結果は全て4)を用いたものである。

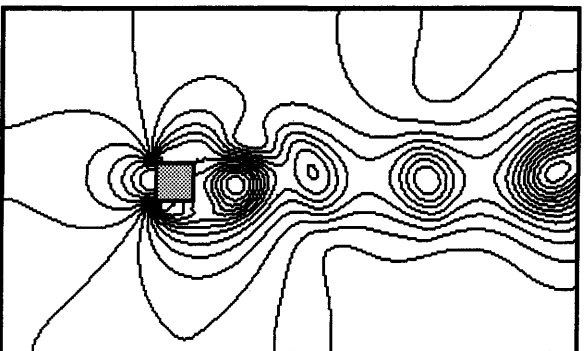
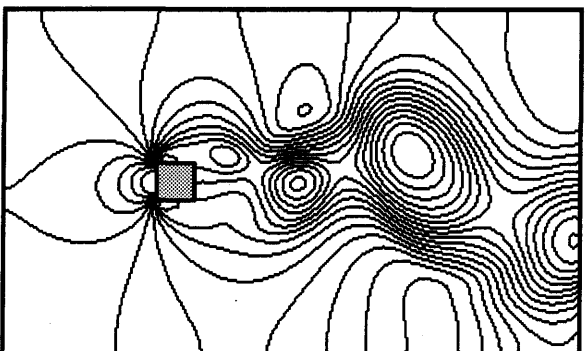
- 1) 対流速度 C に流出境界の速度成分 u を用いる方法
- 2) 対流速度 C に流出境界の速度成分 u の算術平均を用いる方法
- 3) 対流速度 C に流出境界の速度成分 u の最大値、



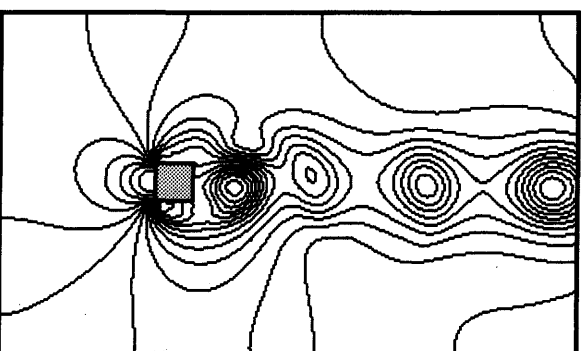
(a)t=10



(b)t=17.6



(c)t=30



Neumann condition

SRC

Fig. 13 Comparison of time evolution of contourlines of pressure (Re=1000).

最小値の算術平均を用いる方法

4) 対流速度 C に一樣流速 $U=1$ を用いる方法

4.2 Neumann 条件、SRC を用いた 2 次元正方形角柱を過ぎる流れ

流出境界を通過する渦の挙動に及ぼす Neumann 条件、SRC の影響を調べるために、計算コード 2 を用いて 2 次元正方形角柱を過ぎる流れを計算した。格子点数は主流方向、横断方向に 151×91 点の等間隔とし、角柱の横断方向長さで定義した Reynolds 数は $Re=1000$ とした。Fig. 13 に等圧力線図の時間発展の比較を示す。但し、両者の計算結果ともに流出境界において平均流量を保存する操作を施した。Neumann 条件、SRC を用いた計算結果の両者ともに (a) の角柱背後に双子渦が生じ、それが成長していく過程では計算結果

に違いは見られない。しかし、(b) の双子渦に不安定が生じ、大きな渦に融合して角柱から放出されて流出境界を通過する際には両者の計算結果に顕著な違いが見られる。すなわち、Neumann 条件を用いた計算結果では流出境界付近の渦に非物理的な歪が見られる。一方、SRC を用いた計算結果では流出境界付近の渦はスムーズに流出境界を通過している。(c) のカルマン渦列型の周期的な流れにおいても (b) と同様な傾向が見られる。Fig. 14 に Fig. 13 に対応した角柱の中心線上における圧力分布の比較を示す。先に述べたように (a) では両者の計算結果に違いは見られない。しかし、(b)、(c) では両者の計算結果に顕著な違いが見られる。特に Neumann 条件を用いた計算結果では流出境界付近の影響が上流側にまで及んでいる。Fig. 15 に圧力に関する Poisson 方程式の解法に関して、本報で用いた SOR 法の反復回数の比較を示す。(a) では角柱背後の双子渦が大きな渦に融合し、これが角柱から放出されて流出境界を通過する時間 ($t > 15$) から SOR 法の反復回数にばらつきが見られる。これは先に述べたように流出境界付近の非物理的な渦 (流れ) の挙動を反映している。一方、(b) では全時間にわたって計算は安定に進んでいる。Fig. 16 に SRC を用いた計算結果に関して、流れ方向に 2 倍の計算領域を有する長領域の計算結果との比較を示す。長領域の点線付近と短領域の流出境界付近における渦の挙動は非常に良く一致して

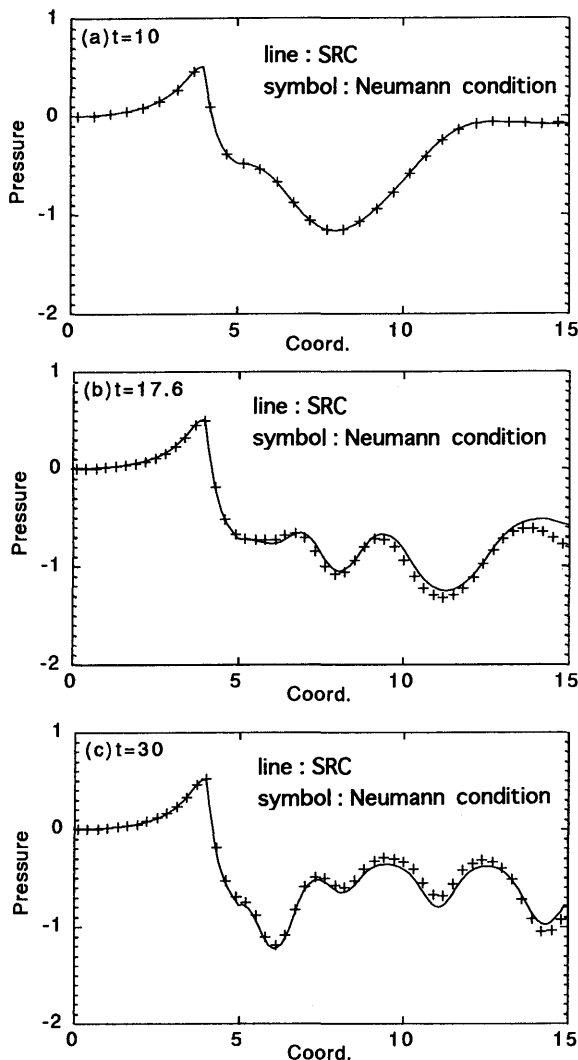


Fig. 14 Comparison of distributions of pressure on the center line corresponding to Fig. 13 ($Re=1000$).

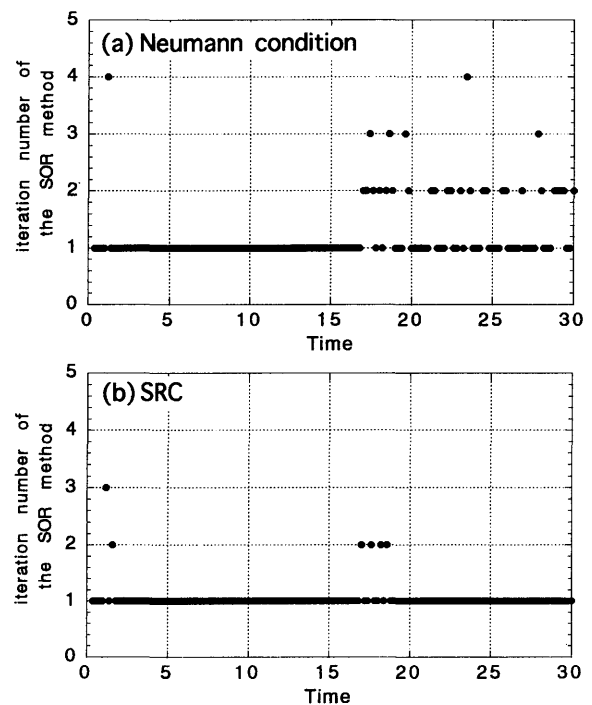


Fig. 15 Comparison of iteration number of SOR method ($Re=1000$).

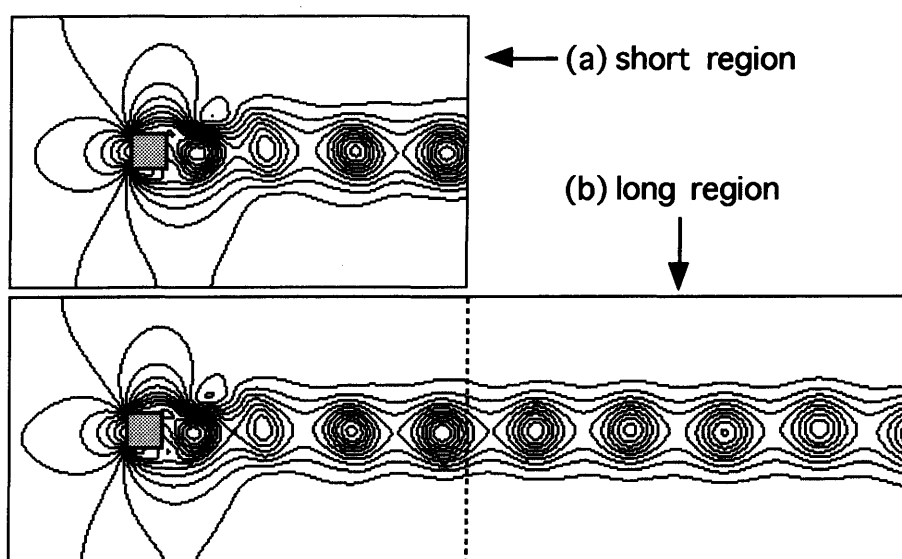


Fig. 16 Comparison of contourlines of pressure (SRC, $Re=1000$, $t=100$).

Table 2 Comparison of CPU ratio ($Re=1000$).

Combination of OBC		CPU ratio
(a)	velocity : eq.(18) + pressure : eq.(18)	1.1
(b)	velocity : eq.(18) + pressure : eq.(19)	1.7
(c)	velocity : eq.(20) + pressure : eq.(18)	1
(d)	velocity : eq.(20) + pressure : eq.(19)	1.4

いる。圧力場の流出境界条件 (OBC) に関しても (18) 式、(19) 式の Neumann 条件を検討した。Table 2 に計算時間比の比較を示す。この図から圧力の Neumann 条件に (19) 式を用いた (b), (d) は (18) 式を用いた (a), (c) よりも計算時間を要することが分かる。また、(b), (d) に関して、圧力に関する Poisson 方程式の解法に用いた SOR 法の反復回数や収束状況は、角柱から放出された渦が流出境界を通過する際に (a), (c) よりもかなり悪化することが分かった。よって、(19) 式は圧力の Neumann 条件としては不適切であると考えられる。

5. 結 言

本報では 1) デカルト座標系における物体の表現方法、2) 差分形式、3) 流出境界条件 (OBC) の問題を取り挙げ、差分法 (FDM) における幾つかの知見として整理した。主な結果はそれぞれ以下にまとめられる。

1) デカルト座標系における物体の表現方法に関して、

物体内部に含まれる格子点上に流速ゼロの条件を課すのみで、流体領域と物体領域とを区別することなく計算する方法を試みた。その結果、十分な格子分解能を有する本報の計算結果では物体からの流れの剝離や渦構造が明確に捉えられ、その有効性が確認された。

2) 差分形式に関して、(a) デカルト座標系、物体適合座標系 (BFC) のレギュラー格子における多方向差分法 (MDFDM)、(b) デカルト座標系のスタッガード格子における対流項補間法、(c) 物体適合座標系 (BFC) のコロケート格子における対流項補間法の定式化を示し、実際の計算に適用した。その結果、レギュラー格子を用いた通常差分の計算結果と比較して (a)-(c) の有効性が確認された。特に (b), (c) では計算対象、格子分解能、Reynolds 数などに依存するが、対流項に風上化 (上流化) を施すことなく、すなわち、対流項に数値粘性項を付加することなく数値振動の抑制が可能であることが分かった。

3) 流出境界条件(OBC)に関して、Neumann 条件と SRC の定式化を示し、実際の計算に適用した。その結果、SRC は非常に有効であることが確認された。特に対流速度に一樣流速 $U=1$ を用いる方法は計算時間に関して最も効率的であり、座標系、計算格子上的変数配置、計算の次元を問わず有効であることが確認された。

以上から、限られた計算機環境の中でより信頼性の高い数値解を得るには何に注目して数値シミュレーションを行なうか(例えば、流れの構造やメカニズムの解明、あるいは乱流統計量などの乱流性状の予測など)を十分に検討し、計算対象に適した計算格子、計算格子上的変数配置、差分形式などを選択することが重要である。

参 考 文 献

- 1) 橋口真宜ら：多方向風上差分法による高レイノルズ数流れの数値計算、第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集 567-570 (1992)。
- 2) 梶島岳夫：対流項の差分形式とその保存性、日本機学会論文集 (B 編) 60巻574号 2058-2063 (1994)。
- 3) 梶島岳夫：コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析、日本機学会論文集 (B 編) 63巻 614号 3247-3254 (1997)。
- 4) 吉田尚史ら：角柱流れの流出境界条件に関する数値的研究、日本機学会論文集 (B 編) 59巻 565号 2799-2806 (1993)。
- 5) 橋口真宜ら：複雑形状をすぎる流れの数値計算、第9回数値流体力学シンポジウム講演論文集 447-448 (1995)。
- 6) 内田孝紀ら：DNS による複雑地形を過ぎる安定成層流の風況予測—矩形格子系と一般曲線格子系との比較—、九大応力研所報 第82号 113-126 (1997)。
- 7) 石田義洋ら：数値解析法の定式化と LES によるチャンネル流解析 一般曲線座標系・スタガードグリッドによる気流数値解析法 その1、日本建築学会計画系論文集 第496号 45-52 (1997)。
- 8) Zang et al.: A Non-staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, J. Comput. Phys. 114 18-33 (1994)。
- 9) Ghia et al.: High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, J. Comput. Phys. 48 387-411 (1982)。
- 10) 野津剛ら：高精度・保存的流体計算法の耐風問題への適用性について その1 補間法に関する数値誤差の評価と低 Re 数角柱まわりの流れによる精度検証、日本建築学会構造系論文集 第494号 43-49 (1997)。
- 11) 吉田尚史ら：非定常非圧縮流れの流出境界条件に関する数値的研究、日本機学会論文集 (B 編) 61巻 588号 2887-2895 (1995)。