

超大型浮体構造物の波浪中弾性応答

柏木, 正
九州大学応用力学研究所 : 助教授

<https://doi.org/10.15017/4744027>

出版情報 : 應用力学研究所所報. 82, pp.31-52, 1997-11. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



超大型浮体構造物の波浪中弾性応答

柏 木 正*

概 要

浮体式海上空港を想定した超大型弾性平板に働く流体力ならびに波浪中弾性応答の計算法とその妥当性の検証について述べている。超大型浮体の場合、相対的に非常に短い波長の波に対しても高精度の計算が要求されるので、未知関数である弾性平板上の圧力分布を 3 次 B スプライン関数の重ね合わせで表し、その係数を決定するためにガラーキン法を適用している。平板上の分割パネル数を増やしていった時の解の収束、エネルギー保存則のチェックなどによって流体力の計算が高精度に行われていることを示している。また弾性応答の計算の妥当性は、水槽試験結果と比較することで確かめられており、さらに実験が困難な非常に短い波長の波に対する計算を行うことによって、超大型浮体の波浪中弾性応答の特徴について考察している。

Key words: Very large floating structure, Hydroelastic responses, B-spline function, Galerkin method

1. 緒 言

浮体式の超大型海洋構造物が、新しい空港、各種の工場・貯蔵施設、あるいは居住空間などの目的で考えられている。最近では特に、九州新国際空港などの浮体式海上空港が現実の計画として脚光を浴びている。しかしながら、このような超大型の浮体式構造物を実現させるためには、その安全性を正しく評価するための信頼性の高い計算法を確立しておくことが不可欠である。現在構想されている海上空港は、長さ 5,000 m、幅 1,000 m 程度の平面寸法に対し、喫水は数 m 程度と非常に浅いのが特徴である。従って、このような超大型浮体の波浪中での挙動を計算する際には次のような問題点がある。

(1) 考慮すべき波の波長 (λ) は構造物の長さ (L) に比べて非常に短い。例えば $\lambda=50\sim 100\text{m}$ の現実的な波を考えるならば、 $L=5,000\text{m}$ の浮体に対しての長さの比は、 $\lambda/L=1/50\sim 1/100$ となる。このような短波長域での計算を従来の計算法で行うことは殆ど不可能である。

(2) 浮体の平面寸法に比べて喫水が非常に浅いので剛性が小さい。従って波浪中での浮体の挙動は、剛体としてよりも弾性体としての挙動が卓越する。すなわち、流体力学と弾性振動の連成を考慮しな

*九州大学助教授，応用力学研究所

ればならない。

超大型浮体構造物は、喫水が相対的に非常に浅いことから、流体力学的には自由表面上の圧力分布によって表すことができる。この圧力分布は、境界条件が満足されるように積分方程式を解くことによって求められるが、この解法は圧力分布法として知られている。最近、前田・増田ら¹⁾、矢後²⁾、高木ら³⁾によって、圧力分布法を超大型浮体に適用した結果が示されている。しかしながらそれらの結果は、超大型浮体に対する計算として必須の短波長域で精度が悪いようである。これは圧力分布に関する積分方程式を解く方法として、浮体をいくつかのパネルに分割した際、各パネル内で圧力を一定と仮定する、いわゆるゼロ次要素を用いているためと思われる。もちろん分割数を多くしていけば、短波長の波に対しても原理的には計算できるはずであるが、十分な精度を保つためには極めて多くの未知数を必要とし、記憶容量、計算時間の点で実用的計算法とは到底言えない。

そこで本研究では、より少ない未知数で精度良い解を得るために、圧力分布を双方向3次Bスプライン関数で表す。この時、圧力分布に関する積分方程式はスプライン関数の係数に関する連立方程式に変換されるが、その際に、同じ3次のBスプライン関数を重み関数とするガラーキン法を適用している。これによって計算精度を格段に向上させることができるが、反対に計算時間の増加が懸念される。しかし本研究では、浮体と同じ大きさのパネルで分割することによって、積分方程式の核関数に現れる積分点と境界条件を満足させる点との相対距離の関数に対しては「計算の相似性」を使うことができ、計算量を大幅に減らすことができることを示している。

浮体の弾性応答の計算には、いわゆるモード展開法を用いている。すなわち、弾性変位をいくつかの規格化されたモード関数の重ね合わせで表し、各モード関数の振幅は平板の弾性振動方程式を周辺自由の境界条件式を満たすように解くことによって決定している。

計算結果の精度を確認するために、造波減衰力のなす仕事と外方へ伝播する波のエネルギーとの間に成り立つエネルギー保存則、ならびに波浪強制力と浮体の強制動揺によって発生する進行波との間に成り立つHaskindの関係を調べている。これらは計算した全ての波長に対して非常に良い精度で満足されている。またこのような積分値によるチェックだけでなく、平板上の分割パネル数を増やしていった時の数値解の収束状況についても調べている。弾性応答の計算結果の妥当性に関しては、 $\lambda/L > 1/10$ の比較的長い波長に対する矢後らの実験結果⁴⁾と比較し、両者が非常に良く一致していることを確認している。さらに短い波長の波に対しては水槽試験が難しいと思われるので、本論文での計算結果に基づいて波浪中弾性応答の特徴について論じている。

2. 定式化と積分方程式

Fig. 1に示すように、超大型浮体の平面形状は長さ L 、幅 B の矩形とする。この平面寸法に比べて喫水は非常に浅いので、浮体による攪乱は、自由表面上の圧力分布によって表すことができる。水深は $z=h$ で一定とする。

流体は非粘性、非回転流れであると仮定し、速度ポテンシャルを導入する。また入射波の振幅、浮体の動揺変位などは全て小さいとし、線形理論で考える。現象は入射波の周波数 ω で調和振動するとし、

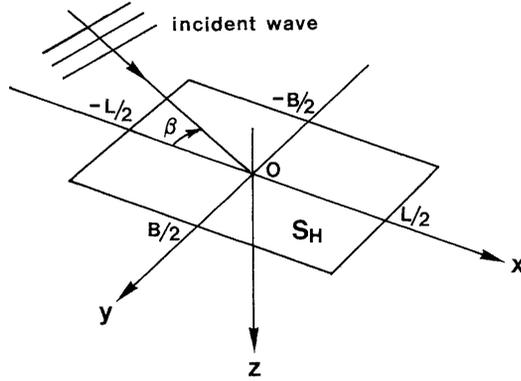


Fig. 1 Coordinate system and notations

時間項 $e^{i\omega t}$ を仮定した上で、空間座標 (x, y, z) に依存する項だけを取り扱う。この時、速度ポテンシャル ϕ 、圧力 p 、浮体の上下変位 w を次のように表す。

$$\phi = i\omega a \{ \phi_I(x, y, z) + \phi_S(x, y, z) \} + \sum_{j=1}^{\infty} i\omega X_j \phi_j(x, y, z) \quad (1)$$

$$p = \rho g a \left[p_I(x, y) + p_S(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{X_j}{a} \right) p_j(x, y) \right] \quad (2)$$

$$w = a \left[\zeta_I(x, y) + \zeta_S(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{X_j}{a} \right) \zeta_j(x, y) \right] \quad (3)$$

ここで a は入射波振幅、 ρ は流体密度、 g は重力加速度である。添字の I は入射波に関連した物理量、 S は入射波の散乱による成分、 j は複素振幅 X_j の j モードの動揺による成分を表す。モードの定義には、剛体としての運動だけでなく、弾性変位も含まれている。

以下の解析では、長さの次元は全て $L/2$ で無次元化されているとする。従って浮体の存在する範囲は $|x| \leq 1, |y| \leq B/L \equiv b$ である。

線形理論では、自由表面上での力学的および運動学的境界条件式は次のように表される。

$$p_j = K\phi_j + \zeta_j, \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial z} = \zeta_j \quad \text{on } z=0 \quad (4)$$

ここで $K = \omega^2/g$ であり、浮体の外側では $p_j = 0$ である。(4)式から ζ_j を消去すると次式を得る。

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} + K\phi_j = p_j \quad \text{on } z=0 \quad (j=S, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

(5)式ならびに無限遠での波の放射条件を満たす速度ポテンシャルが次式で与えられることが知られている。

$$\phi_j(x, y, z) = \iint_{S_H} p_j(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta \quad (6)$$

ここで S_H は浮体が存在する自由表面上の領域を表す。また $G(x, y, z)$ は(5)式の右辺を0とした同次の自由表面条件、無限遠での波の放射条件を満足するグリーン関数であり、有限水深の場合には次式で与

えられる。

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\cos k_n(z-h)}{\cos k_n h} K_0(k_n \sqrt{x^2+y^2}) + \frac{i}{2} C_0 \frac{\cosh k_0(z-h)}{\cosh k_0 h} H_0^{(2)}(k_0 \sqrt{x^2+y^2}) \quad (7)$$

ここで

$$C_0 = \frac{k_0^2}{K+h(k_0^2-K^2)}, C_n = \frac{k_n^2}{K-h(k_n^2+K^2)} \left. \vphantom{C_0} \right\} \quad (8)$$

$$k_0 \tanh k_0 h = K, k_n \tan k_n h = -K$$

であり、(7)式中の K_0 , $H_0^{(2)}$ はそれぞれ第 2 種の変形ベッセル関数、ハンケル関数を表す。

(6)式を(4)式の力学的境界条件に代入すると、未知関数である浮体底面上の圧力分布に関する積分方程式として次式が得られる。

$$p_j(x, y) - K \iint_{S_H} p_j(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta = \zeta_j(x, y) \quad (9)$$

ここで右辺は j モードにおける浮体の上下変位であり、以下のように与えられる。

まず散乱問題 ($j=S$) では $\zeta_I + \zeta_S = 0$ であるから

$$\zeta_S(x, y) = -\zeta_I(x, y) = -\exp\{-ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)\} \quad (10)$$

一方、動揺問題 ($j=1, 2, \dots$) では剛体運動だけでなく、弾性体としての運動も取り扱うために、次式のようなモード関数の合成として表す。

$$\sum_{j=1}^{\infty} X_j \zeta_j(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mn} u_m(x) v_n(y) \quad (11)$$

ここで、 x , y 軸方向のモード関数 $u_m(x)$, $v_n(y)$ として、自由端での条件を満たす一様梁の曲げ振動における固有モードを考えており、 $u_m(x)$ について具体的に表すと⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{2} \\ u_{2m}(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \chi_{2m} x}{\cos \chi_{2m}} + \frac{\cosh \chi_{2m} x}{\cosh \chi_{2m}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} x \\ u_{2m+1}(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \chi_{2m+1} x}{\sin \chi_{2m+1}} + \frac{\sinh \chi_{2m+1} x}{\sinh \chi_{2m+1}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで $u_0(x)$, $u_1(x)$ はそれぞれ剛体運動としての heave, pitch に対応しており、それ以外は弾性体としての変位を表している。固有値 χ_m は次式を満たす正の根で与えられる。

$$(-1)^m \tan \chi_m + \tanh \chi_m = 0 \quad (14)$$

y 軸方向のモード形 $v_n(y)$ は(12), (13)式において x の代わりに y/b を代入した式で与えられ、これらは次のような性質を有する直交関数系をなしている。

$$\int_{-1}^1 u_m(x) u_k(x) dx = \frac{1}{2} \delta_{mk}, \int_{-b}^b v_n(y) v_e(y) dy = \frac{b}{2} \delta_{ne} \quad (15)$$

ここで δ_{mk} , δ_{nl} はクロネッカーのデルタ記号を表す。

結局、動揺問題においては、(1)式によって $\zeta_j(x, y) = u_m(x)v_n(y)$ と与えることになるが、 m , n の組み合わせによって、以下の4つのタイプに分類できる。

- 1) $\zeta_j(x, y) = u_{2m+1}(x)v_{2n}(y)$; x についてのみ奇関数であり、 $F(X)$ タイプと呼ぶ。
- 2) $\zeta_j(x, y) = u_{2m}(x)v_{2n+1}(y)$; y についてのみ奇関数であり、 $F(Y)$ タイプと呼ぶ。
- 3) $\zeta_j(x, y) = u_{2m}(x)v_{2n}(y)$; x, y について偶関数であり、 $F(Z)$ タイプと呼ぶ。
- 4) $\zeta_j(x, y) = u_{2m+1}(x)v_{2n+1}(y)$; x, y について奇関数であり、 $F(N)$ タイプと呼ぶ。

散乱問題における(10)式も、上と同じ4つのタイプに分離することができる。また圧力分布は、上下変位と同じ対称性を持つことを考慮すれば、(9)式の積分方程式における未知数は、浮体の1/4部分 ($x > 0$, $y > 0$) だけにすることができる。

3. 流体力の計算

(9)式の解法は後述するとして、浮体底面での圧力分布が求まったとすると、それを積分することで流体力が計算できる。動揺問題では、弾性変位も含めた j モードの動揺によって i 方向に働く流体力を次のように表す。

$$\frac{F_i}{\rho g a (L/2)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} [K(A'_{ij} - iB'_{ij}) - C'_{ij}] \left(\frac{X_j}{a} \right) \quad (16)$$

ここで

$$\frac{A'_{ij} - iB'_{ij}/\omega}{\rho (L/2)^3} \equiv A'_{ij} - iB'_{ij} = -\frac{1}{K} \iint_{S_H} (p_j - \zeta_j) \zeta_i dx dy \quad (17)$$

$$\frac{C'_{ij}}{\rho g (L/2)^2} \equiv C'_{ij} = \iint_{S_H} \zeta_j \zeta_i dx dy = \frac{b}{4} \delta_{ij} \quad (18)$$

A'_{ij} , B'_{ij} はそれぞれ付加質量、減衰力係数を表し、 C'_{ij} は復原力係数である。(18)式は(15)式の直交性によって与えられた。

次に散乱問題における波浪強制力について考える。 $z=0$ 上では $p_i=0$ であるから、 i 方向に働く波浪強制力は次のように計算できる。

$$\frac{E_i}{\rho g a (L/2)^2} \equiv E'_i = - \iint_{S_H} p_s \zeta_i dx dy \quad (19)$$

数値計算結果がどの程度正しいかを調べるには、積分方程式を解く際の分割パネル数を増やした時に、上記の流体力が収束しているかどうかを調べるのが最も信頼のおける方法であろう。より簡単に精度の目安を得る方法として、理論上成り立つべき流体力学的な関係式を数値的に調べることを考える。

まず相反定理を適用すると、動揺問題と散乱問題の間に成り立つ Haskind の関係が得られ、次のように表すことができる。

$$E'_j = H_j(k_0, \beta + \pi) \quad (20)$$

ここで

$$H_j(k_0, \theta) = \iint_{S_H} p_j(\xi, \eta) e^{ik_0(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)} d\xi d\eta \quad (21)$$

は Kochin 関数である。(19)式と(20)式の結果は等しくなければならないが、この関係は剛体運動だけでなく、弾性運動に対しても成り立つことに注意すべきである。

次にエネルギー保存則を適用すると、造波減衰力は Kochin 関数から計算することもでき、その式は

$$B'_{ij} = \frac{C_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} H_i^*(k_0, \theta) H_j(k_0, \theta) d\theta \quad (22)$$

である。ここで*は複素共役を表す。

本論文では(20), (22)式を計算の精度チェックとして用いた。しかし後述のように、これらの関係式がほぼ満足されているからと言って、必ずしも収束解が得られているとは限らないことに注意すべきである。

4. 波浪中弾性応答の計算

あらかじめ与えられた各運動モードに対する圧力分布、流体力が求まったので、次に平板の振動方程式から各運動モードの振幅 X_j/a を計算することができる。平板の弾性振動の方程式は次式で与えられる。

$$-m_B \omega^2 w(x, y) + D \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} w(x, y) = -p(x, y) \quad (23)$$

ここで m_B は平板上の質量分布を表し、一様分布の場合には $m_B = M/LB$ (M は全体の質量) である。また D は板の曲げ剛性を表す。

浮体は波浪中で自由動揺をするので、浮体周辺では曲げモーメントおよび等価剪断力が0であることを表す境界条件式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2} = 0 \quad (24)$$

が満たされなければならない。 n, s は平板周辺における法線方向、接線方向を意味し、 ν はポアソン比である。また矩形板の場合には、四角に集中力が作用するので、これも0でなければならない。すなわち

$$R = 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{at } x = \pm 1, y = \pm b \quad (25)$$

さて(2), (3)式を(23)に代入し、無次元表示すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} -KM' \Lambda \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{X_j}{a} \right) \zeta_j(x, y) + D' \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{X_j}{a} \right) \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} \zeta_j(x, y) \\ = -p_s(x, y) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{X_j}{a} \right) p_j(x, y) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $M' = M/\rho LBd$, $\Lambda = 2d/L$ (d は喫水), $D' = D/\rho g(L/2)^4$ であり、 $z=0$ 上では $\zeta_l + \zeta_s = 0$, $p_l = 0$ であることを考慮している。

(26)式の両辺に重み関数として $\zeta_i(x, y) = u_k(x) v_\ell(y)$ (i と k, ℓ の関係は(1)式における i と m, n の関係と同様に与える) を掛け、浮体底面にわたって積分することにより次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{X_j}{a} \right) \left[-K(M_{ij} + A_{ij} + iB'_{ij}) + C_{ij} + D_{ij} \right] = E_i \quad (27)$$

ただし

$$M_{ij} = M' \Lambda \iint_{S_H} \zeta_i(x, y) \zeta_j(x, y) dx dy = M' \Lambda \frac{b}{4} \delta_{ij} \quad (28)$$

$$D_{ij} = D' \iint_{S_H} \zeta_i(x, y) \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} \zeta_j(x, y) dx dy \quad (29)$$

M_{ij} は質量マトリックス, D_{ij} は剛性マトリックスと呼ばれ, 物理的には平板の剛性による復原力を表している. また(27)式中の A'_i, B'_i, C'_i, E'_i はすでに(17)~(19)式で定義された流体力係数である.

(27)式を解くことによって j モードの動揺振幅が求まるが, 周辺境界条件式(24)および(25)はこれまで陽な形で考慮されていない. そこで剛性マトリックス(29)式を部分積分することにより, (24), (25)式を自然境界条件式として取り込んだ弱形式の表示式を導くことにする.

まず(29)式の積分に対してガウスの定理を2回適用すると, 浮体形状には関係なく次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij} &\equiv \iint_{S_H} \zeta_i(x, y) \nabla^4 \zeta_j(x, y) dS \\ &= \iint_{S_H} \nabla^2 \zeta_i \nabla^2 \zeta_j dS + \int_C \left\{ \zeta_i \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 \zeta_j) - \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} \nabla^2 \zeta_j \right\} ds \end{aligned} \quad (30)$$

ここで右辺第2項は, 浮体の周辺に沿った線積分を表し, ここでは(24)式が成り立つので

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 \zeta_j) &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial s^2} \right) = -(1-\nu) \frac{\partial^3 \zeta_j}{\partial n \partial s^2} \\ \nabla^2 \zeta_j &= \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial s^2} = (1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial s^2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

を代入する. さらに矩形板の場合には(25)式も満たす必要があるので, x, y それぞれについて部分積分をした後(25)式を考慮すると, 弱形式として(29)式の代わりに次式が得られる.

$$\begin{aligned} D_{ij} &= D' \iint_{S_H} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial y^2} \right\} dx dy \\ &\quad + D'(1-\nu) \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \zeta_i}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial x^2} \right]_{-b}^b dx \\ &\quad + D'(1-\nu) \int_{-b}^b \left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \zeta_i}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial y^2} \right]_{-1}^1 dy \end{aligned} \quad (32)$$

各運動モードの関数形 $\zeta_i(x, y)$ および重み関数 $\zeta_j(x, y)$ は(11)式のように与えられているので, 上式の積分は全て解析的に行うことができる.

5. 積分方程式の数値解法

超大型の浮体構造物として問題となっていることは, 緒言でも述べたように, λ/L が $1/50 \sim 1/100$ のオーダーの短波長の波に対しても精度良く, しかも少ない未知数で計算できなければならないということである. それを実現させるために, 本論文では圧力分布を双方向3次Bスプライン関数の重ね合わせで表す.

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^{NX-2} \sum_{l=0}^{2NY+2} a_{kl} B_k(x) B_l(y) \quad (33)$$

ここで $B_k(x), B_l(y)$ は正規化された3次のBスプライン関数であり, 具体的な形はBoor-Coxの漸化式⁶⁾を用いて求めることができる. また NX, NY は浮体の $1/4$ 部分 ($x > 0, y > 0$) における x 軸, y

軸方向の分割数を表している。1つの3次Bスプライン関数は、4つのパネルにわたってその影響が及ぶので、(33)式に示しているように、新しい未知数である a_{kl} の総数は $(NX+3)*(NY+3)$ 個である。

これらの未知数を精度良く決定するために、ガラーキソ法を適用する。すなわち、(33)式を積分方程式(9)に代入した後、重み関数として $B_p(x)B_q(y)$; $p=0\sim NX+2$, $q=0\sim NY+2$ を(9)式の両辺に掛け、さらに x , y について浮体表面上で積分を行う。その結果、次のような連立方程式を得ることができる。

$$\sum_{k=0}^{NX+2NY+2} \sum_{l=0}^{NX+2NY+2} a_{kl} [\mathcal{L}_{pq,kl}^{(1)} - K \mathcal{L}_{pq,kl}^{(2)}] = \mathcal{R}_{pq} \quad (34)$$

ただし $p=0\sim NX+2$, $q=0\sim NY+2$ であり、マトリックスの影響係数は次式のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{pq,kl}^{(1)} = \iint_{S_H} B_p(x)B_q(y)B_k(x)B_l(y) dx dy \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_{pq,kl}^{(2)} = \iint_{S_H} B_p(x)B_q(y) \left[\iint_{S_H} B_k(\xi)B_l(\eta)G(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta \right] dx dy \quad (36)$$

$$\mathcal{R}_{pq} = \iint_{S_H} B_p(x)B_q(y)u_m(x)v_n(y) dx dy \quad (37)$$

(35)~(37)式は、一般的には数値積分によって算定しなければならないが、(35)式と(37)式は、 x , y それぞれに関する積分の単なる積であるから比較的容易である。これらに対して本論文では Clenshaw-Curtis 法を用い、絶対誤差が 10^{-7} 以下となるように計算している。

計算時間の点で問題となるのは(36)式の計算であるが、パネルの大きさが全て同じになるように x , y 軸方向をそれぞれ等分割している場合には、計算の相似性を使うことによって計算量を大幅に減らすことが可能である。例えば Fig. 2 において、点 (x, y) が P_1 にあつて積分すべきパネルが $j=1$ である時の計算は、点 (x, y) が P_3 にあつて積分すべきパネルが $j=3$ の場合と同等である。従つて、1個のパネル上での ξ, η に関する積分を、 x, y に関する積分に必要な点の数だけ実行しておけば、その結果から残

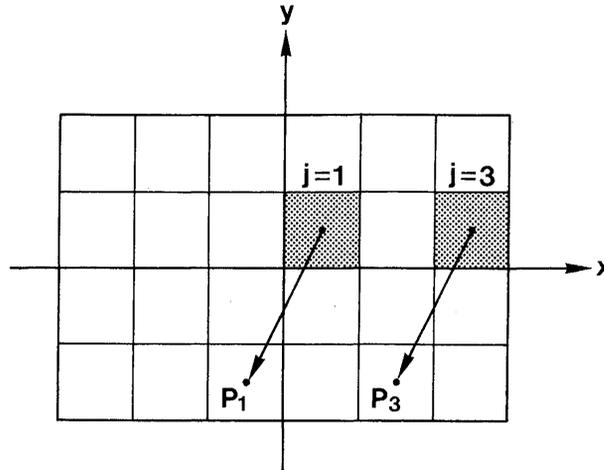


Fig. 2 Explanation of relative similarity relation

りのパネル上での積分は全て求めることができる。これは計算時間の短縮の点で非常に効果的である。また、 (ξ, η) および (x, y) に関する積分にはガウス積分法を用いているが、1個のパネル内における分点数は余裕を見て $6 \times 6 = 36$ 点としている。実際にはこれより少ない分点数でも実用上十分な精度があると考えられ、その時にはさらに計算時間を短縮することができる。

点 (x, y) が考えている積分パネルの近傍にある時には、グリーン関数に含まれる $1/R$, $\log R$ の項の特異性のために、特別な処理が必要である。本論文では3次のBスプライン関数を重み関数として使っているため、次式の積分を(36)式から取り出し、パネル上で解析的に求めている。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{mn} &\equiv \iint_{\Delta S} \frac{(\xi-x)^m (\eta-y)^n}{R} d\xi d\eta \\ \varphi_{mn} &\equiv \iint_{\Delta S} (\xi-x)^m (\eta-y)^n \log R d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ここで m, n は $0 \sim 3$ の整数であり、 ΔS は分割された矩形パネルの1つを表す。具体的な計算公式は付録に示しているが、これは Newman⁷⁾ によって示された、パネル法における高次特異点分布による速度ポテンシャルの計算方法を拡張したものである。

6. 計算結果と考察

6.1 計算精度と計算時間について

計算例として、 $L/B=5$ の矩形平板に入射角 $\beta=30^\circ$ の波が入射する場合を考えた。水深は無量大とし、分割パネル数は、平板の1/4部分を $NX/NY=5$ となるように決めた。また動揺問題におけるモード数は $\zeta(x, y)$ における $F(X), F(Y), F(Z), F(N)$ の4つのタイプとも25個とし、計算はワークステーション HP 9000 シリーズ、モデル 735 で行った。

計算プログラムは最適化されているわけではないが、1つの波に対して、Haskindの関係、エネルギー関係式を含めた全ての計算を終了するのに要する計算時間は、Table 1 に示しているように比較的短いことがわかる。

計算結果の収束状況の一例を Fig. 3, Fig. 4 に示す。Fig. 3 は剛体運動としての heave による上下方向の付加質量、Fig. 4 は減衰力係数であり、横軸は L/λ である。非常に波長の短い波に対しても、パネル数

Table 1 Computation time vs. numbers of panels

(NX, NY)	Number of unknowns	Average CPU time*
(10, 2)	65	20sec
(20, 4)	161	4min 15sec
(30, 6)	297	20min 05sec
(40, 8)	473	62min 10sec
(50, 10)	689	153min 30sec

* by EWS HP 9000 series/model 735

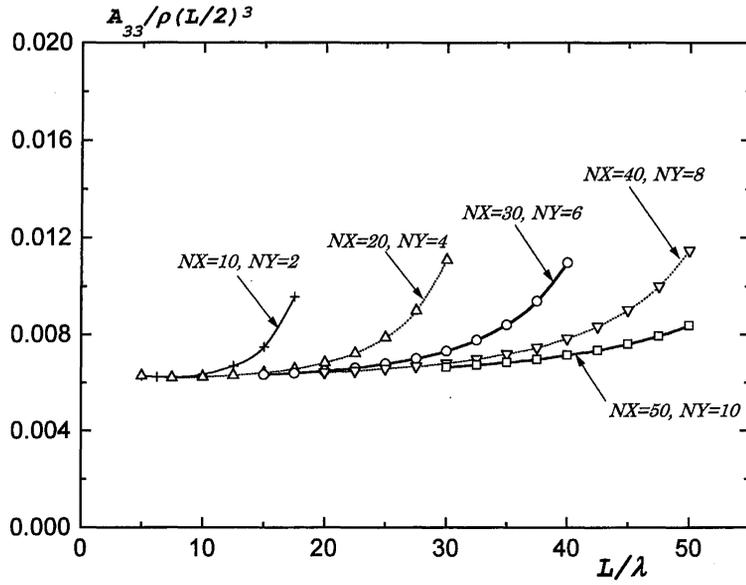


Fig. 3 Convergence of heave added mass for the plate of $L/B=5$, in deep water

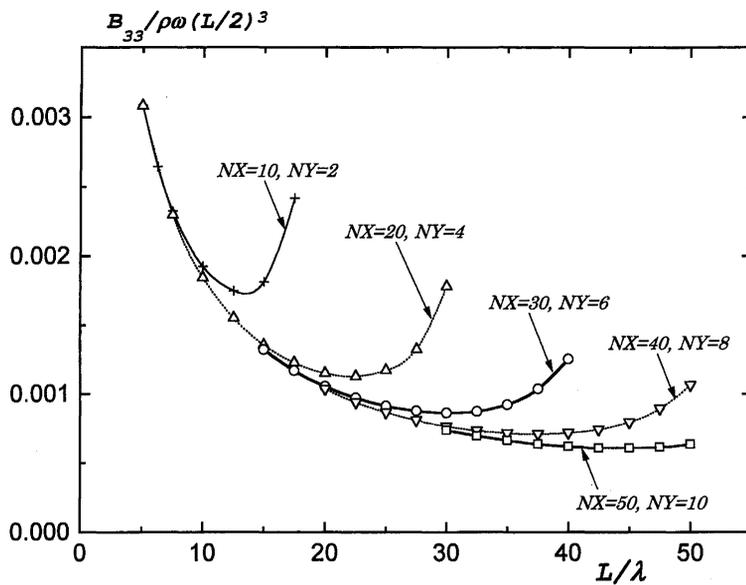


Fig. 4 Convergence of heave damping coefficient for the plate of $L/B=5$, in deep water

Table 2 Relative numerical error in the energy conservation principle listed in percentage ($NX=40$, $NY=8$, $L/\lambda=45$, $h=\infty$)

MODE	BX(I,I)	BY(I,I)	BZ(I,I)	BN(I,I)
1	.2227E-01	.1363E-01	.2505E-01	.1330E-01
2	.2189E-01	.1239E-01	.1886E-01	.1301E-01
3	.2784E-02	.1170E-02	.1010E-01	.4330E-02
4	.2280E-02	.4132E-02	.3198E-02	.4178E-02
5	.2068E-01	.1342E-01	.2298E-01	.1263E-01
6	.2018E-02	.4629E-02	.1112E-02	.3293E-02
7	.5100E-02	.4719E-03	.6977E-03	.3421E-02
8	.5151E-02	.4239E-02	.5964E-02	.3460E-02
9	.4536E-02	.2332E-02	.4328E-02	.2234E-02
10	.1985E-01	.1177E-01	.1827E-01	.1227E-01
11	.9950E-03	.2454E-02	.2263E-02	.2821E-02
12	.3865E-02	.2049E-02	.4611E-02	.1258E-02
13	.3102E-02	.2718E-02	.9917E-02	.1117E-02
14	.2565E-02	.1865E-02	.2021E-02	.1467E-02
15	.4295E-02	.8927E-03	.3059E-02	.3270E-03
16	.5915E-02	.1047E-03	.5317E-02	.6188E-03
17	.1833E-01	.1245E-01	.2014E-01	.1180E-01
18	.1058E-03	.3354E-02	.3817E-04	.2941E-02
19	.3582E-02	.2958E-03	.3300E-02	.1900E-03
20	.7494E-02	.8798E-03	.6425E-02	.1233E-02
21	.2638E-02	.3325E-02	.8399E-04	.4133E-02
22	.2698E-02	.3287E-02	.2854E-02	.3404E-02
23	.1430E-02	.3313E-02	.2055E-02	.2427E-02
24	.7174E-03	.2087E-02	.1323E-02	.1779E-02
25	.2679E-03	.1618E-02	.4669E-03	.1239E-02

を増やしていくと妥当な収束値が得られていることがわかる。また大雑把な目安としては、 $L/\lambda < 0.8 * NX$ が満足される時、十分に信頼できる結果が得られていると言える。

精度について指摘しておくべきことは、Fig. 3, Fig. 4 にプロットされている全ての計算結果において、収束値から少し離れている場合でも Haskind の関係、エネルギー保存則は高精度で満足されているという点である。一例として、 $NX=40$, $NY=8$ のパネル分割によって、 $L/\lambda=45$ に対して計算した時のエネルギー保存則における相対誤差を Table 2 にパーセントで示している。全てのモード形に対して誤差は 0.03% 以内に収まっていることがわかる。この状況は、Haskind の関係式においても、他の分割数においてもほぼ同じであった。これらのことは、エネルギー保存則を数値的に満足しているからと言って、必ずしも計算が収束しているとは限らないことを示している。

6.2 弾性応答に関する実験値との比較

実際の超大型浮体構造物に対応する水槽模型試験を行うためには寸法だけでなく曲げ剛性の相似則も

満足させなければならず、現有的水槽設備で実験を行うことは容易ではない。船舶技術研究所では平面寸法が $300\text{ m} \times 60\text{ m}$ の浮体を想定して、その $1/30.77$ の縮尺模型 ($L=9.75\text{ m}$, $B=1.95\text{ m}$, $d=1.67\text{ cm}$, 曲げ剛性 $EI=1.788 \times 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{m}^2$) を使った実験を水深 $h=1.9\text{ m}$ に設定した海洋構造物試験水槽 (長さ $40\text{ m} \times$ 幅 27.5 m) で行い、その結果の一部は矢後ら⁴⁾ によって報告されている。その実験における波長

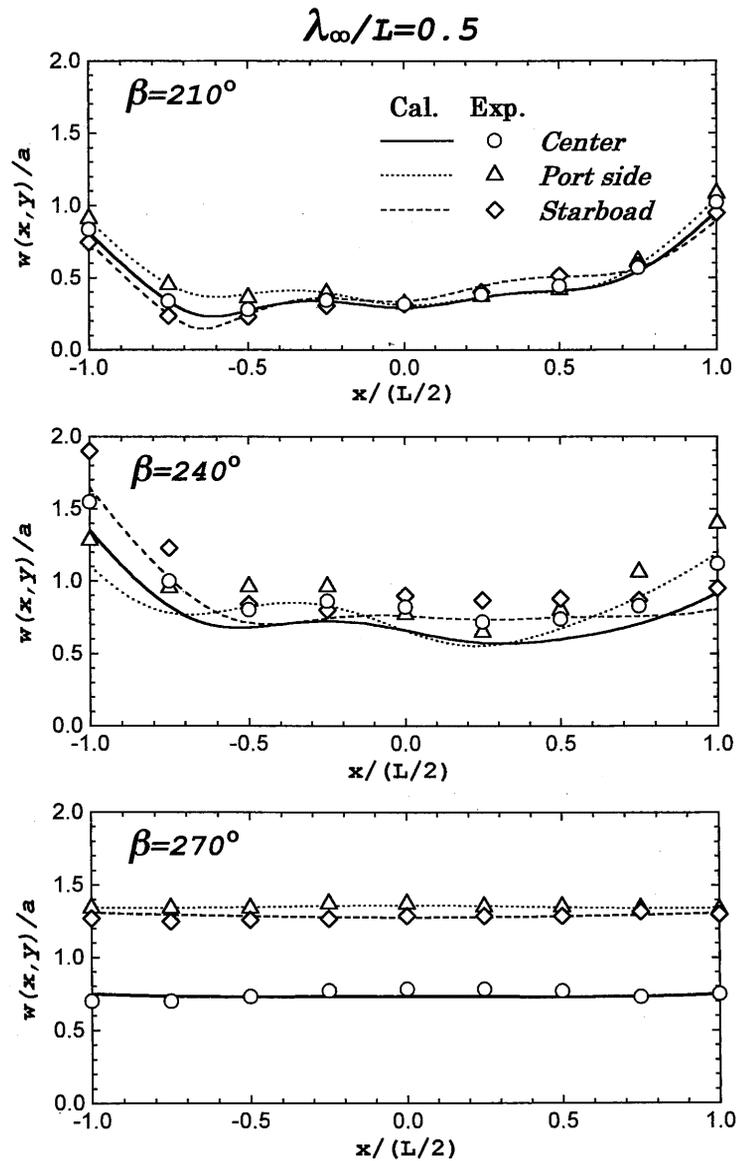


Fig. 6 Comparison of longitudinal distributions of the amplitude of vertical elastic displacement in oblique ($\beta=210^\circ$, 240°) and beam ($\beta=270^\circ$) waves

λ_∞ (造波機の動揺周波数 ω を用いて $\lambda_\infty = 2\pi g/\omega^2$ で与えられ、無限水深を仮定した時の波長に相当する) と浮体長さ L との比は、 $\lambda_\infty/L > 0.1$ で行われておりそれ程小さくはないが、本論文での数値計算の妥当性を調べるために、矢後らの実験結果との比較を行う。

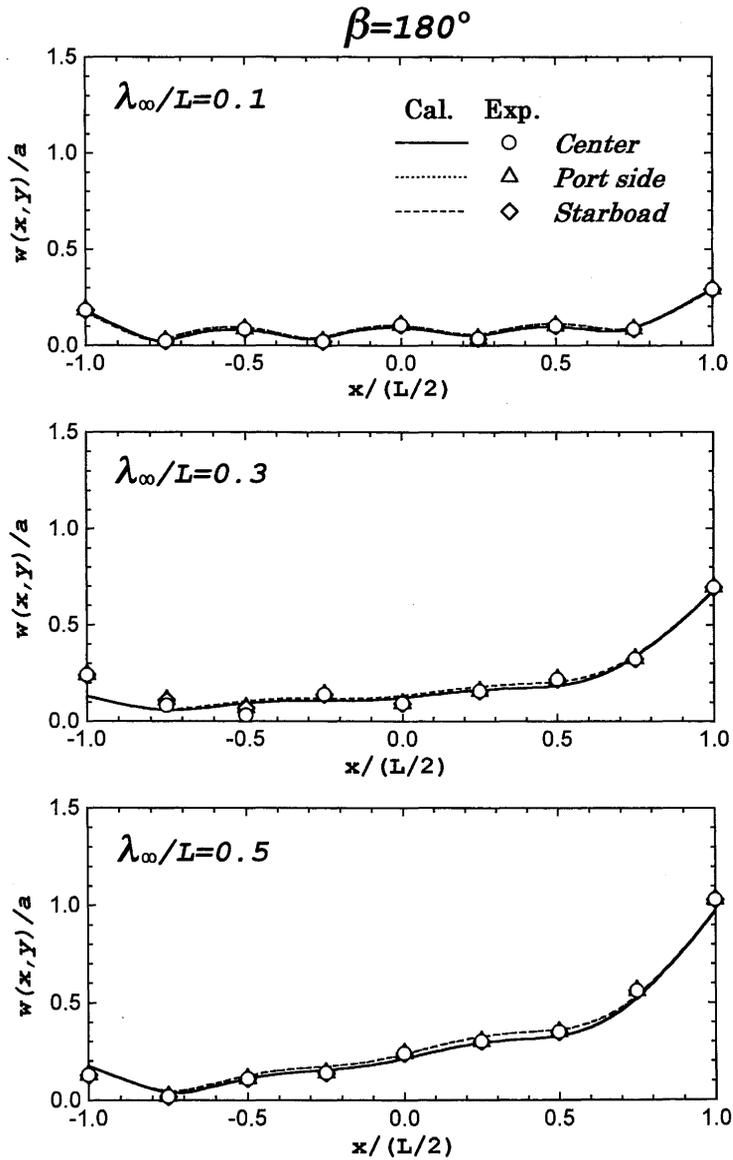


Fig. 5 Comparison of longitudinal distributions of the amplitude of vertical elastic displacement in head waves ($\beta = 180^\circ$)

Fig. 5 には、縦波中における、浮体長手方向の上下変位の振幅が示されている。x 軸の正方向から波は入射しているので、全体的には波上側から波下側にかけて応答は減少し、波下の端部近くで再び増加する傾向にあることがわかる。また波長が短くなるにつれ、高次の弾性応答が卓越してくることもわかる。図中には、浮体中心線上だけでなく、右舷、左舷での変位も示されているが、縦波中ではどの位置でもほとんど同じである。これらの実験結果は、本論文での数値計算結果と定量的にも非常に良く一致しており、数値計算法の妥当性が窺える。

また Fig. 6 には、 $\lambda_\infty/L=0.5$ の波長に対して、 $\beta=210^\circ$ 、 $\beta=240^\circ$ の斜め波中、および $\beta=270^\circ$ の横波中での結果が示されている。縦波中に比べて振幅が大きくなっており、浮体中心線上、右舷、左舷での変位がそれぞれ異なっているが、これらの定量的な変化も数値計算結果によって良く説明できている。斜め波中では、波上側よりも波下側の方が大きく変位する場合があることは興味ある特徴である。

6.3 短波長域での弾性応答に関する考察

本論文での数値計算法の特徴は、非常に短い波長の波に対しても比較的短時間に高精度の計算が行えることにある。そこで本節では、水槽実験が困難と思われる、浮体式海上空港を想定した超大型の浮体構造物に対して短波長域での計算を行い、波浪中における弾性応答の性質について考察する。

Table 3 に示すように、計算例として長さ 5,000 m、幅 1,000 m、喫水 5 m の浮体式海上空港を想定し、現実に近い浮体の曲げ剛性として、 $D=2.0 \times 10^{10} \text{kgf} \cdot \text{m}$ について計算を行った。その時の結果のうち、弾性応答の強制力となっている散乱問題での圧力分布を Fig. 7 に、また対応する弾性応答を Fig. 8 に、それぞれ実数部分のみを示している。これらは $L/\lambda_\infty=20$ の波長に対する結果であり、それぞれの上段の図は無限水深における縦波中 ($\beta=0^\circ$) での結果、中段の図は水深 $h=50\text{m}$ ($h/\lambda_\infty=1/5$) における縦波中での結果、また下段の図は水深 $h=50\text{m}$ における斜波中 ($\beta=30^\circ$) での結果を示している。計算での分割パネル数は $NX=30$ 、 $NY=6$ とし、モード関数の数は 4 つのタイプとも x 軸方向に 26、y 軸方向に 6 としている。

縦波中での圧力分布は、波上側に鋭いピークがあるものの、浮体内部ではほとんど 0 である。また浮体の両サイドには入射波と同じ波長で波下側へ行くにつれて振幅の減衰する小さな圧力変動が見られる。それによる弾性応答は、浮体内部でも小さくはなく、波上側でのデルタ関数的な強制力によって弾性変位が浮体全体に誘起されている。また弾性応答の波長は入射波の波長よりも長くなっているが、これは弾性平板上では曲げ剛性が 0 でないために、水面波に比べて重力加速度が見掛け上大きくなってい

Table 3 Numerical data for computations of elastic motions

$L \times B \times d = 5000(m) \times 1000(m) \times 5(m)$
$h = 50(m)$ or <i>infinity</i>
$D = 2.0 \times 10^{10}(\text{kgf} \cdot \text{m})$, $\nu = 0.3$
$M' = M/\rho L B d = 1.0$
$D' = D/\rho g (L/2)^4 = 0.512 \times 10^{-6}$

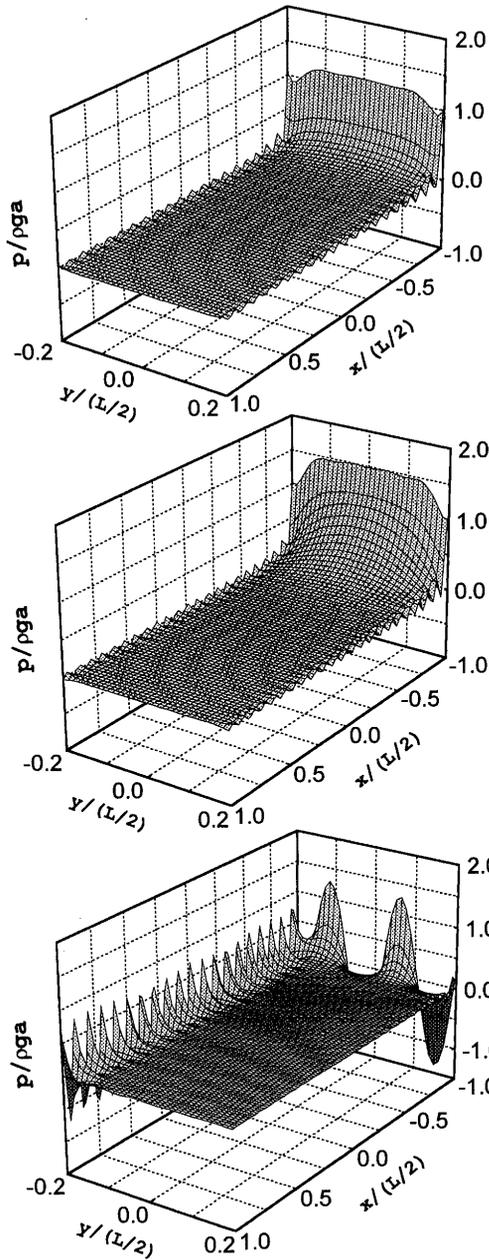


Fig. 7 Real parts of diffraction pressure distribution on the plate of $L/B=5$. Upper: for $\beta=0^\circ$ in deep water. Middle: for $\beta=0^\circ$ in shallow water of $h/\lambda_\infty=1/5$. Lower: for $\beta=30^\circ$ in shallow water. $L/\lambda_\infty=20$ in all cases.

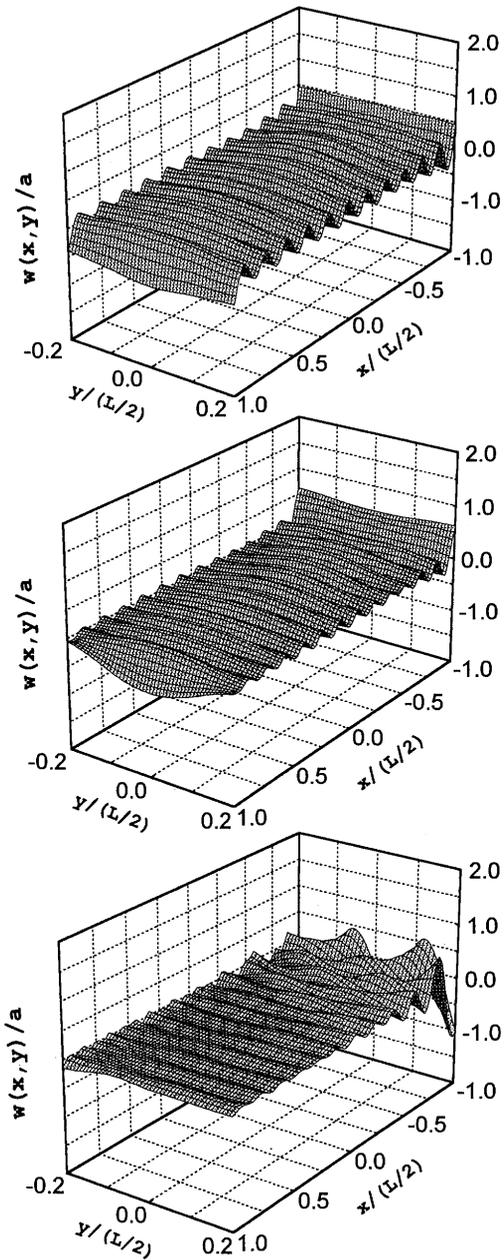


Fig. 8 Real parts of elastic deformation of the plate of $L/B=5$. Upper: for $\beta=0^\circ$ in deep water. Middle: for $\beta=0^\circ$ in shallow water of $h/\lambda_\infty=1/5$. Lower: $\beta=30^\circ$ in shallow water. $L/\lambda_\infty=20$ in all cases.

るためであると理解することができる。

有限水深の場合には、浮体下部での流れが水平面内に拘束される傾向にあるので、無限水深の場合に比べて、圧力の高い領域が浮体内部にまで及んでいる。また水波の分散関係によって、同じ周波数でも入射波の波長は無限水深の場合より短くなるので、浮体の両サイドに見られる圧力変動においてもやはり波長が短くなっている。この分散関係における有限水深影響は、弾性応答の波長においても見られる。また、無限水深の場合に比べて弾性変位の振幅が若干小さくなっている。

斜波中での散乱問題における圧力分布では、浮体長辺の波上側において、入射波と同じ波長を持った

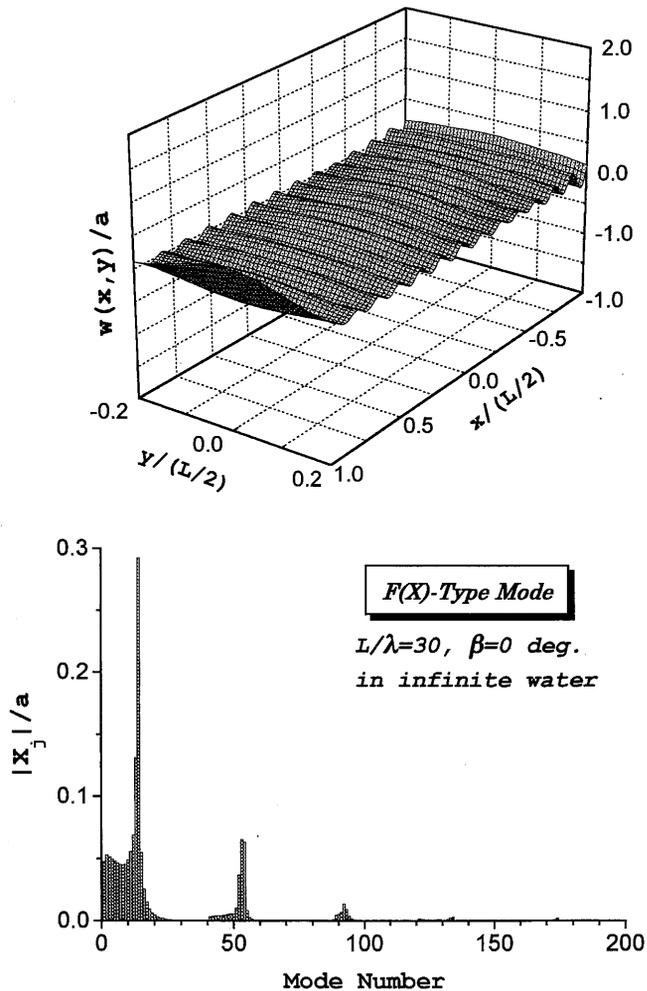


Fig. 9 Upper: real part of elastic deformation of the plate of $L=5,000\text{m}$, $B=1,000\text{m}$ in deep water. Lower: amplitudes of elastic mode shapes. ($L/\lambda=30, \beta=0^\circ$)

鋭いスパイク状の変動が現れる。しかし弾性応答は、必ずしも浮体長辺の波上側では大きくなく、波のあたる浮体短辺側を除いて全般に縦波中の場合よりも小さくなっている。これは入射角が 30° であるために浮体長辺からの強制力が同位相ではなく、結果的にはあまり大きな強制力となっていないためと考えられる。

より短い波長域での弾性応答の特性を見るために、無限水深での $L/\lambda=30$ および 40 に対する計算を行った。分割パネル数は $L/\lambda < 0.8 * NX$ の条件を満足するように $NX=50$ 、 $NY=10$ とし、弾性変位を表すモード関数の数は $F(X)$ タイプ、 $F(Z)$ タイプともに x 軸方向に 40 、 y 軸方向に 8 とした。

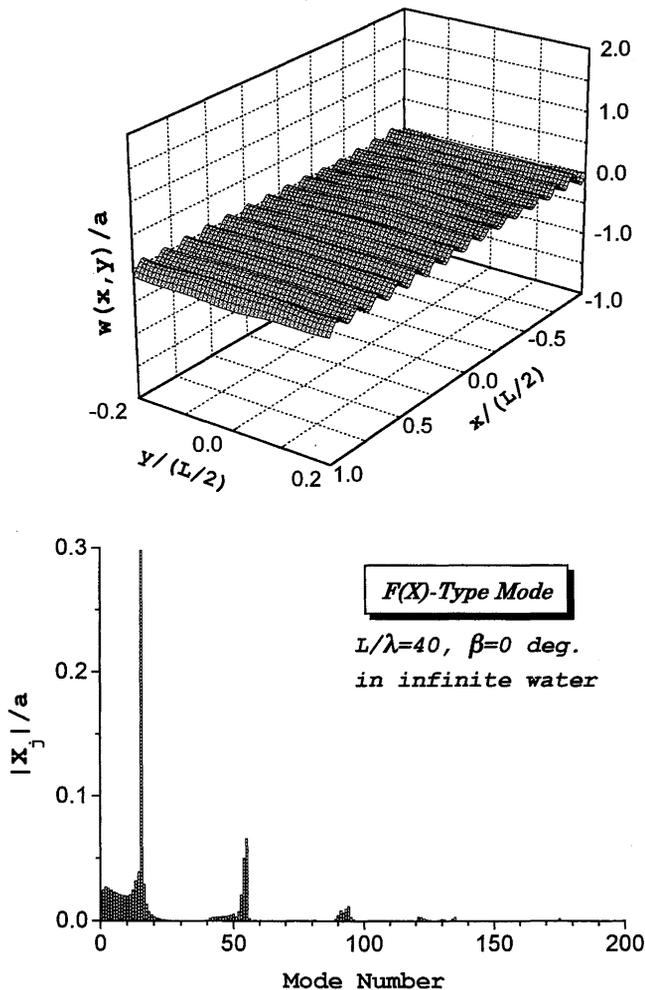


Fig. 10 Upper : real part of elastic deformation of the plate of $L=5, 000\text{m}, B=1,000\text{m}$ in deep water. Lower : amplitudes of elastic mode shapes. ($L/\lambda=40, \beta=0^\circ$)

$L/\lambda=30$ の結果を Fig. 9 に、 $L/\lambda=40$ の結果を Fig. 10 に示しているが、それぞれの上段の図は弾性応答の実数部、下段の図は $F(X)$ タイプにおける各弾性モードの振幅を入射波の振幅で無次元化した値である。

弾性応答の計算結果から、入射波の波長が短くなっても必ずしも弾性変位は消滅するわけではなく、入射波の波長よりも長い、ある卓越した波長の変位が存在していることがわかる。このことは各弾性モードの振幅を示す下段の図からも明らかである。また高次の弾性モードの振幅がほとんど0となっていることから、モード展開法による弾性応答の計算における収束性も確認することができる。

7. 結 言

本論文の内容をまとめると次のようになる。

- (1) 相対的に非常に短い波長の規則波中でも浅喫水の超大型浮体に働く圧力分布が高精度に、しかも比較的短時間で計算できる手法を示した。計算法の特徴は、未知関数である圧力分布を3次Bスプライン関数の重ね合わせで表し、その係数を決定する連立方程式を構築するためにガラーキン法を適用している。
- (2) 分割パネル内で圧力が一定であると仮定する従来の解法では計算が不可能であった非常に短い波長の波に対しても高精度の計算結果が得られていることを、分割パネル数を増やしていった時の数値解の収束状況、エネルギー保存則および Haskind の関係式をチェックすることで確認した。
- (3) 浮体の弾性応答をモード展開法によって計算した。弾性変位を表すモード関数として、自由端の条件を満足する1次元梁の振動モードを x 、 y 軸の両方向に重ね合わせたものを採用した。各モード関数の振幅は、平板の振動方程式を解くことによって決定するが、その際、平板周辺が自由端であるという境界条件を自然境界条件として考慮する方法を示した。
- (4) 弾性応答の計算値は、 $\lambda_0/L > 0.1$ に対する矢後らの水槽試験結果と非常に良く一致していることを確認した。より短波長の波に対しては、長さ 5,000 m の海上空港を想定した計算を行い、超大型浮体の波浪中弾性応答の特性について考察した。

参 考 文 献

- 1) 前田久明, 増田光一, 宮島省吾, 居駒知樹: ポンツーン型超大型浮体式海洋構造物の波浪中弾性応答に関する研究, 日本造船学会論文集, 第 178 号, pp. 203-212, 1995
- 2) 矢後清和: 可撓性箱型浮体の強制動揺実験と変動圧力分布, 日本造船学会第 13 回海洋工学シンポジウム, pp. 313-320, 1995
- 3) Takaki, M. and Gu, X.: Motions of a Floating Elastic Plate in Waves, 日本造船学会論文集, 第 180 号, pp. 331-339, 1996
- 4) 矢後清和, 遠藤久芳: 浅喫水箱型浮体の波浪中弾性応答について — 大型模型による水槽試験 —, 日本造船学会論文集, 第 180 号, pp. 341-352, 1996
- 5) Newman, J. N.: Wave Effects on Deformable Bodies, Appl. Ocean Res., Vol. 16, pp. 47-59, 1994

6) 桜井 明編著：スプライン関数入門，東京電機大学出版局，pp. 88-118，1982

7) Newman, J. N.: Distributions of Sources and Normal Dipoles over a Quadrilateral Panel, J. Eng. Math., Vol. 20, pp. 113-126, 1986

付録：特異積分の計算方法

次式の計算を解析的に行う方法について考える。

$$\psi_{mn} \equiv \iint_{\Delta S} \frac{(\xi-x)^m(\eta-y)^n}{R} d\xi d\eta \tag{A.1}$$

$$\varphi_{mn} \equiv \iint_{\Delta S} (\xi-x)^m(\eta-y)^n \log R d\xi d\eta \tag{A.2}$$

ここで $R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$ であり， m, n は $0 \sim 3$ の整数である。実際の数値計算では ΔS は全て矩形パネルであるが，以下の解析は，直線で構成されているならば ΔS はどんな形状でも成り立つ。

Newman⁷⁾ にならってガウスの定理を用いると，(A.1)式，(A.2)式ともにパネルを構成する周辺経路に沿った線積分に帰着できる。

$$(m+n+1)\psi_{mn} = \sum_{j=1}^4 v_j \cdot f_{mn}^j \tag{A.3}$$

$$(m+n+2)\varphi_{mn} = \sum_{j=1}^4 v_j \left[g_{mn}^j - \frac{h_{mn}^j}{m+n+2} \right] \tag{A.4}$$

ここで

$$f_{mn}^j = \int_0^{s_j} \frac{(\xi-x)^m(\eta-y)^n}{R} ds \tag{A.5}$$

$$g_{mn}^j = \int_0^{s_j} (\xi-x)^m(\eta-y)^n \log R ds \tag{A.6}$$

$$h_{mn}^j = \int_0^{s_j} (\xi-x)^m(\eta-y)^n ds \tag{A.7}$$

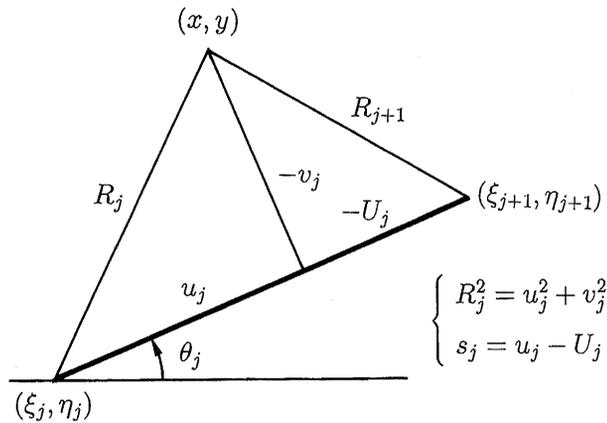


Fig. 11 Notations used for singular integrals on a rectangular panel

$$v_j = (x - \xi_j) \sin \theta_j - (y - \eta_j) \cos \theta_j \quad (\text{A.8})$$

(A.5)～(A.7)式の積分は, (ξ_j, η_j) から (ξ_{j+1}, η_{j+1}) までの直線上の積分であるから, 例えば(A.5)式に対しては以下のように表すことができる。(簡単のため f_{mn}^j の上付き添字 j は省略する.)

$$f_{00} = \mathcal{F}_{0j} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{Bmatrix} f_{10} \\ f_{01} \end{Bmatrix} = \mathcal{F}_{1j} \begin{Bmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{Bmatrix} \mp \mathcal{F}_{0j} v_j \begin{Bmatrix} \sin \theta_j \\ \cos \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$f_{11} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{2j} \sin 2\theta_j + \mathcal{F}_{1j} v_j \cos 2\theta_j - \mathcal{F}_{0j} v_j^2 \sin 2\theta_j \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{Bmatrix} f_{20} \\ f_{02} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{2j} (1 \pm \cos 2\theta_j) \mp \mathcal{F}_{1j} v_j \sin 2\theta_j \mp \mathcal{F}_{0j} v_j^2 \cos 2\theta_j \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{Bmatrix} f_{21} \\ f_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \mathcal{F}_{3j} \begin{Bmatrix} \sin \theta_j + \sin 3\theta_j \\ \cos \theta_j - \cos 3\theta_j \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{4} \mathcal{F}_{2j} v_j \begin{Bmatrix} \cos \theta_j + 3\cos 3\theta_j \\ \sin \theta_j - 3\sin 3\theta_j \end{Bmatrix} \\ \mp \mathcal{F}_{1j} v_j^2 \begin{Bmatrix} \sin 3\theta_j \\ \cos 3\theta_j \end{Bmatrix} - \mathcal{F}_{0j} v_j^3 \begin{Bmatrix} \cos 3\theta_j \\ \sin 3\theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{Bmatrix} f_{30} \\ f_{03} \end{Bmatrix} = \mathcal{F}_{3j} \begin{Bmatrix} \cos^3 \theta_j \\ \sin^3 \theta_j \end{Bmatrix} \mp \frac{3}{4} \mathcal{F}_{2j} v_j \begin{Bmatrix} \sin \theta_j + \sin 3\theta_j \\ \cos \theta_j - \cos 3\theta_j \end{Bmatrix} \\ \mp \mathcal{F}_{1j} v_j^2 \begin{Bmatrix} \cos 3\theta_j \\ \sin 3\theta_j \end{Bmatrix} + \mathcal{F}_{0j} v_j^3 \begin{Bmatrix} \sin 3\theta_j \\ \cos 3\theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{Bmatrix} f_{31} \\ f_{13} \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \mathcal{F}_{4j} (2\sin 2\theta_j \pm \sin 4\theta_j) + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{3j} v_j (\cos 2\theta_j \pm \cos 4\theta_j) \\ - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{2j} v_j^2 (\sin 2\theta_j \pm 2\sin 4\theta_j) \mp \mathcal{F}_{1j} v_j^3 \cos 4\theta_j \pm \mathcal{F}_{0j} v_j^4 \sin 4\theta_j \quad (\text{A.15})$$

$$f_{22} = \frac{1}{8} \mathcal{F}_{4j} (1 - \cos 4\theta_j) + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{3j} v_j \sin 4\theta_j + \mathcal{F}_{2j} v_j^2 \cos 4\theta_j \\ - \mathcal{F}_{1j} v_j^3 \sin 4\theta_j - \mathcal{F}_{0j} v_j^4 \cos 4\theta_j \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{Bmatrix} f_{32} \\ f_{23} \end{Bmatrix} = \mathcal{F}_{5j} \begin{Bmatrix} \sin^2 \theta_j \cos^3 \theta_j \\ \cos^2 \theta_j \sin^3 \theta_j \end{Bmatrix} \mp \frac{1}{16} \mathcal{F}_{4j} v_j \begin{Bmatrix} 2\sin \theta_j - 3\sin 3\theta_j - 5\sin 5\theta_j \\ 2\cos \theta_j + 3\cos 3\theta_j - 5\cos 5\theta_j \end{Bmatrix} \\ \pm \frac{1}{4} \mathcal{F}_{3j} v_j^2 \begin{Bmatrix} \cos 3\theta_j + 3\cos 5\theta_j \\ \sin 3\theta_j - 3\sin 5\theta_j \end{Bmatrix} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{2j} v_j^3 \begin{Bmatrix} \sin 3\theta_j + 5\sin 5\theta_j \\ \cos 3\theta_j - 5\cos 5\theta_j \end{Bmatrix} \\ - \mathcal{F}_{1j} v_j^4 \begin{Bmatrix} \cos 5\theta_j \\ \sin 5\theta_j \end{Bmatrix} \pm \mathcal{F}_{0j} v_j^5 \begin{Bmatrix} \sin 5\theta_j \\ \cos 5\theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$f_{33} = \mathcal{F}_{6j} \sin^3 \theta_j \cos^3 \theta_j + \frac{3}{16} \mathcal{F}_{5j} v_j (\cos 2\theta_j - \cos 6\theta_j) \\ - \frac{3}{16} \mathcal{F}_{4j} v_j^2 (\sin 2\theta_j - 3\sin 6\theta_j) + \mathcal{F}_{3j} v_j^3 \cos 6\theta_j - \frac{3}{2} \mathcal{F}_{2j} v_j^4 \sin 6\theta_j \\ - \mathcal{F}_{1j} v_j^5 \cos 6\theta_j + \mathcal{F}_{0j} v_j^6 \sin 6\theta_j \quad (\text{A.18})$$

ここで $\mathcal{F}_{1j} \sim \mathcal{F}_{6j}$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{0j} &= \log \frac{R_j + R_{j+1} + s_j}{R_j + R_{j+1} - s_j} \\
\mathcal{F}_{1j} &= R_{j+1} - R_j \\
\mathcal{F}_{2j} &= \frac{1}{2} [u_j R_j - U_j R_{j+1} + v_j^2 \mathcal{F}_{0j}] \\
\mathcal{F}_{3j} &= \frac{1}{3} (R_{j+1}^3 - R_j^3) \\
\mathcal{F}_{4j} &= \frac{1}{4} [u_j R_j^3 - U_j R_{j+1}^3 + 3v_j^2 \mathcal{F}_{2j}] \\
\mathcal{F}_{5j} &= \frac{1}{5} (R_{j+1}^5 - R_j^5) \\
\mathcal{F}_{6j} &= \frac{1}{6} [u_j R_j^5 - U_j R_{j+1}^5 + 5v_j^2 \mathcal{F}_{4j}]
\end{aligned}$$

g_{mn}^i についても (A.9)～(A.18) 式と同じ形に表すことができ、 $\mathcal{F}_{0j} \sim \mathcal{F}_{6j}$ のところへ次に示す $\mathcal{G}_{0j} \sim \mathcal{G}_{6j}$ を代入すばよい。

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{0j} &= - \left[U_j \log R_{j+1} - u_j \log R_j + s_j - v_j \text{Tan}^{-1} \left(\frac{v_j s_j}{u_j U_j + v_j^2} \right) \right] \\
\mathcal{G}_{1j} &= \frac{1}{2} [R_{j+1}^2 \log R_{j+1} - R_j^2 \log R_j] - \frac{1}{4} (U_j^2 - u_j^2) \\
\mathcal{G}_{2j} &= -\frac{1}{3} \left[U_j^3 \log R_{j+1} - u_j^3 \log R_j - \frac{1}{3} (U_j^3 - u_j^3) \right. \\
&\quad \left. - v_j^2 s_j + v_j^3 \text{Tan}^{-1} \left(\frac{v_j s_j}{u_j U_j + v_j^2} \right) \right] + v_j^2 \mathcal{G}_{0j} \\
\mathcal{G}_{3j} &= \frac{1}{4} \left[(U_j^4 - v_j^4) \log R_{j+1} - (u_j^4 - v_j^4) \log R_j - \frac{1}{4} (U_j^4 - u_j^4) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} v_j^2 (U_j^2 - u_j^2) \right] + v_j^2 \mathcal{G}_{1j} \\
\mathcal{G}_{4j} &= -\frac{1}{5} \left[U_j^5 \log R_{j+1} - u_j^5 \log R_j - \frac{1}{5} (U_j^5 - u_j^5) + \frac{1}{3} v_j^2 (U_j^3 - u_j^3) \right. \\
&\quad \left. + v_j^4 s_j - v_j^5 \text{Tan}^{-1} \left(\frac{v_j s_j}{u_j U_j + v_j^2} \right) \right] + 2v_j^2 \mathcal{G}_{2j} - v_j^4 \mathcal{G}_{0j} \\
\mathcal{G}_{5j} &= \frac{1}{6} \left[(U_j^6 + v_j^6) \log R_{j+1} - (u_j^6 + v_j^6) \log R_j - \frac{1}{6} (U_j^6 - u_j^6) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} v_j^2 (U_j^4 - u_j^4) - \frac{1}{2} v_j^4 (U_j^2 - u_j^2) \right] + 2v_j^2 \mathcal{G}_{3j} - v_j^4 \mathcal{G}_{1j} \\
\mathcal{G}_{6j} &= -\frac{1}{7} \left[U_j^7 \log R_{j+1} - u_j^7 \log R_j - \frac{1}{7} (U_j^7 - u_j^7) + \frac{1}{5} v_j^2 (U_j^5 - u_j^5) - \frac{1}{3} v_j^4 (U_j^3 - u_j^3) \right. \\
&\quad \left. - v_j^6 s_j + v_j^7 \text{Tan}^{-1} \left(\frac{v_j s_j}{u_j U_j + v_j^2} \right) \right] + 3v_j^2 \mathcal{G}_{4j} - 3v_j^4 \mathcal{G}_{2j} + v_j^6 \mathcal{G}_{0j}
\end{aligned}$$

同様に h_{mn}^i についても $\mathcal{F}_{0j} \sim \mathcal{F}_{6j}$ の代わりに次に示す $\mathcal{H}_{0j} \sim \mathcal{H}_{6j}$ を用いればよい。

$$\mathcal{H}_{0j} = s_j$$

$$\mathcal{H}_{1j} = \frac{1}{2}(U_j^2 - u_j^2)$$

$$\mathcal{H}_{2j} = -\frac{1}{3}(U_j^3 - u_j^3) + v_j^2 s_j$$

$$\mathcal{H}_{3j} = \frac{1}{4}(U_j^4 - u_j^4) + \frac{1}{2}v_j^2(U_j^2 - u_j^2)$$

$$\mathcal{H}_{4j} = -\frac{1}{5}(U_j^5 - u_j^5) - \frac{2}{3}v_j^2(U_j^3 - u_j^3) + v_j^4 s_j$$

$$\mathcal{H}_{5j} = \frac{1}{6}(U_j^6 - u_j^6) + \frac{1}{2}v_j^2(U_j^4 - u_j^4) + \frac{1}{2}v_j^4(U_j^2 - u_j^2)$$

$$\mathcal{H}_{6j} = -\frac{1}{7}(U_j^7 - u_j^7) - \frac{3}{5}v_j^2(U_j^5 - u_j^5) - v_j^4(U_j^3 - u_j^3) + v_j^6 s_j$$

(平成9年6月30日 受理)