

4倍高調波共鳴近傍での弱非線形表面張力重力波の定常進行波解の安定性

加藤, 由紀

岡村, 誠

九州大学応用力学研究所 : 准教授

及川, 正行

九州大学応用力学研究所 : 助教授

<https://doi.org/10.15017/4744014>

出版情報 : 応用力学研究所所報. 80, pp.1-21, 1996-10. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



4 倍高調波共鳴近傍での弱非線形表面張力重力波の 定常進行波解の安定性

加 藤 由 紀* 岡 村 誠†
及 川 正 行‡

概 要

2 次元的な深水表面張力重力波において、4 倍高調波共鳴に近い場合に、基本波とその 4 倍高調波の振幅のゆっくりとした時間空間発展を記述する弱非線形方程式を導出した。この方程式を用いて、定常進行波解の線形安定性を調べた。基本波と 4 倍高調波の振幅が同じオーダーであるような定常解は、不安定であることがわかった。振幅の 3 次までの近似では、4 倍高調波に対する変調不安定を見出した。振幅の 4 次までの近似では、さらに、4 倍高調波共鳴に関係した新しい不安定を見出した。

Key words: Capillary gravity waves, Fourth harmonic resonance, Progressive waves of permanent form, Stability

1. は じ め に

2 次元的な深水表面張力重力波は、無次元表面張力係数

$$\gamma = \frac{Tk_0^2}{g} \quad (1.1)$$

の値によって様々な共鳴がおこることが知られている。ここで、 T は表面張力係数を流体の密度で割ったもの、 g は重力加速度、そして k_0 は代表的な波数である。特に $\gamma = 1/N$ のときは N 倍高調波共鳴がおこる。Chen と Saffman¹⁾ は、 γ が $1/N$ に近い場合に、基本波とその N 倍高調波が同じオーダーであるような定常進行波解が存在することを示した。ここで、定常とは、一定速度で動く座標系において時間的に変化しないという意味で使っている。このような定常進行波解を、combination (1, N) wave と呼ぶ。また、基本波の振幅を $O(\epsilon)$ としたとき N 倍高調波の振幅が $O(\epsilon^N)$ であるような定常解を、pure

*九州大学大学院総合理工学研究科，博士課程。現在，日本原子力研究所，博士研究員

†九州大学助手，応用力学研究所

‡九州大学教授，応用力学研究所

wave と呼ぶ。Chen と Saffman は、 $\gamma - 1/N = O(\epsilon^2)$ のときに、 N 倍高調波の振幅が $O(\epsilon^{N-2})$ であるような定常解の存在も示した。

これらの定常解の安定性については、Ma²⁾ が Zakharov 方程式を用いて $N = 2$ の場合を調べた。その結果、combination (1, 2) wave は安定であり、一方 pure wave は combination wave が存在しうのような領域で不安定になることがわかっている。 $N = 2$ 以外の場合の定常解については、著者等の知る限り、その安定性は調べられていない。

著者等は最近、弱非線形の近似をせずに基礎方程式を数値的に解くことにより、 $0.05 \leq \gamma \leq 0.2$ の範囲の定常解に擾乱を加えたときの時間発展を調べた³⁾。弱非線形の近似をしない場合の定常解においては、 $\gamma = 1/N$ の近傍で、基本波の振幅を $O(\epsilon)$ としたとき、 N 倍高調波の近傍(つまり、 $\dots, N-1, N, N+1, \dots$ 倍の高調波)の振幅がおおよそ $O(\epsilon^{N-2})$ 程度になる。このような定常解に擾乱を加えると、波数 N の近傍の波が成長することがわかった。このような高調波成分の成長を説明することが、本研究の一つの動機である。

本論文では、 $\gamma = 1/4$ 近傍での combination (1, 4) wave の安定性を調べる。Chen と Saffman によると、pure wave から combination (1, N) wave への分岐図は、 $N = 2, 3, 4$ では大きく異なるが、 $N \geq 4$ のときの分岐図は $N = 4$ の分岐図と同じである。従って、combination (1, 4) wave の安定性を調べることは、表面張力が小さい ($\gamma \leq 1/4$) 一般の場合を扱う糸口になると思われる。

McGoldrick⁴⁾ は、高調波共鳴が起こるようなあるモデルに対して、 $N = 2, 3, 4, 5$ について、基本波と N 倍高調波の振幅の時間変化を近似的に記述する方程式を導出した。我々は、水の波の基礎方程式をもとにして、振幅の時間的変化のみならず空間的変化をも許すような方程式を導出し、その方程式を使って定常解の安定性を調べる。

2. 振幅方程式の導出

非粘性非圧縮流体の 2 次元的な非回転運動は、次の基礎方程式で記述される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (-\infty < y \leq \eta(x, t)) \quad (2.1 a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad (y \rightarrow -\infty) \quad (2.1 b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (y = \eta(x, t)) \quad (2.1 c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta - \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad (y = \eta(x, t)) \quad (2.1 d)$$

ここで、 x は水平座標、 y は上向きを正にとった鉛直座標である。 $\phi(x, y, t)$ は速度ポテンシャル、 $\eta(x, t)$ は水面変位である。方程式系(2.1)は、代表的な空間スケール k_0^{-1} と時間スケール $(gk_0)^{-1/2}$ によって無次元化されている。無次元化された表面張力係数 γ の定義は、(1.1) に示した。

速度ポテンシャル ϕ と水面変位 η は、以下のように展開できるものと仮定する。

$$\phi = \left[A_0 + \sum_{n=1} A_n \exp(ny) \exp(ni\theta) \right] + \text{c.c.}, \quad (2.2 \text{ a})$$

$$\eta = \left[B_0 + \sum_{n=1} B_n \exp(ni\theta) \right] + \text{c.c.}, \quad (2.2 \text{ b})$$

ただし,

$$\theta = x - \omega t \quad (2.3)$$

である. c.c. は前の項の複素共役を表す. 波数が1の波と4の波が大きく, 他の波数の波はこの2つの波の相互作用によって作られるものと仮定する. つまり, 微小パラメタ $\epsilon \ll 1$ を用いて

$$A_n, B_n = \begin{cases} O(\epsilon) & n = 1, 4 \\ O(\epsilon^2) & n = 0, 2, 3, 5, 8 \\ \vdots & \end{cases} \quad (2.4)$$

とおけるものとする. また, 振幅はゆっくりと変化するものとする.

$$A_n = A_n(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon t), \quad (2.5 \text{ a})$$

$$B_n = B_n(\epsilon x, \epsilon t). \quad (2.5 \text{ b})$$

さらに, 表面張力係数 γ を

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_2 + \cdots \quad (2.6)$$

のように展開する. ただし, $\gamma_n = O(\epsilon^n)$ とする.

以下では, (2.1 a), (2.1 b) 及び (2.1 c), (2.1 d) を $y = 0$ のまわりに展開した式に, (2.2), (2.6) を代入して, 各フーリエ係数をゼロとおき, ϵ の各オーダー毎に逐次近似して行って, A_1 と A_4 の支配方程式を導出する.

まず $O(\epsilon)$ で, $\exp(i\theta)$ の係数から

$$\omega^2 = 1 + \gamma_0, \quad (2.7)$$

$\exp(4i\theta)$ の係数から

$$\omega^2 = \frac{1}{4} + 4\gamma_0 \quad (2.8)$$

を得る. この2式が両立する条件から

$$\gamma_0 = \frac{1}{4} \quad (2.9)$$

と決まる. また, このとき,

$$B_1 = \frac{2}{5}\sqrt{5}iA_1 + O(\epsilon^2), \quad (2.10)$$

$$B_4 = \frac{2}{5}\sqrt{5}iA_4 + O(\epsilon^2) \quad (2.11)$$

となる.

次に $O(\epsilon^2)$ まででは, $\exp(i\theta)$ の係数から

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = -\frac{7}{20}\sqrt{5}\frac{\partial A_1}{\partial x} + O(\epsilon^3), \quad (2.12)$$

$$B_1 = \frac{2}{5}\sqrt{5}iA_1 + \frac{3}{25}\sqrt{5}\frac{\partial A_1}{\partial x} + O(\epsilon^3), \quad (2.13)$$

$\exp(4i\theta)$ の係数から

$$\frac{\partial A_4}{\partial t} = -\frac{13}{20}\sqrt{5}\frac{\partial A_4}{\partial x} + O(\epsilon^3), \quad (2.14)$$

$$B_4 = \frac{2}{5}\sqrt{5}iA_4 - \frac{3}{100}\sqrt{5}\frac{\partial A_4}{\partial x} + O(\epsilon^3) \quad (2.15)$$

を得る。 $O(\epsilon^2)$ で、 $\exp(ni\theta)$ ($n = 0, 2, 3, 5, 8$) の係数からは

$$B_0 = O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ a})$$

$$A_2 = \frac{3}{5}\sqrt{5}iA_1^2 + O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ b})$$

$$B_2 = -2A_1^2 + O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ c})$$

$$A_3 = -4\sqrt{5}iA_1^*A_4 + O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ d})$$

$$B_3 = 12A_1^*A_4 + O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ e})$$

$$A_5 = -6\sqrt{5}iA_1A_4 + O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ f})$$

$$B_5 = 8A_1A_4 + O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ g})$$

$$A_8 = -\frac{96}{35}\sqrt{5}iA_1^2 + O(\epsilon^3), \quad (2.16 \text{ h})$$

$$B_8 = \frac{16}{7}A_1^2 + O(\epsilon^3) \quad (2.16 \text{ i})$$

を得る。ただし、 $()^*$ は $()$ の複素共役を意味する。これらの結果を、 $O(\epsilon^3)$ までの $\exp(i\theta)$ 及び $\exp(4i\theta)$ の係数に入れると、

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + i\alpha_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + i\alpha_3 A_1 + i\alpha_4 |A_1|^2 A_1 + i\alpha_5 |A_4|^2 A_1 = 0, \quad (2.17 \text{ a})$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial A_4}{\partial x} + i\beta_2 \frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} + i\beta_3 A_4 + i\beta_4 |A_4|^2 A_4 + i\beta_5 |A_1|^2 A_4 = 0 \quad (2.17 \text{ b})$$

を得る。係数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ は実数である。これらの値は、付録に書いてある。係数 α_3, β_3 は γ_2 に依存することを注意しておく。(2.17) は、波数 1 と 4 の波の相互作用を表す最低次の方程式である。

さらに $O(\epsilon^3)$ まででは、 $\exp(ni\theta)$ ($n = 2, 3, 5, 8$) の係数から

$$A_2 = \frac{3}{5}\sqrt{5}iA_1^2 - \frac{496}{5}(A_1^*)^2 A_4 + \frac{159}{50}\sqrt{5}A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + O(\epsilon^4), \quad (2.18 \text{ a})$$

$$B_2 = -2A_1^2 - \frac{1528}{25}\sqrt{5}i(A_1^*)^2 A_4 + 8iA_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + O(\epsilon^4), \quad (2.18 \text{ b})$$

$$A_3 = -4\sqrt{5}iA_1^*A_4 - \frac{69}{5}A_1^3 - \frac{192}{25}\sqrt{5}A_4 \frac{\partial A_1^*}{\partial x} + \frac{181}{50}\sqrt{5}A_1^* \frac{\partial A_4}{\partial x} + O(\epsilon^4), \quad (2.18 \text{ c})$$

$$B_3 = 12A_1^*A_4 - \frac{186}{25}\sqrt{5}iA_1^3 - \frac{74}{5}A_4 \frac{\partial A_1^*}{\partial x} + \frac{77}{10}iA_1^* \frac{\partial A_4}{\partial x} + O(\epsilon^4), \quad (2.18 \text{ d})$$

$$A_5 = -6\sqrt{5}iA_1A_4 + \frac{84}{25}\sqrt{5}A_4 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{39}{100}\sqrt{5}A_1 \frac{\partial A_4}{\partial x} + O(\epsilon^4), \quad (2.18 \text{ e})$$

$$B_5 = 8A_1A_4 + 8iA_4 \frac{\partial A_1}{\partial x} + 2iA_1 \frac{\partial A_4}{\partial x} + O(\epsilon^4), \quad (2.18 f)$$

$$A_8 = -\frac{96}{35}\sqrt{5}A_1^2 - \frac{348}{1225}\sqrt{5}A_4 \frac{\partial A_1}{\partial x} + O(\epsilon^4), \quad (2.18 g)$$

$$B_8 = \frac{16}{7}A_1^2 + \frac{8}{49}iA_4 \frac{\partial A_1}{\partial x} + O(\epsilon^4) \quad (2.18 h)$$

を得る。これらを $\exp(i\theta)$ 及び $\exp(4i\theta)$ の係数に入れると、 $O(\epsilon^4)$ までの近似で次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + i\alpha_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + i\alpha_3 A_1 + i\alpha_4 |A_1|^2 A_1 + i\alpha_5 |A_4|^2 A_1 + \alpha_6 \frac{\partial^3 A_1}{\partial x^3} \\ & + \alpha_7 |A_1|^2 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \alpha_8 A_1^2 \frac{\partial A_1^*}{\partial x} + \alpha_9 |A_1|^2 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \alpha_{10} A_1 A_4 \frac{\partial A_1^*}{\partial x} + \alpha_{11} A_1 A_4^* \frac{\partial A_4}{\partial x} + \alpha_{12} (A_1^*)^3 A_4 \\ & + i\alpha_{13} \left[\mathcal{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} |A_1|^2 \right\} + 4\mathcal{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} |A_4|^2 \right\} \right] A_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.19 a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial A_4}{\partial x} + i\beta_2 \frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} + i\beta_3 A_4 + i\beta_4 |A_4|^2 A_4 + i\beta_5 |A_1|^2 A_4 + \beta_6 \frac{\partial^3 A_4}{\partial x^3} \\ & + \beta_7 |A_4|^2 \frac{\partial A_4}{\partial x} + \beta_8 A_4^2 \frac{\partial A_4^*}{\partial x} + \beta_9 |A_1|^2 \frac{\partial A_4}{\partial x} + \beta_{10} A_4 A_1 \frac{\partial A_1^*}{\partial x} + \beta_{11} A_4 A_1^* \frac{\partial A_1}{\partial x} + \beta_{12} A_1^4 \\ & + i\beta_{13} \left[\mathcal{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} |A_1|^2 \right\} + 4\mathcal{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} |A_4|^2 \right\} \right] A_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.19 b)$$

ただし、 $\mathcal{H}$ はヒルベルト変換

$$\mathcal{H}\{f(x)\} = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt \quad (2.20)$$

を表す。係数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ は実数である。これらの値は、付録に書いてある。係数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$ のみが、 γ_2 に依存する。(2.19) の α_{13}, β_{13} を含む項を導出する際、 $O(\epsilon^3)$ までの $\frac{\partial A_0}{\partial x}$ の値が必要になる。

この値を求めるには、 $\exp(0i\theta)$ の $O(\epsilon^3)$ までの係数から得られる境界条件

$$\frac{\partial A_0}{\partial y} \rightarrow 0, (y \rightarrow -\infty) \quad (2.21 a)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial y} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} (|A_1|^2 + 4|A_4|^2), (y = 0) \quad (2.21 b)$$

の下で、 $O(\epsilon^4)$ までで得られる

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} = 0, (-\infty < y \leq 0) \quad (2.22)$$

を解けばよい。(2.22) を解くと、 $y = 0$ で

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} = \frac{1}{\omega} \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (|A_1|^2 + 4|A_4|^2) \right\} \quad (2.23)$$

となる。

$O(\epsilon^3)$ まで考慮した場合は、(2.17 a) のすべての項に A_1 が含まれ、(2.17 b) のすべての項に A_4 が含まれていた。しかし、(2.19 b) には A_4 を含まない項が入っている。したがって、 $O(\epsilon^4)$ まで考慮した場合には、もともと波数 4 の波がないときでも、波数 1 の波から波数 4 の波が作られることが期待される。

ここまででは、 A_1, B_1, A_4, B_4 が $O(\epsilon)$ であるという仮定の下に $O(\epsilon^3)$ まで考慮した式(2.17)と $O(\epsilon^4)$

まで考慮した式(2.19)を導出したが、 $A_1, B_1 = O(\epsilon)$, $A_4, B_4 = O(\epsilon^2)$ と仮定しても、同様の式が導出できる。導出の詳細は省くが、 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したとき A_1, A_4 は次の方程式に支配される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + i\alpha_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + i\alpha_3 A_1 + i\alpha_4 |A_1|^2 A_1 \\ + \alpha_6 \frac{\partial^3 A_1}{\partial x^3} + \alpha_7 |A_1|^2 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \alpha_8 A_1^2 \frac{\partial A_1^*}{\partial x} + i\alpha_{13} \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} |A_1|^2 \right\} A_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.24 \text{ a})$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial A_4}{\partial x} + i\beta_2 \frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} + i\beta_3 A_4 + i\beta_5 |A_1|^2 A_4 + \beta_{12} A_1^4 = 0. \quad (2.24 \text{ b})$$

係数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ は実数である。これらの値は、付録に書いてある。

3. 定常解の安定性

方程式(2.17), (2.19), (2.24)は、いずれも空間的に一様な解：

$$A_1 = \hat{A}_1 \exp(-iW_1 t) \quad (3.1 \text{ a})$$

$$A_4 = \hat{A}_4 \exp(-iW_4 t) \quad (3.1 \text{ b})$$

を持つ。ただし、 $\hat{A}_1, \hat{A}_4$ は複素定数、 W_1, W_4 は実定数である。これらの解は、もとの系(2.1)における定常進行波解を表し得る。この節では、上の3種類の方程式において(3.1)の形で表されるもとの系(2.1)の定常進行波解に対応する解を求め、その安定性を調べてゆく。

3.1 $O(\epsilon^3)$ まで考慮した combination wave

(2.17)は、 $A_1, A_4 = O(\epsilon)$ と仮定して、 $O(\epsilon^3)$ まで考慮した方程式であった。(2.17)に、(3.1)を代入すると、周波数 W_1 と W_4 が次のように求まる。

$$W_1 = \alpha_3 + \alpha_4 |\hat{A}_1|^2 + \alpha_5 |\hat{A}_4|^2, \quad (3.2 \text{ a})$$

$$W_4 = \beta_3 + \beta_4 |\hat{A}_4|^2 + \beta_5 |\hat{A}_1|^2. \quad (3.2 \text{ b})$$

この解が、もとの系において定常進行波を表すためには、

$$W_4 = 4W_1 \quad (3.3)$$

でなければいけない。この条件を満たす一様解(3.1)は、もとの系(2.1)の定常進行波解に対応するので、以下では、この解を“定常解”と呼ぶことにする。条件(3.3)に、(3.2)を入れると、定常解の複素振幅に関する条件が次のように求まる。

$$(4\alpha_4 - \beta_5) |\hat{A}_1|^2 + (4\alpha_5 - \beta_4) |\hat{A}_4|^2 = \beta_3 - 4\alpha_3. \quad (3.4)$$

この条件の右辺は

$$\beta_3 - 4\alpha_3 = \frac{12}{5} \sqrt{5} \gamma_2 \quad (3.5)$$

であり、左辺の係数 $4\alpha_4 - \beta_5$ と $4\alpha_5 - \beta_4$ はいずれも正である。したがって、 $\gamma_2 \leq 0$ のとき、式(3.4)を満たす解は存在しない。 $\gamma_2 > 0$ のときは、(3.4)を満たす解 $(|\hat{A}_1|, |\hat{A}_4|)$ が存在して、そのような解の集合は楕円をなす。(3.4)は、Chen と Saffman¹⁾ が導出した combination (1, 4) wave の条件と一致している。

$\gamma_2 = 0.0001$ 及び $\gamma_2 = 0.001$ のときに、(3.4)を満たす $|\hat{A}_1|$ と $|\hat{A}_4|$ の関係を図1に示した。 γ_2 が大きく

なると、定常解の振幅も大きくなることがわかる。 $\gamma_2 = 0.0001$ のときの幾つかの解に対応する水面変位を図2に示した。水面変位は、(2.2 b)において $O(\epsilon^3)$ までとったときのものである。ChenとSaffmanは、crestに関して対称な波形を仮定したが、我々はそのような仮定をしていない。したがって、複素振幅 $\hat{A}_1, \hat{A}_4$ の位相は任意にとれる。図2に示した波形は、 $\hat{A}_1$ と $\hat{A}_4$ の位相差が0の場合の波形である。このとき波形は、crestに関して対称ではないことがわかる。

以下では、この定常解の線形安定性を調べる。定常解に

$$A_1 = \hat{A}_1(1+a_1)\exp(-iW_1t+i\theta_1) \quad (3.6 a)$$

$$A_4 = \hat{A}_4(1+a_4)\exp(-iW_4t+i\theta_4) \quad (3.6 b)$$

のように微小擾乱 $a_1, \theta_1, a_4, \theta_4$ を加える。これを、(2.17)に代入し、 $a_1, \theta_1, a_4, \theta_4$ について線形化し、実部と虚部に分けると、

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7 a)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + 2\alpha_4 |\hat{A}_1|^2 a_1 + 2\alpha_5 |\hat{A}_4|^2 a_4 = 0 \quad (3.7 b)$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial a_4}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^2 \theta_4}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7 c)$$

$$\frac{\partial \theta_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \theta_4}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial^2 a_4}{\partial x^2} + 2\beta_4 |\hat{A}_4|^2 a_4 + 2\beta_5 |\hat{A}_1|^2 a_1 = 0 \quad (3.7 d)$$

を得る。ここで、擾乱の形を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \theta_1 \\ a_4 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{\theta}_4 \end{pmatrix} \exp[i(\lambda x - \Omega t)] \right] \quad (3.8)$$

のように仮定すると、次の連立方程式を得る。

$$Mx = 0, \quad (3.9)$$

$$x = (\hat{a}_1, \hat{\theta}_1, \hat{a}_4, \hat{\theta}_4)^T, \quad (3.10)$$

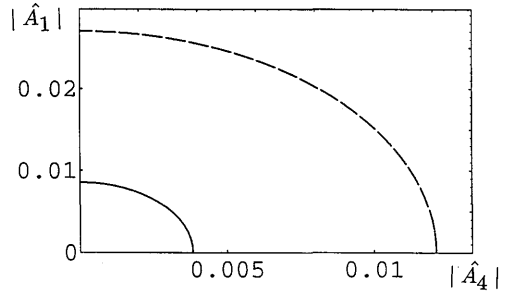


図1 $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave における $|\hat{A}_1|$ と $|\hat{A}_4|$ の関係。実線は $\gamma_2=0.0001$ ，破線は $\gamma_2=0.001$ を表す。

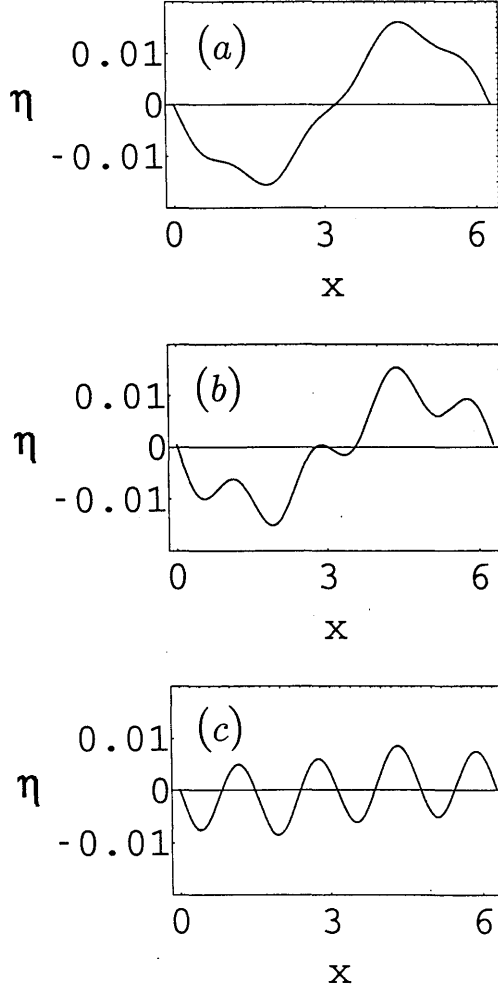


図2 $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave, $\gamma_2 = 0.0001$. (a) $\hat{A}_1 = 0.0038$, $\hat{A}_4 = 0.001$ (b) $\hat{A}_1 = 0.0037$, $\hat{A}_4 = 0.0025$ (c) $\hat{A}_1 = 0.0034$, $\hat{A}_4 = 0.0038$

$$M = \begin{pmatrix} -i(\Omega - \alpha_1\lambda) & \alpha_2\lambda^2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2\lambda^2 + 2\alpha_4|\hat{A}_1|^2 & -i(\Omega - \alpha_1\lambda) & 2\alpha_5|\hat{A}_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & -i(\Omega - \beta_1\lambda) & \beta_2\lambda^2 \\ 2\beta_5|\hat{A}_1|^2 & 0 & -\beta_2\lambda^2 + 2\beta_4|\hat{A}_4|^2 & -i(\Omega - \beta_1\lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

可解条件 $\det M = 0$ から, Ω についての固有方程式

$$[(\Omega - \alpha_1\lambda)^2 - \alpha_2\lambda^2(\alpha_2\lambda^2 - 2\alpha_4|\hat{A}_1|^2)][(\Omega - \beta_1\lambda)^2 - \beta_2\lambda^2(\beta_2\lambda^2 - 2\beta_4|\hat{A}_4|^2)] - 4\alpha_2\beta_2\alpha_5\beta_5\lambda^4|\hat{A}_1|^2|\hat{A}_4|^2 = 0 \quad (3.12)$$

を得る。 γ_2 と $\hat{A}_1$ (または、 $\hat{A}_4$) が与えられれば、この式を解くことによって、固有値 $\Omega = \Omega(\lambda)$ が求まる。 $\text{Im}\Omega$ が正ならば、定常解は不安定である。

最初に、(3.12) が簡単に解ける場合について考えてみよう。まず、 $\lambda = 0$ ならば $\Omega = 0$ である。つまり、空間的に振動しない擾乱は成長しない。次に、 $\hat{A}_4$ が十分小さい定常解を考えてみる。例えば、 $\lambda \sim |\hat{A}_1| \sim |\hat{A}_4|^{1/3}$ を保ちながら $\lambda \rightarrow 0$ とすると、(3.12) 中の $\hat{A}_4$ を含む項は無視できる。すると、解くべき式は

$$[(\Omega - \alpha_1 \lambda)^2 - \alpha_2 \lambda^2 (\alpha_2 \lambda^2 - 2\alpha_4 |\hat{A}_1|^2)] [(\Omega - \beta_1 \lambda)^2 - (\beta_2 \lambda^2)^2] = 0 \quad (3.13)$$

となり、固有値が次のように求まる。

$$\Omega = \begin{cases} \alpha_1 \lambda \pm \sqrt{\alpha_2 \lambda^2 (\alpha_2 \lambda^2 - 2\alpha_4 |\hat{A}_1|^2)} \\ \beta_1 \lambda \pm \beta_2 \lambda^2. \end{cases} \quad (3.14)$$

$\alpha_2 < 0$, $\alpha_4 > 0$ なので、すべての λ について Ω は実数となる。したがって、 $\hat{A}_4$ が十分小さい定常解は安定である。

次に、 $\hat{A}_1$ が小さい定常解を考えてみる。 $\lambda \sim |\hat{A}_1|^{1/3} \sim |\hat{A}_4|$ を保ちながら $\lambda \rightarrow 0$ とすると、(3.12) 中の $\hat{A}_1$ を含む項は無視できる。すると、上と同様に固有値が求まる。

$$\Omega = \begin{cases} \alpha_1 \lambda \pm \alpha_2 \lambda^2 \\ \beta_1 \lambda \pm \sqrt{\beta_2 \lambda^2 (\beta_2 \lambda^2 - 2\beta_4 |\hat{A}_4|^2)}. \end{cases} \quad (3.15)$$

この場合は、 $\beta_2 < 0$, $\beta_4 < 0$ なので、 $\lambda < \lambda_c = \sqrt{2\beta_4/\beta_2} |\hat{A}_4|$ の擾乱が成長する。成長率は

$$\text{Im}\Omega = \sqrt{-\beta_2 \lambda^2 (\beta_2 \lambda^2 - 2\beta_4 |\hat{A}_4|^2)} \quad (3.16)$$

で、成長率が最大になる波数は $\lambda_c/\sqrt{2}$ である。図3に成長率 $\text{Im}\Omega$ を示した。

上の2つの場合では、波数1と4の波のうち一方を無視しているので、pure wave の安定性を調べたのと同じことになっている。pure wave の安定性については、既に Zakharov⁹⁾ が調べている。その結果、基本波の表面張力係数が $2/\sqrt{3} - 1 < \gamma \leq 1/2$ のとき定常解は安定で、 $0 \leq \gamma \leq 2/\sqrt{3} - 1$ 及び $1/2 < \gamma$ のときは、変調不安定がおこることがわかっている。波数1の波だけが大きい場合は $\gamma \sim 1/4$ であり、波数4の波だけが大きい場合の実効的な無次元表面張力係数は $T(4k_0)^2/g \sim 16\gamma_0 = 4$ である。したがって、我々の結果は Zakharov の結果と一致している。

(3.12) を解いた結果を、図4に示した。 $|\hat{A}_4|$ が小さい解になるほど、成長率が低くなり、最大成長率をもつ波数の値も小さくなっている。このことは、波数4の pure wave における変調不安定と同じである。

図4に示した3つの解について、最大成長率を与える擾乱の波数 λ_m と、 $\lambda = \lambda_m$ のときの比 $r = |\hat{a}_4|/|\hat{a}_1|$ の値を、表1に示し

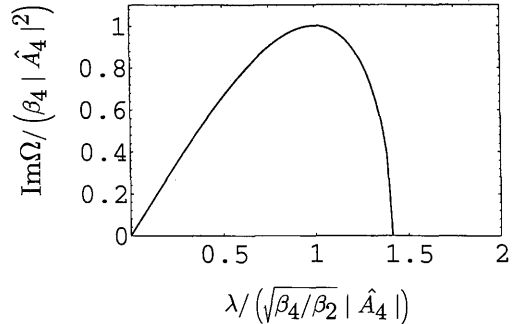


図3 波数4の波に対する変調不安定の成長率。横軸は波数、縦軸は成長率を表す。波数は最大成長率をとる波数で規格化してある。成長率は最大成長率で規格化してある。

た、 r の値によって成長してくる固有関数の形がわかる。 $r \ll 1$ ならば波数 1 の近傍の擾乱が多く含まれ、 $r \gg 1$ ならば波数 4 の近傍の擾乱がより多く含まれることになる。表 1 に示した値は、いずれも $r \gg 1$ であり、成長してくる擾乱が波数 4 の近傍に限定されていることを示す。したがって、図 4 に見られる不安定は、波数 4 の pure wave にたいする変調不安定と本質的な違いがないことがわかる。

(3.12) を解くと、 $\lambda \sim 4$ の近傍でも $\text{Im}\Omega \neq 0$ になる。このときの成長率と擾乱の大きさの比 r を、図 5 と表 2 に示した。この不安定は、pure wave に対する安定性解析では見出されない種類の不安定である。したがって、 A_1 と A_4 の何らかの相互作用に関連した不安定であると思われる。しかし、もともと (2.17) は A_1 と A_4 の空間変動がゆるやかであるという仮定の下に導出された式であるから、この振幅方程式を水の波のモデルとして扱う立場をとる限り、 λ が $O(1)$ 程度まで大きいところは、式の適用範囲外である。

3.2 $A_1 = O(\epsilon)$, $A_4 = O(\epsilon^2)$ の定常解

ここでは、(2.24) を用いて、 $A_1 = O(\epsilon)$, $A_4 = O(\epsilon^2)$ としたときの定常解について考察する。

(3.1) において $\hat{A}_1 = O(\epsilon)$, $\hat{A}_4 = O(\epsilon^2)$ として (2.24) に代入すると

$$W_1 = \alpha_3 + \alpha_4 |\hat{A}_1|^2, \quad (3.17 \text{ a})$$

$$W_4 = \beta_3 + \beta_5 |\hat{A}_1|^2 - i\beta_{12} \frac{\hat{A}_1^4}{A_4} \exp[-i(4W_1 - W_4)t] \quad (3.17 \text{ b})$$

を得る。 W_4 は定数と仮定したから、(3.17 b) において時間的な振動を表す部分は消えなければならない。したがって、

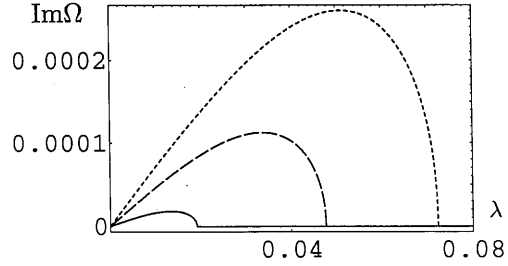


図 4 $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave の安定性。 $\gamma_2=0.0001$ 。実線は $|\hat{A}_1|=0.0038$, $|\hat{A}_4|=0.001$ 、破線は $|\hat{A}_1|=0.0037$, $|\hat{A}_4|=0.0025$ 、点線は $|\hat{A}_1|=0.0034$, $|\hat{A}_4|=0.0038$ 。

表 1 $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave において、最大成長率を与える波数 λ_m と、 $r = |\hat{a}_4|/|\hat{a}_1|$ の値。 $\gamma_2=0.0001$ 。

	$ \hat{A}_1 $	$ \hat{A}_4 $	λ_m	r
(a)	0.0038	0.001	0.013	7.9×10^5
(b)	0.0037	0.0025	0.034	1.3×10^5
(c)	0.0034	0.0038	0.051	5.4×10^4

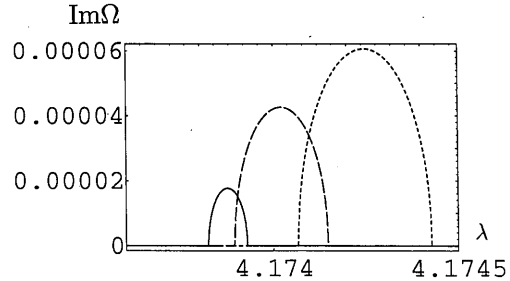


図 5 $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave の安定性。 $\gamma_2=0.0001$ 。実線は $|\hat{A}_1|=0.0038$, $|\hat{A}_4|=0.001$ 、破線は $|\hat{A}_1|=0.0037$, $|\hat{A}_4|=0.0025$ 、点線は $|\hat{A}_1|=0.0034$, $|\hat{A}_4|=0.0038$ 。

$$W_4 = 4W_1 \quad (3.18)$$

である。つまり、(2.24)の一般解は、必ず定常解になっている。さらに

$$\hat{A}_1 = r_1 \exp(i\phi_1), \quad (3.19 a)$$

$$\hat{A}_4 = r_4 \exp(i\phi_4) \quad (3.19 b)$$

とおくと、 W_4 が実数であるためには

$$4\phi_1 - \phi_4 = s\frac{\pi}{2}, \quad (s = \pm 1), \quad (3.20)$$

つまり、

$$\hat{A}_4 = -isr_4 \exp(4i\phi_1) \quad (3.21)$$

と決まる。(3.20)は、水面変位が crest に関して対称であるための条件になっている。(3.19 a), (3.21)を(3.18)に入れると、 r_1 と r_4 の満たすべき条件が次のように求まる。

$$(4\alpha_4 - \beta_5)r_1^2 = \beta_3 - 4\alpha_3 + s\beta_{12}\frac{r_1^4}{r_4}. \quad (3.22)$$

$\gamma_2 = 0.0001$ 及び $\gamma_2 = 0.001$ のときに、この条件を満たす r_1 と r_4 の関係を図 6 に示した。この図は、Chen と Saffman が求めた $A_N = O(\epsilon^{N-2})$ の場合の分岐図と一致する。

次に、この解の安定性を調べるため、(3.6)のように擾乱を導入し、(2.24)に代入する。3.1 節と同じ手順で微小擾乱について線形化すると

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^3 a_1}{\partial x^3} + (\alpha_7 + \alpha_8)r_1^2 \frac{\partial a_1}{\partial x} = 0, \quad (3.23 a)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial x^3} + 2\alpha_4 r_1^2 a_1 + (\alpha_7 - \alpha_8)r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + 2\alpha_{13} r_1^2 \mathcal{H}\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x}\right\} = 0, \quad (3.23 b)$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial a_4}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^2 \theta_4}{\partial x^2} - s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4} (4\theta_1 - \theta_4) = 0, \quad (3.23 c)$$

$$\frac{\partial \theta_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \theta_4}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial^2 a_4}{\partial x^2} + 2\beta_5 r_1^2 a_1 + s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4} (4a_1 - a_4) = 0 \quad (3.23 d)$$

を得る。前と同様に、擾乱の形を(3.8)のように仮定すると

$$Mx = 0 \quad (3.24)$$

を得る。M の成分を m_{ij} と書くと、

$$m_{11} = -i[\Omega - \alpha_1 \lambda + \alpha_6 \lambda^3 - (\alpha_7 + \alpha_8)r_1^2 \lambda], \quad (3.25 a)$$

$$m_{12} = \alpha_2 \lambda^2, \quad (3.25 b)$$

$$m_{21} = -\alpha_2 \lambda^2 + 2\alpha_4 r_1^2 - 2\alpha_{13} r_1^2 \text{sgn}(\lambda) \lambda, \quad (3.25 c)$$

表 2 $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave において、最大成長率を与える波数 λ_m と、 $r = |\hat{a}_4|/|\hat{a}_1|$ の値。 $\gamma_2 = 0.0001$.

	$ \hat{A}_1 $	$ \hat{A}_4 $	λ_m	r
(a)	0.0038	0.001	4.17388	3.8
(b)	0.0037	0.0025	4.17402	1.5
(c)	0.0034	0.0038	4.17425	0.9

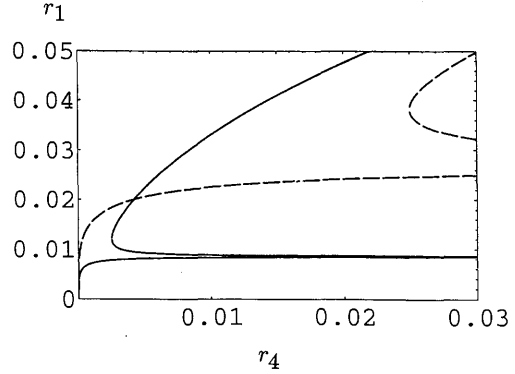


図 6 $A_1 = O(\epsilon)$, $A_4 = O(\epsilon^2)$ とした定常解における r_1 と r_4 の関係。実線は $\gamma_2 = 0.0001$ 、破線は $\gamma_2 = 0.001$ を表す。上側の分枝が $s = +1$ に、下側の分枝が $s = -1$ に対応する。

$$m_{22} = -i[\Omega - \alpha_1\lambda + \alpha_6\lambda^3 - (\alpha_7 + \alpha_8)r_1^2\lambda], \quad (3.25 d)$$

$$m_{32} = -4s\beta_{12}\frac{r_1^4}{r_4}, \quad (3.25 e)$$

$$m_{33} = m_{44} = -i(\Omega - \beta_1\lambda), \quad (3.25 f)$$

$$m_{34} = -m_{43} = \beta_2\lambda^2 + s\beta_{12}\frac{r_1^4}{r_4}, \quad (3.25 g)$$

$$m_{41} = 2\beta_5r_1^2 + 4s\beta_{12}\frac{r_1^4}{r_4}, \quad (3.25 h)$$

$$m_{13} = m_{14} = m_{23} = m_{24} = m_{31} = m_{42} = 0 \quad (3.25 i)$$

である。ただし、(3.25)を導出する際に、ヒルベルト変換の公式

$$\mathcal{H}\{\exp(ikx)\} = i \operatorname{sgn}(k)\exp(ikx) \quad (3.26)$$

を使った。可解条件 $\det M = 0$ から、固有値は次のように求まる。

$$\Omega_{1,2} = \alpha_1\lambda - \alpha_6\lambda^3 + \alpha_7r_1^2\lambda \pm \lambda\sqrt{D}, \quad (3.27 a)$$

$$D = \alpha_2^2\lambda^2 + 2\alpha_2\alpha_{13}r_1^2\operatorname{sgn}(\lambda)\lambda + \alpha_8^2r_1^4 - 2\alpha_2\alpha_4r_1^2, \quad (3.27 b)$$

$$\Omega_{3,4} = \beta_1\lambda \pm |\beta_2\lambda^2 + s\beta_{12}\frac{r_1^4}{r_4}|. \quad (3.27 c)$$

(2.24 a)には A_4 が含まれていないので、 $\Omega_{1,2}$ には波数1の波の情報しか入らない。つまり、 $\Omega_{1,2}$ は、波数1の pure wave において $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの固有値と同じである。 D の符号は、 $r_1 < r_{1c} = [-2\alpha_2\alpha_4/(16/5 - \alpha_8^2)]^{1/2} = 0.39$ のとき正である。 $r_1 \geq r_{1c}$ のときは、 $\lambda_c = 8\alpha_4/[\sqrt{5}(16/5 - \alpha_8^2)] = 13.2$ の近傍で D が負になり、不安定となる。しかし、もともと式(2.24)は、 A_1 、 A_4 の空間変動がゆるやかであるという仮定の下に導出された式であるから、 λ が大きいところは適用範囲外である。このような不安定が水の波で起こるかどうかは、方程式(2.24)からは判断できない。また、 $\Omega_{3,4}$ は、実数であるから、結局 $A_1 = O(\epsilon)$ 、 $A_4 = O(\epsilon^2)$ の定常解は λ の小さい擾乱に対しては安定である。

3.3 $O(\epsilon^4)$ まで考慮した combination wave

最後に、(2.19)を用いて、 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの combination wave について考察する。

(3.1)を(2.19)に代入すると

$$W_1 = \alpha_3 + \alpha_4|\hat{A}_1|^2 + \alpha_5|\hat{A}_4|^2 - i\alpha_{12}\frac{(\hat{A}_1^*)^3\hat{A}_4}{\hat{A}_1}\exp[i(4W_1 - W_4)t] \quad (3.28 a)$$

$$W_4 = \beta_3 + \beta_4|\hat{A}_4|^2 + \beta_5|\hat{A}_1|^2 - i\beta_{12}\frac{\hat{A}_1^4}{\hat{A}_4}\exp[-i(4W_1 - W_4)t] \quad (3.28 b)$$

を得る。 W_1 と W_4 は定数と仮定したから

$$W_4 = 4W_1 \quad (3.29)$$

となる。つまり、 $A_1 = O(\epsilon)$ 、 $A_4 = O(\epsilon^2)$ とおいたときの一様解と同様に、(2.19)の一様解も定常解になっている。さらに、(3.19)のようにおくと、 W_1 と W_4 が実数であるためには

$$4\phi_1 - \phi_4 = s\frac{\pi}{2}, \quad (s = \pm 1), \quad (3.30)$$

つまり,

$$\hat{A}_4 = -isr_4 \exp(4i\phi_1) \quad (3.31)$$

と決まる。(3.19 a), (3.31)を(3.29)に入れると, r_1 と r_4 の満たすべき条件が次のように求まる.

$$(4a_4 - \beta_5)r_1^2 + (4a_5 - \beta_4)r_4^2 = \beta_3 - 4a_3 + s \left(\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4} + 4a_{12}r_1^2 r_4 \right). \quad (3.32)$$

この条件を満たす r_1 と r_4 の関係を図7に示した. この解は, γ_2 が正でその大きさが小さいうちは, $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave (図1) と, $A_1 = O(\epsilon)$, $A_4 = O(\epsilon^2)$ として $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの解 (図6) を重ねたような解になっている. r_2 を大きくすると, 図7(b)(c)のように構造が変わる. $s = -1$ のときの, 図7(b)の右側の解や, (c)の解は, Chen と Saffman による最低次の近似の解析では見出されなかった解である. このような解が, 弱非線形の近似をしないときにも存在するかどうかは, 興味深い問題である. また, $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの combination wave は, 一般に crest に関して対称ではなかったが, $O(\epsilon^4)$ まで考慮すると, 条件(3.30)によって対称な波形しか許されなくなることを注意しておく.

この定常解の安定性を調べるため, (3.6)と(2.19)に代入する. 前と同じ手順で微小擾乱について線形化すると

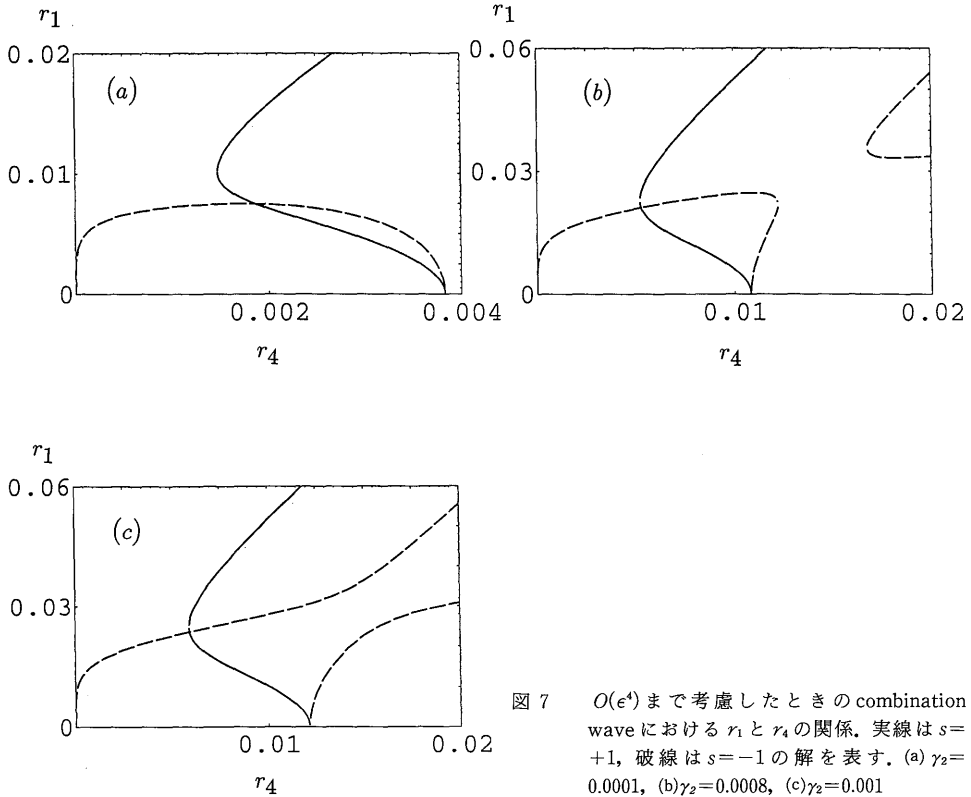


図7 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの combination wave における r_1 と r_4 の関係. 実線は $s = +1$, 破線は $s = -1$ の解を表す. (a) $\gamma_2 = 0.0001$, (b) $\gamma_2 = 0.0008$, (c) $\gamma_2 = 0.001$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^3 a_1}{\partial x^3} + [(\alpha_7 + \alpha_8)r_1^2 + \alpha_9 r_4^2] \frac{\partial a_1}{\partial x} \\ & + (\alpha_{10} + \alpha_{11})r_4^2 \frac{\partial a_4}{\partial x} + s\alpha_{12}r_1^2 r_4 (\theta_4 - 4\theta_1) = 0, \end{aligned} \quad (3.33 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial x^3} + 2\alpha_4 r_1^2 a_1 + 2\alpha_5 r_4^2 a_4 \\ & + [(\alpha_7 - \alpha_8)r_1^2 + \alpha_9 r_4^2] \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \\ & + (-\alpha_{10} + \alpha_{11})r_4^2 \frac{\partial \theta_4}{\partial x} - s\alpha_{12}r_1^2 r_4 (2a_1 + a_4) \\ & + 2\alpha_{13} \left[r_1^2 \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x} \right\} + 4r_4^2 \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial a_4}{\partial x} \right\} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.33 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial a_4}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^2 \theta_4}{\partial x^2} + \beta_6 \frac{\partial^3 a_4}{\partial x^3} + [(\beta_7 + \beta_8)r_4^2 + \beta_9 r_1^2] \frac{\partial a_4}{\partial x} \\ & + (\beta_{10} + \beta_{11})r_1^2 \frac{\partial a_1}{\partial x} - s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4} (4\theta_1 - \theta_4) = 0, \end{aligned} \quad (3.33 \text{ c})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta_4}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \theta_4}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial^2 a_4}{\partial x^2} + \beta_6 \frac{\partial^3 \theta_4}{\partial x^3} + 2\beta_4 r_4^2 a_4 + 2\beta_5 r_1^2 a_1 \\ & + [(\beta_7 - \beta_8)r_4^2 + \beta_9 r_1^2] \frac{\partial \theta_4}{\partial x} \\ & + (-\beta_{10} + \beta_{11})r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4} (4a_1 - a_4) \\ & + 2\beta_{13} \left[r_1^2 \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x} \right\} + 4r_4^2 \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial a_4}{\partial x} \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.33 \text{ d})$$

を得る。前と同様に、擾乱の形を(3.8)のように仮定すると

$$Mx = 0 \quad (3.34)$$

を得る。M の成分を m_{ij} と書くと

$$m_{11} = -i(\Omega_a - \alpha_8 r_1^2 \lambda), \quad (3.35 \text{ a})$$

$$m_{12} = \alpha_2 \lambda^2 - 4s\alpha_{12} r_1^2 r_4, \quad (3.35 \text{ b})$$

$$m_{13} = i(\alpha_{10} + \alpha_{11})r_4^2 \lambda, \quad (3.35 \text{ c})$$

$$m_{14} = s\alpha_{12} r_1^2 r_4, \quad (3.35 \text{ d})$$

$$m_{21} = -\alpha_2 \lambda^2 + 2\alpha_4 r_1^2 - 2s\alpha_{12} r_1^2 r_4 - 2\alpha_{13} r_1^2 \text{sgn}(\lambda) \lambda, \quad (3.35 \text{ e})$$

$$m_{22} = -i(\Omega_a + \alpha_8 r_1^2 \lambda), \quad (3.35 \text{ f})$$

$$m_{23} = 2\alpha_5 r_4^2 - s\alpha_{12} r_1^2 r_4 - 8\alpha_{13} r_4^2 \text{sgn}(\lambda) \lambda, \quad (3.35 \text{ g})$$

$$m_{24} = i(-\alpha_{10} + \alpha_{11})r_4^2 \lambda, \quad (3.35 \text{ h})$$

$$m_{31} = i(\beta_{10} + \beta_{11})r_1^2 \lambda, \quad (3.35 \text{ i})$$

$$m_{32} = -4s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4}, \quad (3.35 \text{ j})$$

$$m_{33} = -i(\Omega_\beta - \beta_8 r_4^2 \lambda), \quad (3.35 \text{ k})$$

$$m_{34} = \beta_2 \lambda^2 + s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4}, \quad (3.35 \text{ l})$$

$$m_{41} = 2\beta_5 r_1^2 + 4s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4} - 2\beta_{13} r_1^2 \text{sgn}(\lambda)\lambda, \quad (3.35 \text{ m})$$

$$m_{42} = i(-\beta_{10} + \beta_{11})r_1^2\lambda, \quad (3.35 \text{ n})$$

$$m_{43} = -\beta_2\lambda^2 + 2\beta_4 r_4^2 - s\beta_{12} \frac{r_1^4}{r_4} - 8\beta_{13} r_1^2 \text{sgn}(\lambda)\lambda, \quad (3.35 \text{ o})$$

$$m_{44} = -i(\Omega_\rho + \beta_8 r_1^2\lambda), \quad (3.35 \text{ p})$$

$$\Omega_\alpha = \Omega - \alpha_1\lambda + \alpha_6\lambda^3 - \alpha_7 r_1^2\lambda - \alpha_9 r_4^2\lambda, \quad (3.35 \text{ q})$$

$$\Omega_\rho = \Omega - \beta_1\lambda + \beta_6\lambda^3 - \beta_7 r_1^2\lambda - \beta_9 r_1^2\lambda \quad (3.35 \text{ r})$$

である。

$\det M = 0$ を解いた結果を、図 8, 9 と表 3, 4 に示した。 r_4 が大きいときは、 $O(\epsilon^3)$ まで考慮した場合と同様に、波数 4 の波に対する変調不安定が見られる (図 8 (g), 図 9 (a)). $s = -1$ の解は、 r_4 が小さくなると、 $r_4 = 0.00175$ までは、成長率が最大になる波数とそのときの成長率が小さくなる (図 8 (e), (f), (g)). このことは、 $O(\epsilon^3)$ まで考慮したときの結果と定性的に同じである。ただし、 $\lambda = 0$ でも不安定になる点は、 $O(\epsilon^3)$ までの結果とは違っている。 r_4 が 0.00175 より小さい解は不安定特性がやや異なる。 r_4 を小さくしたとき、最大成長率を与える波数 λ_m は 0 に近づかない。この点が、 $O(\epsilon^3)$ まででの不安定特性とは異なる。 r_4 を小さくしていくと、成長率は小さくなる。つまり、 $s = -1$ の解の不安定特性は、 $r_4 \rightarrow 0$ のとき、 $A_1 = O(\epsilon)$, $A_4 = O(\epsilon^2)$ とした定常解の小さな λ に対する不安定特性 (安定) に漸近している。

$s = +1$ の解に対しては、2 種類の不安定がおこる。そのうちの一つ (図中実線で示した方) は、擾乱の大きさの比 r が大きいので、波数 4 の波に対する変調不安定と考えられる。この不安定は、 r_1 が大きくなると成長率が小さくなる。残りの一つ (図中破線で示した方) は、combination wave に特有の不安定である。表 4 を見ると、 r_4/r_1 が大きい解では r が小さくなっている。このことは、波数 4 の波が大きい解においては、主に波数 1 の近傍の擾乱が成長することを意味している。逆に、波数 1 の波が大きい解においては、波数 4 の近傍の擾乱の方が波数 1 の近傍の擾乱よりも比較的大きいことがわかる。

4. ま と め

弱非線形の振幅方程式を導出し、それらを用いて、combination (1, 4) wave 及び $A_1 = O(\epsilon)$, $A_4 = O(\epsilon^2)$ とした定常解の安定性を調べた。 $O(\epsilon^3)$ まで考慮すると、4 倍高調波共鳴を記述し得る最低次の方程式が導出できた。このとき、combination wave の不安定特性は、波数 4 の pure wave に対する変調不安定と同様のものであった。 $O(\epsilon^4)$ まで考慮すると、さらに、combination wave 特有の不安定が見つかった。

$A_1 = O(\epsilon)$, $A_4 = O(\epsilon^2)$ とした定常解は小さな λ に対しては安定であった。しかし、 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの $s = +1$ の combination wave は、 A_4 が小さくても不安定であった。したがって、 $s = +1$ の combination wave において A_4 が小さい解を扱うときに、 $A_4 = O(\epsilon^2)$ とおいて $O(\epsilon^4)$ 程度で打ち切ってしまうのは良い近似ではないと考えられる。

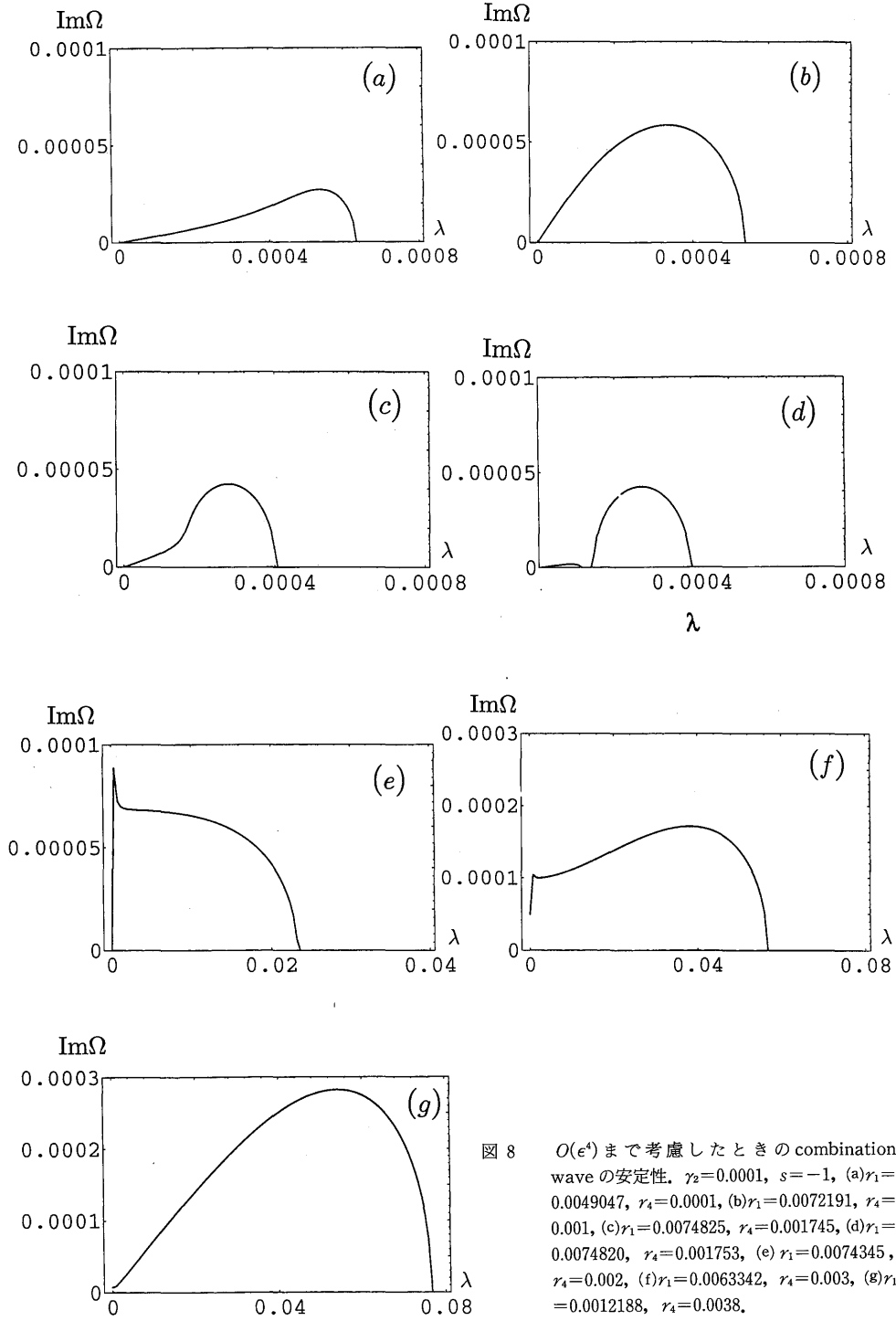


図 8 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの combination wave の安定性. $\gamma_2=0.0001$, $s=-1$, (a) $r_1=0.0049047$, $r_4=0.0001$, (b) $r_1=0.0072191$, $r_4=0.001$, (c) $r_1=0.0074825$, $r_4=0.001745$, (d) $r_1=0.0074820$, $r_4=0.001753$, (e) $r_1=0.0074345$, $r_4=0.002$, (f) $r_1=0.0063342$, $r_4=0.003$, (g) $r_1=0.0012188$, $r_4=0.0038$.

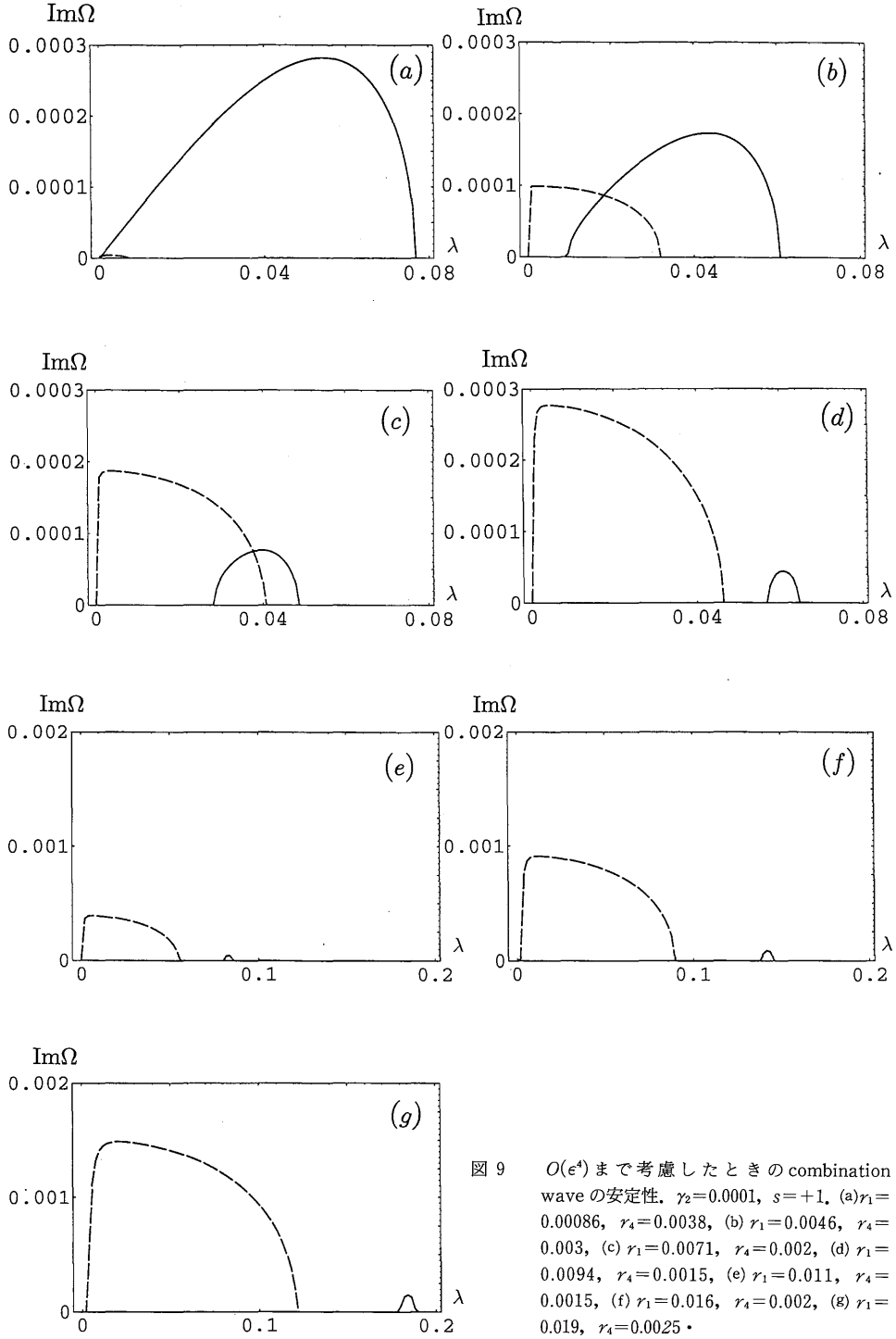


図9 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの combination wave の安定性. $\gamma_2=0.0001$, $s=+1$, (a) $r_1=0.00086$, $r_4=0.0038$, (b) $r_1=0.0046$, $r_4=0.003$, (c) $r_1=0.0071$, $r_4=0.002$, (d) $r_1=0.0094$, $r_4=0.0015$, (e) $r_1=0.011$, $r_4=0.0015$, (f) $r_1=0.016$, $r_4=0.002$, (g) $r_1=0.019$, $r_4=0.0025$.

表3 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの combination wave において、最大成長率を与える波数 λ_m と、 $r = |\bar{a}_4|/|\bar{a}_1|$ の値。 $\gamma_2 = 0.0001$, $s = -1$. (a), (b), ... は、図 8 と対応している。

	γ_1	γ_4	λ_m	r
(a)	0.0049047	0.0001	0.00053	6.2×10
(b)	0.0072191	0.001	0.00034	1.1×10
(c)	0.0074825	0.001745	0.00028	1.7×10
(d)	0.0074820	0.001753	0.00008	5.9×10
(d)	0.0074820	0.001753	0.00027	1.8×10
(e)	0.0074345	0.002	0.00029	8.3
(f)	0.0063342	0.003	0.038	8.1×10^2
(g)	0.0015188	0.0038	0.054	1.5×10^3

表4 $O(\epsilon^4)$ まで考慮したときの combination wave において、最大成長率を与える波数 λ_m と、 $r = |\bar{a}_4|/|\bar{a}_1|$ の値。 $\gamma_2 = 0.0001$, $s = +1$. (a), (b), ... は、図 9 と対応している。

	γ_1	γ_4	λ_m	r
(a)	0.00086	0.0038	0.054	1.5×10^3
(b)	0.0046	0.003	0.002	4.3×10^{-2}
(b)	0.0046	0.003	0.043	1.5×10^3
(c)	0.0071	0.002	0.003	2.9×10^{-1}
(c)	0.0071	0.002	0.0397	1.0×10^3
(d)	0.0094	0.0015	0.005	8.1×10^{-1}
(d)	0.0094	0.0015	0.061	1.3×10^3
(e)	0.011	0.0015	0.006	1.3
(e)	0.011	0.0015	0.083	1.1×10^3
(f)	0.016	0.002	0.01275	1.7
(f)	0.016	0.002	0.1425	7.9×10^2
(g)	0.019	0.0025	0.021	1.6
(g)	0.019	0.0025	0.184	5.4×10^2

combination wave に対する高波数擾乱の不安定 (図 5) は、水の波でおこる現象なのかどうかかわからない。これを確かめるためには、振幅がゆっくり変化するという仮定を取り去って、Zakharov 方程式か、或いは基礎方程式を直接解く必要がある。これは今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) Chen, B. and Saffman, P. G.: *Steady gravity-capillary waves on deep water-I. Weakly nonlinear waves*, Stud. Appl. Math. **60** (1979) 183.
- 2) Ma, Y. -C.: *Weakly nonlinear steady gravity-capillary waves*, Phys. Fluids **25** No. 6 (1982) 945.
- 3) Kato, Y., Oikawa, M. and Okamura, M.: *Direct simulation of unsteady capillary gravity waves on deep water*, J. Phys. Soc. Japan **65** No. 7 (1996) 2060.
- 4) McGoldrick, L. F.: *On the rippling of small waves: a harmonic nonlinear nearly resonant*

interaction, J. Fluid Mech. **52** (1972) 725.

- 5) Zakharov, V. E.: *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **2** (1968) 190.

(平成 8 年 5 月 17 日 受理)

付 1 振幅方程式(2.17), (2.19), (2.24)の係数

式(2.17)の係数は次の通りである.

$$\alpha_1 = \frac{7}{20}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.1 a})$$

$$\alpha_2 = -\frac{11}{400}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.1 b})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5}r_2, \quad (\text{付 1.1 c})$$

$$\alpha_4 = \frac{67}{50}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.1 d})$$

$$\alpha_5 = \frac{52}{25}\sqrt{5}. \quad (\text{付 1.1 e})$$

$$\beta_1 = \frac{13}{20}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.2 a})$$

$$\beta_2 = -\frac{71}{1600}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.2 b})$$

$$\beta_3 = \frac{16}{5}\sqrt{5}r_2, \quad (\text{付 1.2 c})$$

$$\beta_4 = -\frac{1408}{175}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.2 d})$$

$$\beta_5 = \frac{52}{25}\sqrt{5}. \quad (\text{付 1.2 e})$$

式(2.19)の係数は以下の通りである.

$$\alpha_1 = \frac{7}{20}\sqrt{5} + \frac{23}{50}\sqrt{5}r_2, \quad (\text{付 1.3 a})$$

$$\alpha_2 = -\frac{11}{400}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 b})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5}r_2, \quad (\text{付 1.3 c})$$

$$\alpha_4 = \frac{67}{50}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 d})$$

$$\alpha_5 = \frac{52}{25}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 e})$$

$$\alpha_6 = -\frac{123}{4000}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 f})$$

$$\alpha_7 = \frac{1581}{250}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 g})$$

$$\alpha_8 = -\frac{201}{500}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 h})$$

$$\alpha_9 = -\frac{1082}{125}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 i})$$

$$\alpha_{10} = \frac{481}{50}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 j})$$

$$\alpha_{11} = \frac{1047}{250}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.3 k})$$

$$\alpha_{12} = -\frac{1252}{5}, \quad (\text{付 1.3 l})$$

$$\alpha_{13} = \frac{4}{5}\sqrt{5}. \quad (\text{付 1.3 m})$$

$$\beta_1 = \frac{13}{20}\sqrt{5} + \frac{34}{25}\sqrt{5}r_2, \quad (\text{付 1.4 a})$$

$$\beta_2 = -\frac{71}{1600}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 b})$$

$$\beta_3 = \frac{16}{5}\sqrt{5}r_2, \quad (\text{付 1.4 c})$$

$$\beta_4 = -\frac{1408}{175}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 d})$$

$$\beta_5 = \frac{52}{25}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 e})$$

$$\beta_6 = \frac{123}{64000}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 f})$$

$$\beta_7 = -\frac{27168}{6125}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 g})$$

$$\beta_8 = -\frac{528}{875}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 h})$$

$$\beta_9 = -\frac{1319}{250}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 i})$$

$$\beta_{10} = \frac{1679}{50}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 j})$$

$$\beta_{11} = \frac{6387}{250}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.4 k})$$

$$\beta_{12} = \frac{313}{5}, \quad (\text{付 1.4 l})$$

$$\beta_{13} = \frac{16}{5}\sqrt{5}. \quad (\text{付 1.4 m})$$

式(2.24 a)の係数は、(付 1.3)と同じである。式(2.24 b)の係数は、以下の通りである。

$$\beta_1 = \frac{13}{20}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.5 a})$$

$$\beta_2 = -\frac{71}{1600}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.5 b})$$

$$\beta_3 = \frac{16}{5}\sqrt{5}r_2, \quad (\text{付 1.5 c})$$

$$\beta_5 = \frac{52}{25}\sqrt{5}, \quad (\text{付 1.5 d})$$

$$\beta_{12} = \frac{313}{5}. \quad (\text{付 1.5 e})$$