九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

風波成分波間の非線形エネルギー伝達 : 新しく開発した効率的な計算法について

小松, 幸生
九州大学大学院総合理工学研究科 : 博士課程

草場, 忠夫
九州大学応用力学研究所 : 助教授

増田, 章
九州大学応用力学研究所 : 教授

https://doi.org/10.15017/4743972

出版情報：應用力學研究所所報. 75, pp.121-146, 1993-09. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

風波成分波間の非線形エネルギー伝達
——新しく開発した効率的な計算法について——

小松幸生* 草場忠夫† 増田章‡

概　要

欧州を中心としたWAMDIグループ(1988)が新世代の波浪予報モデルを開発し成果をあげている．これは，Hasselmann et al.(1985)が成分波間の相互作用による非線形エネルギー伝達を，近似的にではあるが陽に計算する方法を開発したことに負うところが大きい．しかし，その近似計算法は無数にある4つの共鳴成分波の配置をただ一つの配置で代表させるものであり，波浪スペクトルの形によってはその適用に無理があると思われる．Masuda (1980)の厳密計算の結果によれば，非線形エネルギー伝達はスペクトル形に敏感に依存するからである．

そこで，予報精度の向上をめざすために，仮定や近似をできる限り導入せず，非線形エネルギー伝達を厳密計算に近い形で効率的に計算する方法を新たに開発した．それは，Masuda (1980)の厳密計算法をもとに，共鳴成分波間の相互作用の対称性とそれらの配置の鏡像性を利用して，効率化を図ったものである．同じ波数分解能でMasuda (1980)の厳密計算法と比べると，計算の安定性と精度ではほとんど遜色無く，速度では150倍という高性能を有する．

また，汎用性を吟味するために，この方法をいろいろな形状のスペクトルに適用し，Masuda (1980)の厳密計算法と比較した．その結果によれば，Hasselmann et al. (1985)の近似計算法を用いたときに著しく精度が低下する周波数集中度の大きいスペクトルや双峰性のスペクトルに対しても精度が低下せず優れた汎用性を実証した．

Key words : wind waves, nonlinear energy transfer, resonant wave-wave interactions, wave forecasting model

*九州大学大学院総合理工学研究科博士後期課程1年
†九州大学助教授，応用力学研究所
‡九州大学教授，応用力学研究所

1．はじめに

最近の波浪予報では，波の場を第1近似として各々独立な無数の成分波からなるエネルギースペクトルで表現し，エネルギー平衡方程式を用いてその時間・空間的発展を追跡する方法（スペクトル法）が主流である．この方法では，4波共鳴による非線形相互作用の結果生じる成分波間のエネルギー交換を考慮しなければならない．この問題は，非線形エネルギー伝達関数として Hasselmann (1962)[1]によって最初に定式化され，波浪のスペクトル形の自己安定性と波浪の発達にともなうスペクトルのピーク周波数の変化に対して重要な役割を果たしていることが分かってきた．しかし，非線形エネルギー伝達関数の計算は膨大な時間を要するため，これをそのまま波浪予報モデルに組み込むことは困難である．実際，世界各国の大半で実用化されている波浪予報モデルは，非線形エネルギー伝達の先の効果を考慮に入れ，次のような工夫をしている．つまり，波浪スペクトルの相似性を利用してスペクトル形を規定するパラメータを加味することにより，非線形エネルギー伝達の効果を陰に組み込むのである（パラメータ法）．このようなモデルは，1970年代から1980年代初頭にかけて開発されたもので，第2世代の波浪予報モデルと呼ばれる．ちなみに，第1世代の波浪予報モデルは，1960年代から1970年代初頭にかけて盛んに開発されたもので，非線形エネルギー伝達の効果を直接には考慮しないスペクトル法である．

Masuda (1980)[2]は，Hasselmann (1962) の式を精度良く計算できるように変形し，スペクトルの周波数集中度をいろいろ変えて厳密計算を行い，非線形エネルギー伝達の強度および分布形がスペクトル形に敏感に依存することを明らかにした．さらに，SWAMP (Sea WAve Modeling Project, 1981)[3]は各国の波浪予報モデルを相互比較して，急速に変動する風の場に対して，第1世代および第2世代のモデルの適用に限界があることを示し，その原因の一つが非線形エネルギー伝達の取扱いの不十分さにあることを指摘した．結局，スペクトル形に強く依存する非線形エネルギー伝達の計算を，特定のスペクトル形に関する計算結果を利用して，パラメータ化する方法で行うのは不十分であることが判明したのである．

最近になって，このような問題点を解決するために，欧州の波浪研究者を中心とした WAMDI (WAve Model Development and Implementation) グループ (1988)[4]が，非線形エネルギー伝達を第2世代のモデルより精密に取り扱った第3世代の予報モデル（WAM モデル）を開発し，成果をあげている．これは，電算機能力の向上に加えて，Hasselmann et al. (1985)[5]により非線形エネルギー伝達を近似的にではあるが陽に計算する方法（以後，WAM 法と呼ぶ）が開発されたことに負うところが大きい．しかし，WAM モデルで採用している近似は，非線形エネルギー伝達に関与している無数にある共鳴成分波の配置を，計算時間を短縮するため，ただ一つの配置で代表させるものである．ゆえに，スペクトル形によってはこの近似法の適用に限界があると考えられる．

現在，九州大学応用力学研究所沿岸海象力学部門では，高精度の次世代波浪予報モデルの開発をめざしている．先に述べたように，予報モデルの精度向上には，非線形エネルギー伝達の計算に際して特別な仮定や近似をできる限り導入しない方がよい．すなわち，計算時間が長くなっても，厳密計算に近い形で，非線形エネルギー伝達を求めることが予報精度の向上には不可欠である．しかしながら，計算に膨大な時間を要する厳密計算法もまた実用的でない．従って，ここで採用する方針は，厳密計算に近い

精度と汎用性を有しつつかつ，できるだけ効率的な計算法を新たに開発することである．

本研究では，Masuda (1980) の厳密計算の方法をもとに，共鳴成分波間の相互作用の対称性と共鳴成分波数の配置の鏡像性を利用して，非線形エネルギー伝達を，特別な近似を導入することなく，しかも，効率良く計算できる方法を開発した（以後，この方法を RIAM 法と呼ぶ）．そして，RIAM 法をいろいろなスペクトル形に適用し，Masuda (1980) の厳密計算法による結果や，Hasselmann et al. (1985) の近似計算法（すなわち，WAM 法）による結果と比較して，その精度を調べた．

2．波浪スペクトル予報モデル

2．1　予報モデルの基礎方程式

2．1．1　波浪のエネルギースペクトル表現

波浪は，風と海面下の乱れを伴う偶然外力のもとにあり，エネルギー供給を受ける一方で，砕波によってエネルギーを失っている．このような不規則性に富む現象を，ミクロな立場で力学的に記述するのは難しい．しかし，波浪予報において実際に要求される情報は，波の場をマクロな意味で支配する統計量である．そこで，この複雑な波浪の場を表現するために導入されたのが，エネルギースペクトルの概念である (Phillips, 1960)[6]．これは，統計的定常性と空間一様性を仮定し，水位変動を Fourier 展開することにより，第 1 近似として物理的実体をもつ微小振幅の正弦波（成分波）の重ね合わせとして表現するものである．そして，この表現法は，非線形性がそれほど強くない場合に波浪のマクロな性質をある程度記述できると現在認められている．

この方法を用いると，場所 $\boldsymbol{x}=(x, y)$，時刻 t における水面変位 $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ は，振幅，周期，進行方向を異にする無限に多くの成分波がランダムな位相で重なったものとして，

$$\eta(\boldsymbol{x}, t)=\iiint \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right]dB(\mathbf{k}, \omega) \tag{1}$$

で表される．ここで，$\mathbf{k}$ は波数ベクトル，ω は角周波数（以後，単に周波数と呼ぶ），dB は複素振幅である．

このとき，波浪のパワー E とそのスペクトル $\Phi(\mathbf{k}, \omega)$ は次のような関係にある：

$$\begin{aligned} E\equiv\overline{\eta^2}&=\int\cdots\int\overline{dB(\mathbf{k}', \omega')dB^*(\mathbf{k}'', \omega'')}\exp\left[i\{(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\boldsymbol{x}-(\omega'-\omega'')t\}\right] \\ &=\iiint\Phi(\mathbf{k}, \omega)d\mathbf{k}\,d\omega. \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，$\cdot^*$ を複素共役，$\overline{\cdot}$ を確率平均とし，

$$\frac{\overline{dB(\mathbf{k}', \omega')dB^*(\mathbf{k}'', \omega'')}}{d\mathbf{k}'d\mathbf{k}''d\omega'd\omega''}=\Phi(\mathbf{k}', \omega')\,\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\,\delta(\omega'-\omega'') \tag{3}$$

を用いた．$\delta(\cdot)$ はデルタ関数である．つまり，$\Phi(\mathbf{k}, \omega)$ は，波浪のパワー E のうち，波数ベクトル $\mathbf{k}$，周波数 ω の成分波がもつエネルギー密度を意味する．

また，$\mathbf{k}$ と ω との間には線形分散関係式 $\omega=\hat{\omega}(\mathbf{k})$ が成立すると仮定し，

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega)=\phi(\mathbf{k})\delta(\omega-\hat{\omega}(\mathbf{k})) \tag{4}$$

とおく．深海波の場合には，

$$\tilde{\omega}(\mathbf{k})=\sqrt{gk} \tag{5}$$

となる．ここで，$k=|\mathbf{k}|$であり，進行方向をθとすれば$\mathbf{k}=(k\cos\theta, k\sin\theta)$である．

以後，深海波を対象として議論を進める．スペクトル$\phi(\mathbf{k})$は，周波数—方向スペクトル（2次元スペクトル）$\phi(\omega, \theta)$で表現することが多く，

$$\phi(\omega, \theta)=\phi(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{d\omega\, d\theta} \tag{6}$$

であり，周波数スペクトル（1次元スペクトル）$\psi(\omega)$は，

$$\psi(\omega)=\int_0^{2\pi}\phi(\omega, \theta)d\theta \tag{7}$$

で定義する．

2.1.2 波浪のエネルギー平衡方程式

最近の波浪予報の大半は，波浪をスペクトル$\phi(\omega, \theta; \boldsymbol{x}, t)$で表現し，その時間・空間的な変動を海上風のデータを使って追跡するものである．その変動を支配するのがϕに関する平衡方程式で，波浪が時間・空間的にゆるやかに変化するとき，次式で与えられるとする（Hasselmann et al., 1973）[7]：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{C}_g\cdot\nabla\phi=S_{in}+S_{nl}+S_{ds}. \tag{8}$$

ここで，$\mathbf{C}_g$は成分波の群速度で，$\nabla\equiv(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$である．

(8) において，左辺の第1項はエネルギースペクトルの局所的な時間変化，第2項は移流である．また，右辺はエネルギーの出入りを表したもので，S_{in}は風からのエネルギー入力，S_{nl}は成分波間の非線形相互作用によるエネルギー伝達，そしてS_{ds}は砕波や粘性などによるエネルギー散逸を示す．

2.2 非線形エネルギー伝達

2.2.1 成分波間の非線形相互作用

先に述べたように，波浪をスペクトルで表現する予報モデルでは，波形勾配εが小さい場合に成り立つ第1近似として，波浪を無限に多くの成分波の重ね合わせで表現し，各成分波は線形分散関係を満足しながら各々独立に伝播することを仮定していた（微小振幅波による線形近似）．

しかし，実際の波は有限振幅であり，線形近似では無視されていた高次の非線形項のために，成分波は独立には伝播しない．各成分波は弱いながらも相互作用を通して互いにエネルギーを交換する．つまり，各成分波の振幅は，相互作用によって時間的に変化する．これがいわゆる成分波間の非線形相互作用である．

成分波間の非線形相互作用は，線形解の重ね合わせに対する摂動によって取り扱われる．$O(\varepsilon^2)$においては，一般に，3波共鳴条件を満足する成分波間でエネルギー交換が起こり得る．しかし，水面波の場合，3波共鳴はあり得ないのでエネルギー交換は起こらない．2次のオーダーでは強制波が生じるだけである．

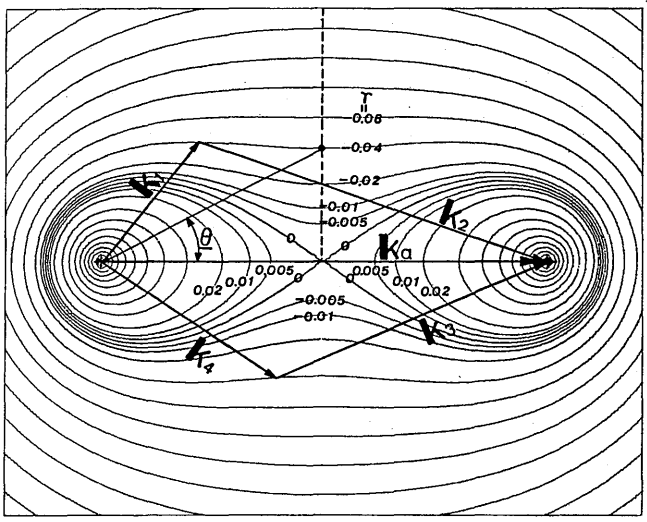

図1　Longuet-Higgins による共鳴相互作用の図．γ は(11)．[Masuda (1980)]

$O(\varepsilon^3)$ においては，位相速度の変化が起こり，また，4波共鳴条件：

$$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_a=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4, \tag{9}$$

$$\omega_1+\omega_2=\omega_a=\omega_3+\omega_4 \tag{10}$$

を満足する成分波間で非線形相互作用が起こる．共鳴する4つの成分波の波数配置を適切に表現するものとして Longuet-Higgins の4波相互作用の図がある(図1参照)．つまり，$\mathbf{k}_3$ と $\mathbf{k}_4$ が決まると，$\mathbf{k}_1$ と $\mathbf{k}_2$ は自由度を一つ残して γ=一定の曲線上に決まる．ただし，

$$\gamma=\frac{|\mathbf{k}_a|}{\omega_a}-\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

である．

2.2.2　非線形エネルギー伝達関数

連続なエネルギースペクトルをもつ波浪においては，4波共鳴条件を満足する成分波の組は無数にある．共鳴相互作用の結果，全体として平衡状態にない限り，ある成分波から他の成分波へのエネルギー伝達が起こる．Hasselmann (1962) は，Boltzmann 積分を用いて，成分波間の非線形相互作用による波浪のエネルギースペクトルの時間発展を記述する方程式を導出した(**付録**参照)．それが，いわゆる非線形エネルギー伝達関数 S_{nl} であり，以下のように表される：

$$S_{nl}(\mathbf{k}_4)=\omega_4\int\cdots\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3\, G(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\,\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)$$
$$\times\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)\{n_1n_2(n_3+n_4)-n_3n_4(n_1+n_2)\}. \tag{12}$$

ここで，$n_j\equiv n(\mathbf{k}_j)\equiv\phi(\mathbf{k}_j)/\omega_j$ ($j=1,\cdots,4$) は $\mathbf{k}_j$ の作用（密度），G は相互作用係数である．なお，

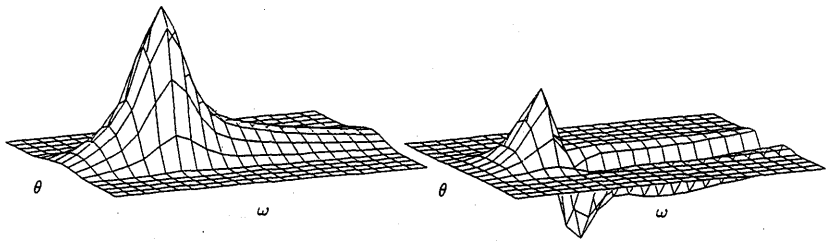

図2　2次元スペクトル $\phi(\omega, \theta)$（周波数スペクトルはJONSWAP型，方向分布は $\cos^2\theta$ 型）の鳥瞰図（**左**）と，それに対する非線形エネルギー伝達関数 $S_{nl}(\omega, \theta)$ の鳥瞰図）（**右**）.

図2に，2次元スペクトル $\phi(\omega, \theta)$（標準形として周波数スペクトルはJONSWAP型，方向分布は $\cos^2\theta$ 型）と，それに対する非線形エネルギー伝達関数 $S_{nl}(\omega, \theta)$ の鳥瞰図を示す．非線形エネルギー伝達の極大値（正）がスペクトルのピーク周波数の少し低周波側にあり，極小値（負）がピーク周波数の少し高周波側にある．この場合，非線形エネルギー伝達の効果は，高周波側からピーク周波数の少し低周波側にエネルギーを輸送し，スペクトルのピークを低周波側に移動させるように働いている．非線形エネルギー伝達がスペクトル形の自己安定性と密接な関係にあることが明瞭である．

3．非線形エネルギー伝達の数値計算法

3．1　Masudaの厳密計算法

Hasselmann (1963a, b)[8)9)]は，Neumannスペクトルに対して，非線形エネルギー伝達の数値計算を初めて実行した．その後，Sell and Hasselmann (1972)[10)]は，JONSWAPスペクトルに対して同様な計算を行い，先に述べたような非線形エネルギー伝達の効果の重要性を明らかにした．しかし，このHasselmannのモデルは，膨大な計算時間を要する上に，数値的な不安定のため精度が悪いという欠点をもっていた．これを解消するため，Longuet-Higgins (1976)[11)]は，狭帯域スペクトルの仮定のもとに，複雑な非線形相互作用係数を一定とし，かつ共鳴条件も簡単化したものに置き換えることにより，Hasselmannのモデルに比べて計算が非常に容易で，数値的に安定なモデルを開発した．Fox (1976)[12)]はこのLonguet-Higginsのモデルを用いて，JONSWAPスペクトルに対する非線形エネルギー伝達の計算を行い，Sell and Hasselmann (1972)と非常に異なる結果を得た．

このような状況下にあって，Masuda (1980)は両モデルを比較し，以下の点を指摘した．まず，Hasselmannのモデルは数値不安定による精度の悪さゆえに結果の信頼度に欠ける．一方，Longuet-Higginsのモデルで採用している狭帯域スペクトルの仮定は，広い周波数分布をもつスペクトル形に対して原理的に適用できない．さらに，Fox (1976)の結果は多くの実験結果と大きく食い違う．結局Masuda (1980)は，両モデルでは非線形エネルギー伝達に関する十分な理解を望めないとして，特別な仮定や近似を導入することなく非線形エネルギー伝達関数を精度良く計算できる新しい方法を開発した．

以後，水の密度 ρ_w，重力加速度 g，ピーク周波数 ω_m を1とする無次元化を施す．このとき，$k_j = |\mathbf{k}_j|$ とすると分散関係は $\omega_j = \sqrt{k_j}$ となる．

まず，$\mathbf{k}_1$ および $\mathbf{k}_2$ に関する対称性を利用して，$k_1 \leq k_2$，（あるいは $\omega_1 \leq \omega_2$）の条件のもとに，非線形エネルギー伝達関数(12)を $\mathbf{k}_2$ について積分する．このとき，$\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_1$，かつ $\omega_2=|\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_1|^{1/2}$ である．また，実際の予報モデルでは非線形エネルギー伝達関数を $S_{nl}(\mathbf{k})$ よりむしろ $S_{nl}(\omega, \theta)$ で表現する場合が多いことを考慮すると，結局(12)は次のように書き換えられる：

$$S_{nl}(\omega_4, \theta_4)=2\omega_4^4 \iint d\omega_3 d\theta_3 \iint d\omega_1 d\theta_1 (8\omega_1^3\omega_3^3 G) \times \delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)\{n_1 n_2(n_3+n_4)-n_3 n_4(n_1+n_2)\}. \tag{13}$$

ただし，$d\mathbf{k}=2\omega^3 d\omega\, d\theta$ の関係を用いた．

前に述べたように，4波共鳴条件のもとでは，$\mathbf{k}_3$ と $\mathbf{k}_4$ が決まれば，$\mathbf{k}_1$ と $\mathbf{k}_2$ が自由度を一つ残して決まる．この残った自由度を表現するパラメータとして，$\theta_1-\theta_a$ を採用する．すると，次の3次の代数方程式を解くことによって ω_1 を得る：

$$4\omega_a\omega_1^3-\{2k_a\cos(\theta_1-\theta_a)+6\omega_a^2\}\omega_1^2+4\omega_a^3\omega_1+(k_a^2-\omega_a^4)=0. \tag{14}$$

このとき，条件 $k_1 \leq k_2$ により，ω_1 は一意に決まり，$\gamma<0$ に対して $\theta_1-\theta_a$ の領域も次のように制限される（図1参照）：

$$\vartheta \leq |\theta_1-\theta_a| \leq \pi. \tag{15}$$

ここで，

$$\vartheta=\arccos(2k_a/\omega_a^2) \tag{16}$$

である．

そして，(13)を ω_1 について積分し，変数変換

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\theta}_1=\theta_1-\theta_a,\ \tilde{\omega}_1=\omega_1/\omega_4,\\ &\tilde{\theta}_2=\theta_2-\theta_a,\ \tilde{\omega}_2=\omega_2/\omega_4,\\ &\tilde{\theta}_3=\theta_3-\theta_4,\ \tilde{\omega}_3=\omega_3/\omega_4,\\ &\tilde{\mathbf{k}}_a=\mathbf{k}_a/\omega_4^2,\ \tilde{\Omega}=\ln\tilde{\omega}_3,\\ &\tilde{G}=G/\omega_4^{12} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

を施すと，$S_{nl}(\omega_4, \theta_4)$ は最終的に次のようになる：

$$S_{nl}(\omega_4, \theta_4)=2\omega_4^{23}\int_0^{\pi} d\tilde{\theta}_3 \int_0^{\infty} d\tilde{\Omega} \int_0^{\pi} d\tilde{\theta}_1 \sum_{\pm}\sum_{\pm}\sum_{\pm}(8\tilde{\omega}_1^3\tilde{\omega}_3^4\tilde{G}\tilde{S}^{-1}) \times\{n_1 n_2(n_3+n_4)-n_3 n_4(n_1+n_2)\}. \tag{18}$$

ここで，

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{\theta}_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{\theta}_1$$

は次のように置き換えられている：

$$\int_0^{\pi} d\tilde{\theta}_3 \int_0^{\infty} d\tilde{\Omega} \int_0^{\pi} d\tilde{\theta}_1 \times \sum_{\pm}\sum_{\pm}\sum_{\pm}.$$

(18)の積分領域の概略図を図3に示す．ただし，条件 $k_1 \leq k_2$ によって，3平面 $\tilde{\theta}_3=\pi$，$\tilde{\Omega}=0$，$\tilde{\theta}_1=0$ と曲面 $\tilde{\theta}_1=\vartheta(\tilde{\theta}_3, \tilde{\Omega})$ によって囲まれた左下部の領域は除外される．

さて分母 $\tilde{S}$ は，$\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)$ により生じたもので，次のように与えられる：

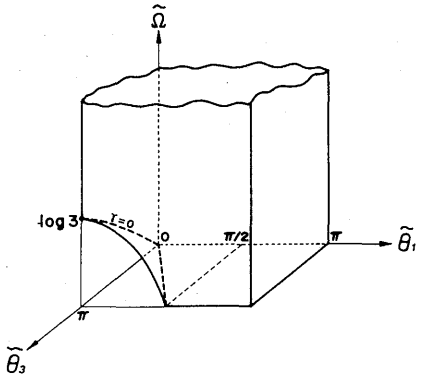

図 3　(18) の積分領域の概略図．左下部の領域は $k_1 \leq k_2$ の条件により除外される．特異点は平面 $\tilde{\theta}_1=0$ 上の曲線 $\gamma=0$（図 1 参照）に沿って位置する．[Masuda (1980)]

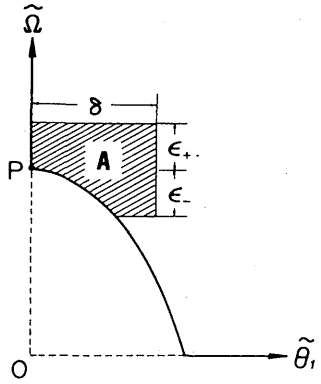

図 4　図 3 の矩形柱の断面図（$\tilde{\theta}_3$=一定）．点 P が特異点．[Masuda (1980)]

$$\tilde{S}=\left|1\pm\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\left\{1-\left(\frac{|\tilde{\mathbf{k}}_a|^2}{\tilde{\omega}_2^4}\right)\sin^2\tilde{\theta}_1\right\}^{1/2}\right|. \tag{19}$$

ただし，$\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2$ かつ $\tilde{\theta}_1=0$ のとき，$\tilde{S}=0$ になる．すなわち，特異点は平面 $\tilde{\theta}_1=0$ 上の曲線 $\gamma=0$ に沿って位置する（図 3 参照）．数値不安定を防ぐために，特異点付近の積分は以下のように行う．

(18) の 3 重積分は $\tilde{\theta}_1$，$\tilde{\Omega}$，$\tilde{\theta}_3$ の順序で行うので，まず $\tilde{\theta}_3$=一定の平面において，特異点周辺の微小領域 A を考える（図 4 参照）．ただし，特異点 P での $\tilde{\Omega}$ を $\tilde{\Omega}_P$ と表して，領域 A を，$\vartheta \leq \tilde{\theta}_1 \leq \delta$ および $-\epsilon_- \leq \tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}_P \leq \epsilon_+$ で定義する．$\tilde{R}=8\tilde{\omega}_1^3\tilde{\omega}_3^4\tilde{G}\{n_1n_2(n_3+n_4)-n_3n_4(n_1+n_2)\}$ とし，特異点での $\tilde{R}$ を $\tilde{R}_P$ で表すと，領域 A に関する積分は次のように近似できる：

$$\iint_A d\tilde{\Omega}\, d\tilde{\theta}_1 \frac{\tilde{R}}{\tilde{S}} \approx \tilde{R}_P \iint_A d\tilde{\Omega}\, d\tilde{\theta}_1 \frac{1}{\tilde{S}_P}. \tag{20}$$

ここで，$\mu \equiv (\partial\gamma/\partial\tilde{\Omega})_P$ として，

$$\tilde{S}_P=\sqrt{2\tilde{\theta}_1^2+8\sqrt{2}\mu(\tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}_P)} \tag{21}$$

である．結局，(20) の右辺の積分は次のように簡単に得られる：

$$\begin{aligned}\iint_A d\tilde{\Omega}\, d\tilde{\theta}_1 \frac{1}{\tilde{S}_P} &= \frac{\epsilon_+}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}\delta+\sqrt{2\delta^2+8\sqrt{2}\mu\epsilon_+}}{\sqrt{8\sqrt{2}\mu\epsilon_+}}+\delta\frac{\sqrt{2}\delta+\sqrt{2\delta^2+8\sqrt{2}\mu\epsilon_+}}{8\sqrt{2}\mu}\\ &\quad+\frac{\epsilon_-}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}\delta+\sqrt{2\delta^2-8\sqrt{2}\mu\epsilon_-}}{\sqrt{8\sqrt{2}\mu\epsilon_-}}+\delta\frac{\sqrt{2}\delta+\sqrt{2\delta^2-8\sqrt{2}\mu\epsilon_-}}{8\sqrt{2}\mu}.\end{aligned} \tag{22}$$

ただし，$2\delta^2 \leq 8\sqrt{2}\mu\epsilon_-$ のときは，$\sqrt{2\delta^2-8\sqrt{2}\mu\epsilon_-}=0$ とする．

しかし，上の議論は，$\mu=0$，すなわち原点 $\tilde{\theta}_3=\tilde{\Omega}=\tilde{\theta}_1=0$ 付近では成立しない．原点付近においては，$\tilde{S}$ は次のように近似できる：

$$\tilde{S} \approx \sqrt{2\tilde{\theta}_1^2+\tilde{\Omega}^2-\tilde{\theta}_3^2/2}. \tag{23}$$

従って，$0 \leq \sqrt{2}\,\tilde{\theta}_1, \tilde{\Omega}, \tilde{\theta}_3/\sqrt{2} \leq \epsilon$ で定義される原点付近の微小体積Bに関しては，(18) の近似式として，

$$\iiint_B d\tilde{\theta}_3\, d\tilde{\Omega}\, d\tilde{\theta}_1 \frac{\tilde{R}}{\tilde{S}} \approx \left[\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{\theta}_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{\Omega}}\right)_0\right\} C_x + \sqrt{2}\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{\theta}_3}\right)_0 C_z\right]\epsilon^3 \tag{24}$$

を得る．ここで，

$$C_x = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\ln 2 \approx 1.421315, \tag{25}$$

$$C_z = \frac{5}{12}\{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\} \approx 0.956495 \tag{26}$$

であり，添字 0 は原点での値を示す．

(18) のように，着目している波数 $\mathbf{k}_4$（すなわち ω_4, θ_4）に相対的な表現にすると，$\tilde{G}$, $\tilde{S}$, $\tilde{\omega}_1$, $\cdots$ は $\tilde{\theta}_3$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\theta}_1$ だけについての関数となる．従って，これらの積分パラメータは着目する波数 $\mathbf{k}_4$（すなわち ω_4, θ_4）とは関係なく一回だけ計算すればよく，計算時間の節約にもつながる．また，積分とは独立に計算できるので，被積分関数についての詳細な解析も可能となる．

3．2　WAM モデルにおける近似計算法

Masuda (1980) の精密な計算によって，非線形エネルギー伝達の強度および分布形は，スペクトル形に敏感に依存することが明らかになり，第 2 世代の予報モデルが採用しているパラメータ法では，非線形エネルギー伝達の効果を十分に再現できないことが分かってきた．そして，最近になって，欧州の波浪研究者を中心とした WAMDI グループ (1988) が，非線形エネルギー伝達を陽に扱う第 3 世代の予報モデル（WAM モデル）を開発し，成果をあげている．

WAM モデルは非線形エネルギー伝達の計算に，Hasselmann et al. (1985) による離散相互作用 (discrete interaction) 近似を用いている．それは，計算時間を短縮するために，連続的に無数にある 4 つの共鳴成分波の配置をただ一つの配置で代表させるものである．Hasselmann et al. (1985) は，非線形エネルギー伝達の原理的な特性は，相互作用の中心点（図 1 において「8 の字」が交わった点）近傍の 4 波による相互作用で再現できるとして，4 波を中心点付近に離散的に配置してそれらの相互作用による非線形エネルギー伝達を調べた．そして，4 波が

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega,\\
&\omega_3 = \omega(1+\lambda) = \omega_+,\\
&\omega_4 = \omega(1-\lambda) = \omega_-,\\
&\theta_1 = \theta_2 = \theta,\\
&\theta_3 - \theta = \pm 11.5^\circ,\ \theta_4 - \theta = \mp 33.6^\circ,\\
&\lambda = 0.25
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

のような配置にあるときに厳密な計算とよく一致すると述べている．しかし，この点については問題があり，後で触れる．この条件のもとでは，(12) は次のように簡単な形になる：

$$\begin{Bmatrix} \delta S_{nl} \\ \delta S_{nl}^{+} \\ \delta S_{nl}^{-} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2(\Delta\omega\Delta\theta)/(\Delta\omega\Delta\theta) \\ (1+\lambda)(\Delta\omega\Delta\theta)/(\Delta\omega^{+}\Delta\theta) \\ (1-\lambda)(\Delta\omega\Delta\theta)/(\Delta\omega^{-}\Delta\theta) \end{Bmatrix}$$

$$\times C_o\omega^{11}g^{-4}\left[\phi^2\left\{\frac{\phi_+}{(1+\lambda)^4}+\frac{\phi_-}{(1-\lambda)^4}\right\}-2\frac{\phi\phi_+\phi_-}{(1-\lambda^2)^4}\right]. \tag{28}$$

ここで，周波数 ω，ω^+，ω^- についての周波数格子幅を $\Delta\omega$，$\Delta\omega^+$，$\Delta\omega^-$ とし，2次元スペクトルを ϕ，ϕ_+，ϕ_- とする．そして，非線形エネルギー伝達の単位時間あたりの変化量を δS_{nl}，δS_{nl}^+，δS_{nl}^- とする．また，$\Delta\theta$ は波向の格子幅であり，係数 C_o はこの近似計算による結果が厳密計算による結果と合うように調節した無次元定数である．(28) の左辺をすべての周波数および波向について加え合わせると正味の S_{nl} を得る．ただし，本研究では one-sided スペクトルと（角）周波数 ω を採用しているのに対して，Hasselmann et al. (1985) では two-sided スペクトルと周波数 $f=\omega/2\pi$ を採用している．そして，C_o に対応する定数として $C=3\times10^7$（$C_o\approx0.4914$ に相当）を提案している．しかし，定数 C としてその値を選んだ理由が曖昧であるし，比較対象の Hasselmann and Hasselmann（1981）の厳密計算の結果も後で述べるように精度が良くないので，定数 C には不定要素がある．

3.3 新しい計算法

Masuda (1980) の計算法はあくまで特定のスペクトルに対して理論計算を行うために開発されたものであり，波数分解能を上げればそれだけ計算精度は良くなる．本論文で厳密計算法と呼んでいるのはこの理由からである．この方法では一つのスペクトルに対してさえ多大な計算時間を要するので，これを直接予報モデルに組み込むことはできない．一方，WAM モデルで用いている近似計算法は，無数にある4つの共鳴成分波の配置をただ一つの配置で代表させるものであり，しかも，その代表している4波は波数空間上で互いに近くにある4波である．ゆえに，この近似法はスペクトル形によっては（例えば，周波数および波向について集中したスペクトルや双峰性のスペクトルなど）その適用に限界があると予想される．

従って，予報精度の向上をめざす上では特別な仮定や近似を導入せず，非線形エネルギー伝達を厳密計算に近い形で効率的に求める必要があると判断し，高精度な Masuda（1980）の厳密計算法をもとに，4波相互作用の対称性を利用して，非線形エネルギー伝達を非常に効率良く計算する方法を新たに開発した．

3.1.1 4波相互作用の対称性

非線形エネルギー伝達関数 (12) を次のように書きなおす：

$$\frac{\partial n_4}{\partial t}=\int\cdots\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3\, G(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)$$

$$\times\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)\{n_1n_2(n_3+n_4)-n_3n_4(n_1+n_2)\}. \tag{29}$$

これは，δ 関数で表現した共鳴条件を満足する4波の波数成分 $\mathbf{k}_1$，$\mathbf{k}_2$，$\mathbf{k}_3$，$\mathbf{k}_4$ の相互作用により，$\mathbf{k}_4$ に

おける作用 n_4 の変化量を記述するものである．この方法は，相互作用を考慮する際に $\mathbf{k}_4$ を選び出している点で対称ではない．しかし，相互作用係数は成分波の組み合わせに関して対称であるし，相互作用している各成分波の作用の変化量は同じであるから(もちろん符号の違いはあるが)，この相互作用は完全に対称である．

Hasselmann and Hasselmann (1981)[13]は，波と粒子との類似性から，4波による共鳴相互作用を4つの粒子の衝突過程に見立てて，それを以下のように説明している．4粒子の衝突の確率は，4つの波数成分からなる8次元の波数空間 $d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4$ における確率密度で表現でき，次のように与えられる：

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}: n_1 n_2 n_3 \\ \text{(ii)}: n_1 n_2 n_4 \\ \text{(iii)}: n_2 n_3 n_4 \\ \text{(iv)}: n_1 n_3 n_4\end{array}\right\} \frac{\rho}{4} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4. \tag{30}$$

ここで，

$$\rho = G\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4) \tag{31}$$

である．各々の衝突では，2つの粒子および1つの反粒子が入射して消滅し，1つの粒子が生成されて放射される(図5参照)．ただし，反粒子は負のエネルギー，運動量，作用をもつ．また，反粒子の消滅は粒子の生成と同等である．この法則を適用して4つの衝突過程を足し合わせると，単位時間あたりの粒子作用の変化量 Δn を得る．衝突に際して各粒子が受ける作用の変化量 $\Delta n_j\,(j=1,\cdots,4)$ は，符号の違いを除けば，すべて等しい．

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta n_1 \\ \Delta n_2 \\ \Delta n_3 \\ \Delta n_4\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}-1 \\ -1 \\ +1 \\ +1\end{array}\right\} \cdot dW \tag{32}$$

ここで，

$$dW = \frac{\rho}{4}\{n_1 n_2(n_3+n_4) - n_3 n_4(n_1+n_2)\} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \tag{33}$$

である．また，この表現を用いると，計算の過程で，エネルギー，運動量，作用が自動的に保存される．

3．3．2 アルゴリズム

新しい計算法は，この相互作用の対称性を Masuda (1980) の厳密計算法に適用するものである．つまり，相互作用は完全に対称であるから，共鳴条件を満足する4波の配置を決めると，n_4 の変化量を計算する際に同時に得られる n_1，n_2，n_3 の変化量をそれぞれに対応する波数成分の領域（**ビン** (bin) と呼ばれる）に記憶しておけば，4波を組み替えただけの同じ配置については計算する必要がない．つまり，その分計算の手間が省ける．計算は具体的に，以下の手順で行う．なお，波数成分 $\mathbf{k}_1$，$\mathbf{k}_2$，$\mathbf{k}_3$，$\mathbf{k}_4$ を有する4つの共鳴成分波を便宜上それぞれ波1，波2，波3，波4と呼ぶ．また，今までのように波

4に着目して，波1と波2を共鳴対とし，波3と波4をもう一つの共鳴対とする．

[補助計算](一回だけ計算すればよくデータを記憶しておく)

1．環境設定

一時ファイル，結果出力ファイルの設定など．

2．計算に必要なパラメータの設定

(a) 周波数および波向の格子数と格子幅の設定

このとき，波向 θ の格子は等間隔に配置するが，周波数 ω の格子は予報する最小周波数 $\omega_{\min}$ から最大周波数（切断周波数）$\omega_{\max}$ まで対数的に配置する．これによって計算時間をかなり省くことができる．つまり，このようにすると，主計算の際に，波1，波2，波3の周波数格子の番号 $I_j\,(j=1,2,3)$ は，波4に相対的な周波数格子の番号 $\tilde{I}_j$ を波4の周波数格子分だけずらせば決まる．ここで，周波数および波向の格子数をそれぞれ L，N とすると，それぞれの格子幅は次のようになる：

$$\Delta\ln\omega=\ln(\omega_{\max}/\omega_{\min})/L,\quad \Delta\theta=2\pi/N. \tag{34}$$

ここで，本研究では $\omega_{\max}/\omega_{\min}=4.42\sim4.66$ とした．

(b) 特異点の計算に必要な定数などの設定

特異点周辺の微小領域 A の $\tilde{\theta}_1$ についての領域幅 δ を

$$\delta=1.5\times\Delta\theta \tag{35}$$

とする（図4参照）．

3．特異点付近の核関数の計算

パラメータを $\tilde{\theta}_3$ とする．このとき，鏡像を利用するために，

$$0\leq\tilde{\theta}_3\leq\pi \tag{36}$$

とする．従って，$\tilde{\theta}_3$ の格子数は $[N/2]+1$ である．ただし，[・] は実数・を越えない整数(Gaussの記号)．この1次のloopを回して以下の演算を行う．

(a) 相互作用の対称性より，波1～波4の周波数を次のような大小関係にする：

$$\tilde{\omega}_3\leq\tilde{\omega}_1\leq\tilde{\omega}_2\leq1(=\omega_4/\omega_4). \tag{37}$$

また，周波数が互いに遠く離れた共鳴成分波間の相互作用は小さいので，最大周波数と最小周波数との比 ω_4/ω_3 が3以上となる（つまり，$\tilde{\omega}_3<1/3$ の）配置からの寄与分は無視する（正則点

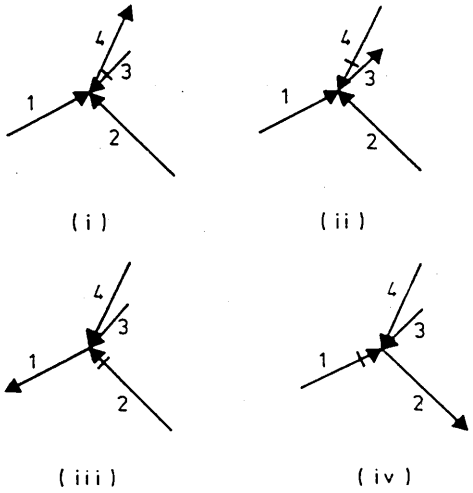

図5 Hasselmann and Hasselmann (1981) による粒子衝突の概念図．⟶に横棒が入ったものは反粒子を表す．[Hsselmann and Hasselmann (1981)]

上の計算も)．これによって計算時間はさらに短縮できる．これについては後に触れる．

(b) 上の条件を満足させながら $\gamma=0$ となるような $\tilde{\omega}_3$ を求める（$\tilde{\Omega}_P=\ln\ \tilde{\omega}_3$).

(c) 共鳴条件より $\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2=\tilde{\omega}_a/2$，また，$\tilde{\theta}_1=\tilde{\theta}_2=0$.

(d) (11)より

$$\mu=\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\tilde{\Omega}}\right)_P=\frac{\tilde{\omega}_3}{\sqrt{2}\tilde{\omega}_a^4}\{4\tilde{\omega}_3(\tilde{\omega}_3^2+\cos\ \tilde{\theta}_3)-\tilde{\omega}_a^3\} \tag{38}$$

を求める．

(e) $\Delta\Omega\equiv\Delta\ln\omega$ として $\hat{\Omega}_P\equiv|\tilde{\Omega}_P/\Delta\Omega|-[|\tilde{\Omega}_P/\Delta\Omega|]$ を求め，$\hat{\Omega}_P<0.5$なら，微小領域Aの $\tilde{\Omega}$ についての領域幅を，

$$\epsilon_+=(0.5-\hat{\Omega}_P)\times\Delta\Omega,\quad \epsilon_-=(\hat{\Omega}_P+0.5)\times\Delta\Omega \tag{39}$$

に設定する（図4参照)．ただし，$\hat{\Omega}_P\geq0.5$なら特異点として扱わない．

(f) (22)より核関数 $\tilde{P}=8\tilde{\omega}_1^3\tilde{\omega}_3^4\tilde{G}\iint_A d\tilde{\Omega}d\tilde{\theta}_1(1/\tilde{S}_P)$ を求める．

(g) 波4に相対的な波1，波2，波3の波数成分の格子番号（$\tilde{I}_j$，$\tilde{J}_j$）を求め（鏡像も含めて)，核関数 $\tilde{P}$ とともに，これらと4波による可能な配置との対応付けをしておく．なお，原点 $\tilde{\theta}_3=\tilde{\Omega}=\tilde{\theta}_1=0$ 付近の特異点からの寄与分は，共鳴4波が同一の波数成分を扱うこの計算法では相殺されるので計算する必要がない．

4．正則点上の核関数の計算

パラメータを $\tilde{\theta}_3$，$\tilde{\omega}_3$，$\tilde{\theta}_1$ とする．このとき，鏡像を利用するために，

$$0\leq\tilde{\theta}_3\leq\pi,\quad 0\leq\tilde{\theta}_1\leq\pi \tag{40}$$

とする．先と同様に，$\tilde{\theta}_3$ および $\tilde{\theta}_1$ の格子数は $[N/2]+1$ である．これにより，記憶すべき配置の数は1/4に減る．この3次のloopを回して以下の演算を行う．

(a) (37)を満足させながら(14)より $\tilde{\omega}_1$ を求め，共鳴条件を利用して $\tilde{\omega}_2$，$\tilde{\theta}_2$ を求める．

(b) 核関数 $\tilde{K}(=8\tilde{\omega}_1^3\tilde{\omega}_3^4\tilde{G}\tilde{S}^{-1})$ を求める．

(c) 波4に相対的な波1，波2，波3の波数成分の格子番号（$\tilde{I}_j$, $\tilde{J}_j$）；$j=1,2,3$ を求め（鏡像も含めて)，核関数 $\tilde{K}$ とともに，これらと4波による可能な配置との対応付けをしておく．

なお，扱う配置の数は正則点と特異点を合わせて，波数分解能 $L\times N=24\times36$ で**1552**個，波数分解能 $L\times N=36\times48$ で**2172**個である（ただし，鏡像を含めると配置の数は上記の4倍)．

[主計算]（2次元スペクトルを読み込み非線形エネルギー伝達を計算する）

まず，スペクトルデータ $\phi(I,J)$ を読みとり，作用 $n=\phi(I,\ J)/2\omega^4$ を求める．そして，波4の配列（I_4, J_4）と配置とによる3次のloopを回して以下の演算を行う．

1．波1，波2，波3の周波数および波向の格子番号（I_j, J_j）；$j=1,2,3$ を，

$$I_j=\tilde{I}_j+I_4,\quad J_j=\tilde{J}_j+J_4 \tag{41}$$

により決める．

2．作用 $n(I, J)$ を読みとり，各波の波数成分に対する作用 n_j $(j=1, \cdots, 4)$ を

$$n_j = n(I_j, J_j) \tag{42}$$

より求め，正則点上の被積分関数，

$$2\omega_4^{23}\tilde{K}\{n_1 n_2(n_3+n_4) - n_3 n_4(n_1+n_2)\} \tag{43}$$

そして，特異点付近の被積分関数，

$$2\omega_4^{23}\tilde{P}\{n_1 n_2(n_3+n_4) - n_3 n_4(n_1+n_2)\} \tag{44}$$

を計算し，作用の変化量 Δn_j をそれぞれに対応する波数成分（I_j, J_j）にそのつど記憶する．

ただし，高周波側では，切断周波数より高周波側の成分波とのエネルギー交換を考慮しなくてはならないので，$\omega > \omega_{\max}$ の2次元スペクトルは ω^{-4} に比例すると仮定して，WAM モデルと同じく，

$$\phi(\omega, \theta) = \phi(\omega_{\max}, \theta)\left(\frac{\omega}{\omega_{\max}}\right)^{-4} \tag{45}$$

と外挿する．

3．最終的な Δn が対応する波数成分における正味の非線形エネルギー伝達を示す．

4．計算結果と考察

ここでは，まず，2次元スペクトルを

$$\phi(\omega, \theta) = \psi(\omega) D(\theta; s) \tag{46}$$

とし，方向分布関数 $D(\theta; s)$ として $\cos^s\theta$ 型を仮定する．すなわち，

$$D(\theta; s) = \begin{cases} \hat{D}(s)\cos^s\theta, & 0 \leq |\theta| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\theta| \leq \pi \end{cases} \tag{47}$$

である．ただし，スペクトルの主方向は0度で，

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} D(\theta; s) d\theta = 1 \tag{48}$$

とする．$\hat{D}(s)$ は規格化定数で，$\Gamma(\cdot)$ をガンマ関数とすると，

$$\hat{D}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \tag{49}$$

である．また，周波数スペクトル $\psi(\omega)$ としては，標準形である Pierson-Moskowitz（以下 PM）スペクトル（$\gamma=1.0$）と JONSWAP スペクトル（$\gamma=3.3$）を与え，かつそれぞれ $\psi(\omega_m)=1$ となるように規格化する．ゆえに，結果は無次元量であり，次元をもたせるには $\psi(\omega_m)^3\omega_m^{11}g^{-4}$ を結果に掛ければよい．ここで，γ は周波数スペクトルの標準形 $\psi_{st}(\omega; \gamma)$ の形状パラメータの一つで，集中度パラメータと呼ばれる：

$$\psi_{st}(\omega; \gamma) \sim \omega^{-5}\exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^{-4}\right]\gamma^{\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_m)^2}{2\sigma^2\omega_m^2}\right]}. \tag{50}$$

ただし，

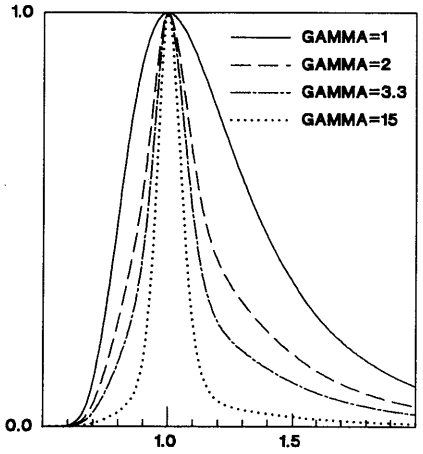

図 6　集中度パラメータ γ (GAMMA) = 1, 2, 3.3, 15に対する周波数スペクトルの標準形 $\psi_{st}(\omega;\gamma)$. 横軸はピーク周波数に相対的な周波数 ω.

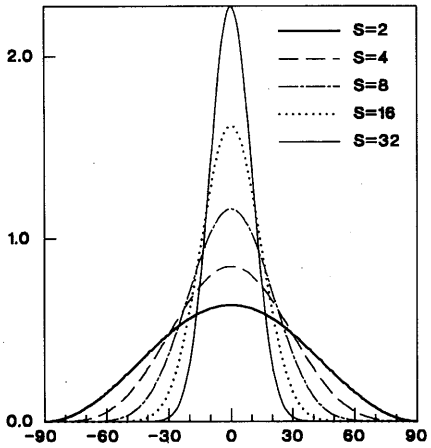

図 7　$s=2$, 4, 8, 16, 32に対する方向分布関数 $D(\theta;s)$. 横軸は波向 θ(°).

$$\sigma=\begin{cases}0.07, & \omega\leq\omega_m\\ 0.09, & \omega>\omega_m\end{cases} \tag{51}$$

である. 図 6 に周波数スペクトルの標準形 $\psi_{st}(\omega;\gamma)$ を, 図 7 に方向分布関数 $D(\theta;s)$ を示す.

次に, 非線形エネルギー伝達の計算結果の 1 次元表示を $T_1(\omega)$ として, 2 次元表示を $T_2(\omega,\theta)$ とする:

$$T_1(\omega)=\int_{-\pi}^{+\pi}S_{nl}(\omega,\theta)d\theta, \tag{52}$$

$$T_2(\omega,\theta)=S_{nl}(\omega,\theta). \tag{53}$$

また, 実際の計算では (18) のように (ω_4,θ_4) に着目しているので, (ω_4,θ_4) に相対的に ω および θ を次のように定義しなおす:

$$\omega=\omega_4/\omega_m,\quad \theta=\theta_4-\theta_m. \tag{54}$$

ここで, θ_m はスペクトルの主方向である.

4.1　波数分解能依存性

RIAM 法の波数分解能依存性を調べた. 図 8 (左), 図 9 (左) にそれぞれ方向分布を $\cos^2\theta$ 型とし, 周波数スペクトルとして PM 型と JONSWAP 型を与え, 波数分解能 $L\times N=24\times36$ で計算した非線形エネルギー伝達 $T_1(\omega)$ を, 特異点からの寄与分を無視したものとあわせて, Masuda の方法による結果と比較して示す. 同様に, 図 8 (右), 図 9 (右) は, $L\times N=36\times48$ の結果である. また, 図10に $L\times N=36\times48$ で計算した $T_2(\omega,\theta)$ を示す. ここで, 図 8, 9 は, それぞれ, 図の縦枠の寸法が異なることに注

意されたい．以後の図もそうであるが，$T_1(\omega)$ を描いた図の縦枠の寸法は，$T_1(\omega)$ の最大値と最小値との差に依存する．

波数分解能 $L\times N=24\times 36$ でも，厳密計算の結果とかなり一致している．しかし，波数分解能をこれ以上粗くすると，厳密計算とのズレが大きくなる．逆に，波数分解能を細かくすればするほど当然精度は良く，厳密計算に近づく．

また，特異点処理をしないと精度が悪くなる．波数分解能が粗いほど特異点からの寄与分は大きい．従って，現実の予報モデルで用いられている程度の周波数・波向格子数：$L=20\sim 25$，$N=12\sim 36$ では，特異点からの寄与は無視できない．ただし，特異点処理をする場合としない場合で所要計算時間の差はほとんどない．

なお，計算に要した CPU 時間は，一つのスペクトルについて $L\times N=24\times 36$ で，約17秒(HP730ワークステーション）であり，同じ波数分解能では，この計算法は Masuda の方法より約50倍速い．

ここで，PM 型と JONSWAP 型，それぞれの周波数スペクトル対する非線形エネルギー伝達の効果の違いについて述べておく．まず，非線形エネルギー伝達の強度については PM 型の方が JONSWAP 型より 1 桁あまり大きい．(12) を見れば分かるように．非線形エネルギー伝達の強度は作用 $n(\mathbf{k})$ の 3 重積に依存する．ここでは，周波数集中度 γ の大きさにかかわらず，周波数スペクトルのピーク値を同じにしたので，当然周波数分布の広い PM 型の方が JONSWAP 型よりも作用が大きい．ゆえに，PM 型の非線形エネルギー伝達の強度が JONSWAP 型のものより大きくなったのである．次に，非線形エネルギー伝達の分布形については両者で以下のような違いが出た．集中度の小さい PM 型では，$T_1(\omega)$ の極大値（正）はピーク周波数 $\omega=1.0$ 付近にあり，極小値(負）は高周波側の $\omega=1.5$ 付近にある．従って，この場合，非線形エネルギー伝達の効果は高周波側からピーク周波数付近にエネルギーを輸送し，スペクト

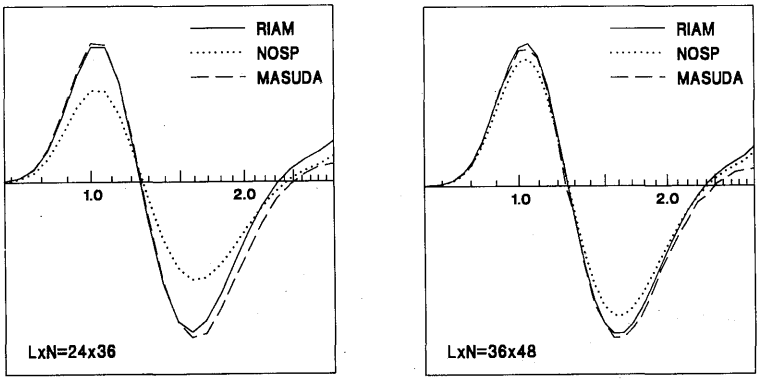

図 8　RIAM 法による PM 周波数スペクトル（$\cos^2\theta$ 型方向分布；図 9，10も）に対する $T_1(\omega)$．**RIAM**：RIAM 法によるもの．**NOSP**：RIAM 法で特異点処理をしていないもの．**MASUDA**：Masuda の方法によるもの．横軸はピーク周波数に相対的な周波数 ω（後の図も）．**(左)** 波数分解能 $L\times N=24\times 36$について．最大値は3.34，最小値は-3.74．**(右)** $L\times N=36\times 48$について．最大値は3.53，最小値は-3.74．

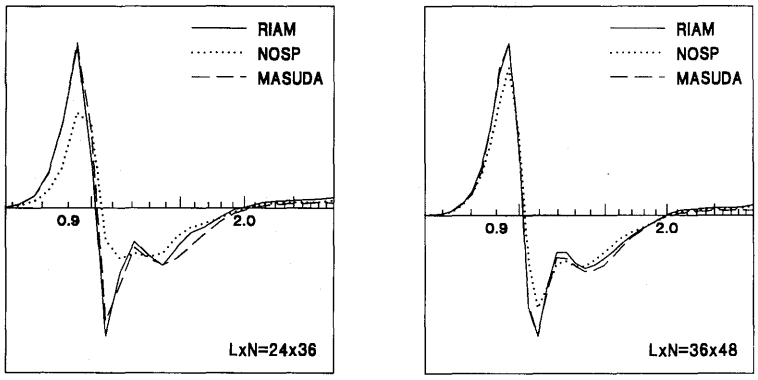

図 9　図 8 と同様．JONSWAP 周波数スペクトルに対するもの．**(左)** 波数分解能 $L\times N=24\times36$について，最大値は0.509，最小値は-0.396．**(右)** $L\times N=36\times48$について．最大値は0.532，最小値は-0.374．

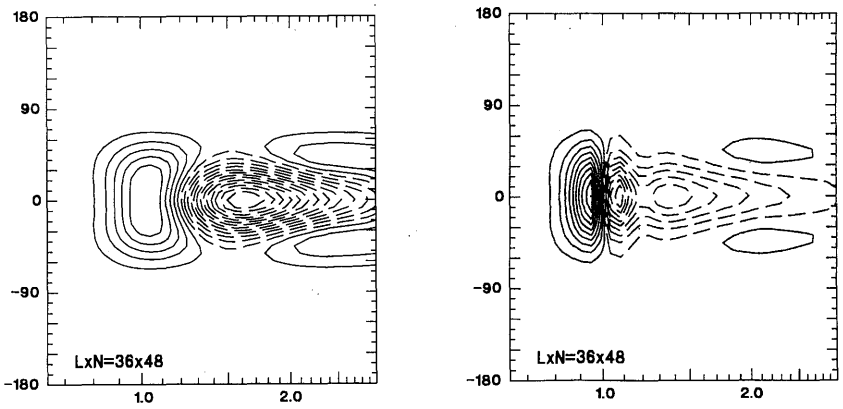

図10　RIAM 法による $T_2(\omega,\theta)$．ただし，波数分解能は $L\times N=36\times48$．縦軸は波向 θ（°）．実線は正値，破線は負値．**(左)** PM周波数スペクトルに対するもの．最大値は2.01，最小値は-4.50，等値線間隔は0.343．**(右)** JONSWAP周波数スペクトルに対するもの．最大値は0.401，最小値は-0.379．等値線間隔は0.0411．

ルのピークを持ち上げるように働いている．集中度の大きい JONSWAP 型では，、第 1 極大値(正) がピーク周波数の少し低周波側 $\omega=0.95$ 付近にあり，極小値(負) が $\omega=1.1$ 付近にある．加えて，第 2 極大値(負) が $\omega=1.2$ 付近に現れた．この場合，非線形エネルギー伝達の効果は，高周波側からピーク周波数の少し低周波側にエネルギーを輸送し，スペクトルのピークを低周波側に移動させるように働いている．以上のことから，非線形エネルギー伝達はスペクトル形の自己安定性と密接な関係があることが分かる．

4.2 共鳴成分波間の周波数比の制限

周波数が遠く離れた共鳴成分波間の相互作用は小さい．つまり，共鳴成分波の周波数比がある程度大きくなると，それらの間の非線形エネルギー伝達は無視できると考えられる．従って，相互作用が有意な共鳴対についてのみ吟味すれば，計算の省力化にもつながる．

RIAM 法では，4つの共鳴成分波の大小関係を，

$$\omega_3 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_4 \tag{55}$$

とした．エネルギー交換を行う共鳴4波の最高周波数（ω_4）と最低周波数（ω_3）との比を C_r で制限し，$\omega_4/\omega_3 > C_r$ となる配置については計算しないようにする．このようにして，いろいろなスペクトルに対する非線形エネルギー伝達の C_r 依存性を調べた．$C_r = 2, 2.5, 3, 7$ について，JONSWAP 周波数スペクトル（ともに $\cos^2\theta$ 型方向分布），双峰性スペクトル（$\omega = 1$ に大きいピーク，$\omega = 3$ に小さいピークがある）に対する非線形エネルギー伝達 $T_1(\omega)$ をそれぞれ図11～13に示す．ちなみに，Masuda の方法では $C_r = 7$ としている．

$C_r = 2$ 程度では，扱う配置が少ない分見積りが小さくなるが，スペクトル形にかかわらず $C_r \geq 3$ で計

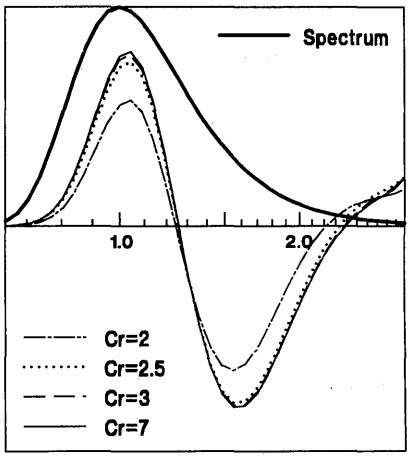

図11　共鳴成分波の領域幅 $C_r = 2$，2.5，3，7について，PM 周波数スペクトル（$\cos^2\theta$ 型方向分布；図12も）に対する $T_1(\omega)$．最大値は3.53，最小値は−3.64．Spectrum：周波数スペクトル $\psi(\omega)$．ただし，$\psi(1) = 1$ で $\psi(\omega)$ の寸法は $T_1(\omega)$ の寸法と異なる（図12，13も）．

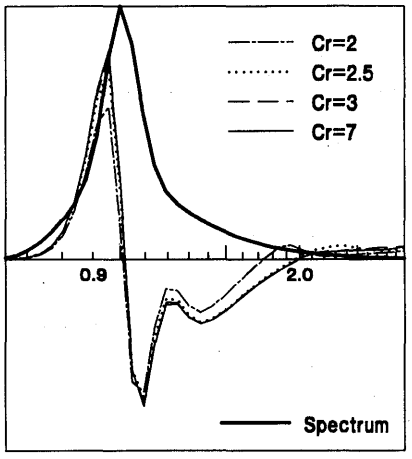

図12　図11と同様．JONSWAP 周波数スペクトルに対するもの．最大値は0.532，最小値は−0.374．

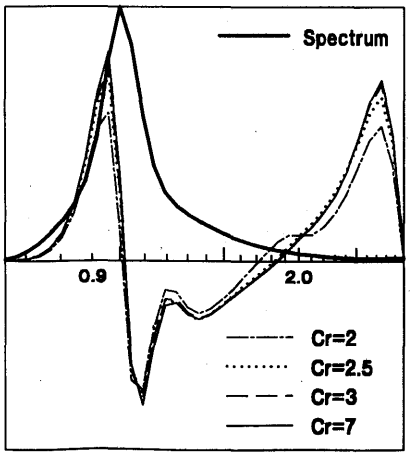

図13　図11と同様．双峰性スペクトルに対するもの．最大値は0.550，最小値は−0.378．

算値は落ち着くようである．従って，実用的には $C_r=3$ 程度で十分であると結論でき，$\omega_4/\omega_3>3$ となる配置を無視すれば，計算時間は約3分の1に短縮できる．なお，ここでの計算は波数分解能 $L\times N=36\times 48$ で行った．また，$C_r=3$ は，波数でいえば k_4/k_3 が9のところまで考慮することに対応する．

4.3 WAM法との比較

いろいろなスペクトル形を与えてRIAM法による結果とWAM法による結果とを比較した．波数分解能は $L\times N=36\times 48$ で行った．周波数スペクトルとしてPM型，方向分布として $\cos^2\theta$ 型および $\cos^8\theta$ 型の2次元スペクトルを与えて，RIAM法，WAM法，Masudaの方法によって非線形エネルギー伝達 $T_1(\omega)$ を計算した結果を図14，15に示す．また，周波数スペクトルとしてJONSWAP型，方向分布として $\cos^2\theta$ 型を与えて計算した T_1 を図16に示す．さらに双峰性のスペクトル（$\omega=1$ に大きいピーク，$\omega=1.5$ に小さいピークがある）を与えて計算した T_1 を図17に示す．ただし，WAM法の結果は(28)において $C_o=0.4914$ とし，RIAMやMasudaの方法と同じ無次元化を施して計算したものである．WAM法では共鳴配置を一つしか扱っていない上

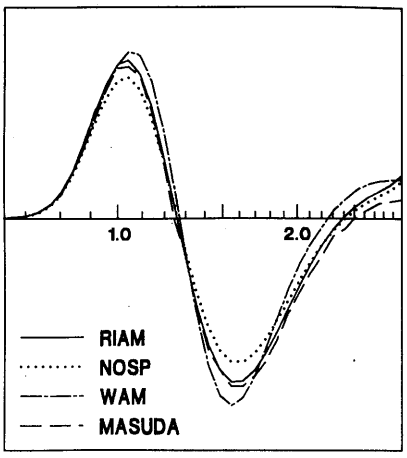

図14　RIAM法とWAM法の比較．PM周波数スペクトル（$\cos^2\theta$ 型方向分布；図16も）に対する $T_1(\omega)$．RIAM：RIAM法によるもの．NOSP：RIAM法で特異点処理をしていないもの．WAM：WAM法によるもの．MASUDA：Msudaの方法によるもの．最大値は3.72，最小値は−4.16．

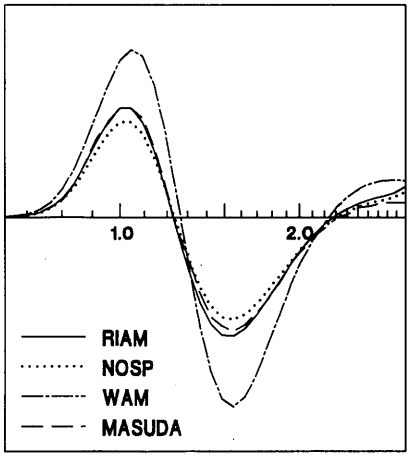

図15　図14と同様．PM周波数スペクトル（$\cos^8\theta$ 型方向分布）に対するもの．最大値は7.54，最小値は−8.47．

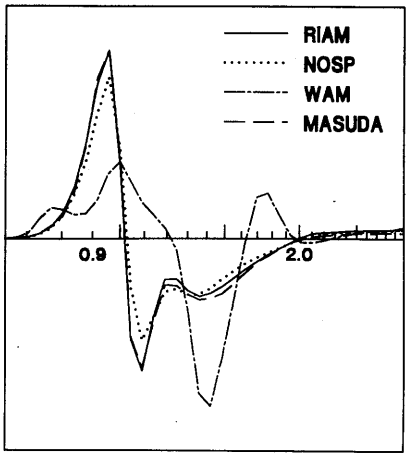

図16　図14と同様．JONSWAP周波数スペクトルに対するもの．最大値は0.532，最小値は−0.472．

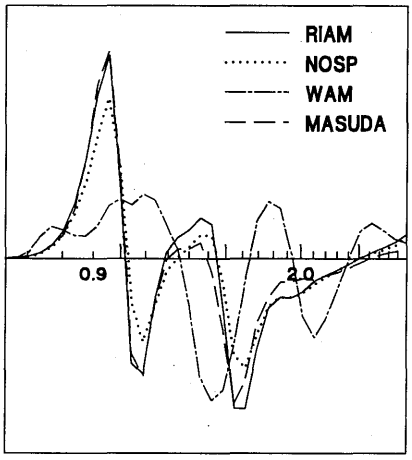

図17　図14と同様．双峰性スペクトルに対するもの．最大値は0.731，最小値は－0.528．

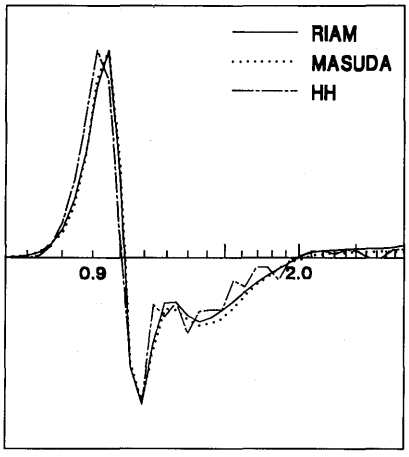

図18　RIAM法とHasselmann and Hasselmann (1981) の計算法の比較．JONSWAP周波数スペクトル（$\cos^2\theta$型方向分布）に対する$T_1(\omega)$．RIAM：RIAM法によるもの．HH：Hasselmann and Hasselmann (1981) の計算法のによるもの．MASUDA：Masudaの方法によるもの．最大値は0.532，最小値は－0.374．

に，その精度を調べる際に比較の対象としたHasselmann and Hasselmann (1981) の厳密計算法の結果は滑らかでなく，精度が悪い(図18参照)．従って(28)の係数Cは不定要素がある．

まず，周波数スペクトルとしてPM型，方向分布として$\cos^2\theta$型の2次元スペクトルの非線形エネルギー伝達に対しては，WAM法は「分布形」および「強度」の双方を良く再現しているように見える．しかし，同じ周波数集中度で方向分布が狭い場合には，「分布形」については良く再現しているが，「強度」は，Masudaの厳密計算の結果に比べて大き過ぎる．さらに，JONSWAPスペクトルのように周波数集中度の高いスペクトルや双峰性のスペクトルについては「分布形」および「強度」の双方においてMasudaの厳密計算の結果と著しく異なる．前に述べたように，非線形エネルギー伝達の強度および分布形は，波浪スペクトルの周波数および方向集中度に敏感に依存する(Masuda, 1980)．従って，集中したスペクトルや双峰性のスペクトルに対する非線形エネルギー伝達をWAMの近似法で十分再現できるとはいいがたいのである．

一方，RIAM法はあらゆるスペクトル形に対してMasudaの厳密計算結果を良く再現している．やはり，精度の向上を図る上では相互作用が有意な配置についてはすべて取り扱わざるを得ない．汎用性と精度では，RIAM法がWAM法に遙かに勝ると結論できよう．

5．おわりに

予報精度の向上をめざす上では，特別な仮定や近似をできる限り導入せず，非線形エネルギー伝達を厳密計算に近い形で効率的に求める必要があると判断し，Masuda (1980) の厳密計算の方法をもとに，

共鳴成分波間の相互作用の対称性を利用して，非線形エネルギー伝達を非常に効率良く計算する方法（RIAM 法）を新たに開発した．

RIAM 法は Masuda（1980）の厳密計算法と比較すると，波数分解能が低いとやや精度が落ちるが，格子数 $L\times N=24\times 36$ 程度で十分精度良く計算できることが分かった．逆にいうと，数値的に安定で滑らかな解を得るためには周波数格子数として $L=24$ 程度，波向格子数として $N=36$ 程度必要である．

また，特異点からの寄与は，波数格子数が多いほど小さくなるが，実際の予報モデルに採用されている程度の波数分解能では無視できないことが分かった．ただし，特異点処理をする場合としない場合とで，計算時間はほとんど変わらない．

さらに，相互作用している 4 つの共鳴成分波の最低周波数と最高周波数との比を 3 以内に制限しても，厳密計算に近い非線形エネルギー伝達の計算結果を得ることが分かった．つまり，非線形エネルギー伝達の計算の際に，最低周波数と最高周波数との比が 3 以上になる配置を無視したので，計算はさらに省力化できた．この計算方法は波数分解能 $L\times N=24\times 36$ で，一つのスペクトルに対する非線形エネルギー伝達関数の計算時間は約 6 秒（HP730ワークステーション）であり，同じ波数分解能では Masuda（1980）の厳密計算法より約150倍速い．

最後に，いろいろなスペクトル形を与えて，RIAM 法と WAM 法とを比較した．RIAM 法による結果は，スペクトル形にかかわらず厳密計算の結果と良い一致を示したが，WAM 法による結果は，スペクトルの周波数および方向集中度が小さい場合は厳密計算の結果とある程度一致するが，周波数および方向集中度が大きくなると，厳密計算の結果と食い違いが生じることが分かった．

当然のことながら，単一共鳴配置のみしか扱わない WAM 法に比べて有意な共鳴配置全てを処理する RIAM 法は，遙かに長い計算時間を必要とする．現在の計算速度では，RIAM 法をそのまま実用化することは困難かもしれない．しかし，電算機能力の将来的な向上が予想されるので，もう少し改良を加えれば RIAM 法の実用性は増すと期待される．また，風によるエネルギー入力や砕波などによるエネルギー消散についても未解明の部分が多いので，水槽実験などを行って，高精度の次世代波浪予報モデルの開発に向け，それらと非線形エネルギー伝達との調整をはかる必要がある．

なお，RIAM 法を用いて，非線形エネルギー伝達の物理を考察した結果については別論文で発表する予定である．

謝　　辞

電算機使用の面で，沿岸海象力学部門の上原克人助手には多大なる援助を受けた．また，丸林賢次，石橋道芳両技官には，研究の環境整備にご尽力頂いた．なお，本研究は小松の修士論文の一部を構成するものである．最後に，本研究の計算には応用力学研究所電子計算機室の FACOM M760，VP30E と沿岸海象力学部門のワークステーション HP9000／730を使用したことを付記する．

参 考 文 献

1）Hasselmann, K.: On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. J. Fluid Mech., **12** (1962), 481-500.

2) Masuda, A.: Nonlinear energy transfer between wind waves. J. Phys. Oceanogr., **10** (1980), 2082-2092.

3) The SWAMP Group (24 Authors): Ocean Wave Modeling. Plenum Press, New York (1985), 256p.

4) The WAMDI Group (13 Authors): The WAM model-A third generation ocean wave prediction model. J. Phys. Oceanogr., **18** (1988), 1378-1391.

5) Hasselmann, S., Hasselmann, K., Allender, J. H. and Barnett, T. P.: Computations and Parameterizations of the Nonlinear Energy Transfer in a Gravity-Wave Spectrum. Part II: Parameterizations of the Nonlinear Energy Transfer for Application in Wave Models. J. Phys. Oceanogr., **15** (1985), 1378-1391.

6) Phillips, O. M.: On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. J. Fluid Mech., **9** (1960), 193-217.

7) Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, H., Carlson, H., Cartright, D. E., Enke, K., Ewing, J. A., Gineapp, H., Hasselmann, D. E., Kruseman, P., Meerburg, A., Muller, P., Olbers, D. J., Richter, K., Sell, W. and Walden, H.: Measurements of wind wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Dtsch. Hydrogr. Z., Suppl., **A8**, No. 12 (1973), 95pp.

8) Hasselmann, K.: On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 2. Conservation theorems; wave-particle analogy; irreversibility. J. Fluid Mech., **15** (1963a), 273-281.

9) Hasselmann, K.: On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 3. Evaluation of the energy flux and swell-sea interaction for a Neumann spectrum. J. Fluid Mech., **15** (1963b) 385-398.

10) Sell, W. and Hasselmann, K.: Computations of nonlinear energy transfer for JONSWAP and empirical wind-wave spectra. Rep. Inst. Geophys. Univ. Hamburg (1972), 1-6.

11) Longuet-Higgins, M. S.: On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum: A simplified model. Proc. Roy. Soc. London, **A347** (1976), 311-328.

12) Fox, M. J.: On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum II. Proc. Roy. Soc. London, **A348** (1976), 467-483.

13) Hasselmann, S. and Hasselmann, K.: A symmetrical method of computing the nonlinear transfer in a gravity wave spectrum. Hamb. Geophys. Einzelschriften, Reihe A: Wiss. Abhasand., **52** (1981), 138p.

(平成5年6月4日受理)

付　　録

付1　非線形エネルギー伝達関数の導出

付1.1　基礎方程式と摂動解析

x, y, z 空間において，z 軸を鉛直上方にとり，自由表面を $z=\eta(x,y,t)$ とする．水平方向に無限に広い深さ h の非圧縮流体の層を考え，風による外力はないものとする．渦なしを仮定すると，速度ポテンシャル $\Phi(x,y,z,t)$ が存在し，それは Laplace の方程式を満足する：

$$\nabla^2\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{付1}$$

自由表面（$z=\eta$）における運動学的境界条件は，

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\nabla\eta\cdot\nabla\Phi=0 \tag{付2}$$

であり，自由表面（$z=\eta$）における力学的境界条件は，

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+g\eta+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2=0 \tag{付3}$$

である．また，海底（$z=-h$）における運動学的境界条件は，

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \tag{付4}$$

である．

Φ と η を波形勾配 $\varepsilon(\ll 1)$ で摂動展開する：

$$\Phi=\sum_{n=1}^{\infty}{}_n\Phi(x,y,z,t),\quad \eta=\sum_{n=1}^{\infty}{}_n\eta(x,y,t). \tag{付5}$$

ただし，${}_n\Phi\sim{}_n\eta\sim O(\varepsilon^n)$．（付5）を，（付1），（付4）に代入すると，$z=-h$ で，

$$\nabla^2{}_n\Phi+\frac{\partial^2{}_n\Phi}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial_n\Phi}{\partial_z}=0 \tag{付6}$$

を得る．従って，n 次の摂動解は次のような Fourier 級数で表せる：

$${}_n\Phi=\sum_{\mathbf{k}}{}_n\Phi_{\mathbf{k}}(t)\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x})\right], \tag{付7}$$

$${}_n\eta=\sum_{\mathbf{k}}{}_nZ_{\mathbf{k}}(t)\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x})\right]. \tag{付8}$$

ここで，${}_n\Phi_{\mathbf{k}}(t)$ あるいは ${}_nZ_{\mathbf{k}}(t)$ は以下のようにして決定する．まず，境界条件（付2），（付3）の $\Phi(x,y,z,t)$ を z に関して $z=0$ のまわりに Maclaurin 展開し，η のべき級数で表しておく．これらに，（付6）を代入すると，最終的に，${}_n\Phi_{\mathbf{k}}$ を決定する方程式を得る：

$$\frac{d^2}{dt^2}{}_n\Phi_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}^2{}_n\Phi_{\mathbf{k}}=\sum_{\substack{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\cdots+\mathbf{k}_n=\mathbf{k}\\ s_1,s_2,\cdots,s_n}}A^{s_1,s_2,\cdots,s_n}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots,\mathbf{k}_n}(t)\,{}_1\Phi^{s_1}_{\mathbf{k}_1}{}_1\Phi^{s_2}_{\mathbf{k}_2}\cdots{}_1\Phi^{s_n}_{\mathbf{k}_n}. \tag{付9}$$

ただし，初期条件は，

$$\left.\begin{matrix}{}_n\Phi_{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial_n\Phi_{\mathbf{k}}}{\partial t}\end{matrix}\right\}=\sum_{\substack{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\cdots+\mathbf{k}_n=\mathbf{k}\\ s_1,s_2,\cdots,s_n}}\left\{\begin{matrix}B^{s_1,s_2,\cdots,s_n}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots,\mathbf{k}_n}\\ C^{s_1,s_2,\cdots,s_n}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots,\mathbf{k}_n}\end{matrix}\right\}{}_1\Phi^{s_1}_{\mathbf{k}_1}{}_1\Phi^{s_2}_{\mathbf{k}_2}\cdots{}_1\Phi^{s_n}_{\mathbf{k}_n} \tag{付10}$$

である．ここで，S_j は±符号であり，

$$ {}_1\Phi_{\mathrm{k}}^{+}=({}_1\Phi_{-\mathrm{k}}^{-})^{*}, \tag{付11}$$

$$ \omega_{\mathrm{k}}=\sqrt{gk\tanh(kh)} \tag{付12}$$

であるとする．

付1．2　波浪のエネルギー

さて，成分波間のエネルギー授受について考える．まず，単位底面積をもつ水柱の平均エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和であり，次のように書ける：

$$ E=\frac{1}{2}\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho\left[(\nabla\Phi)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]dz}+\frac{1}{2}\rho g\overline{\eta^2}. \tag{付13}$$

E を次のように摂動展開し，

$$ E={}_2E+{}_3E+{}_4E+\cdots \tag{付14}$$

各摂動項について吟味すると，2次のオーダーでは（線形波では），

$$ {}_2E=\frac{2\rho}{g}\sum_{\mathrm{k}}\omega_{\mathrm{k}}^2\overline{|{}_1\Phi_{\mathrm{k}}^{+}|^2} \tag{付15}$$

となる．これは定数であるから，2次のオーダーでは成分波間でのエネルギーの授受はない．

また，Gauss過程を仮定すると，奇数次のエネルギーの摂動項はゼロになる：

$$ {}_3E={}_5E={}_7E=\cdots=0. \tag{付16}$$

次の2つの偶数次のエネルギーの摂動項は以下のようになる：

$$ {}_4E=\frac{\rho\omega_{\mathrm{k}}^2}{2g}\sum_{\mathrm{k}}\{\overline{|{}_2\Phi_{\mathrm{k}}|^2}+2Re(\overline{{}_1\Phi_{-\mathrm{k}3}\Phi_{\mathrm{k}}})\}+\frac{1}{2}\rho g\sum_{\mathrm{k}}\{\overline{|{}_2Z_{\mathrm{k}}|^2}+2Re(\overline{{}_1Z_{-\mathrm{k}3}Z_{\mathrm{k}}})\}+\sum\cdots, \tag{付17}$$

$$ \begin{aligned} {}_6E=&\frac{\rho\omega_{\mathrm{k}}^2}{2g}\sum_{\mathrm{k}}\{\overline{|{}_3\Phi_{\mathrm{k}}|^2}+2Re(\overline{{}_2\Phi_{-\mathrm{k}4}\Phi_{\mathrm{k}}})+2Re(\overline{{}_1\Phi_{-\mathrm{k}5}\Phi_{\mathrm{k}}})\}\\ &+\frac{1}{2}\rho g\sum_{\mathrm{k}}\{\overline{|{}_3Z_{\mathrm{k}}|^2}+2Re(\overline{{}_2Z_{-\mathrm{k}4}Z_{\mathrm{k}}})+2Re(\overline{{}_1Z_{-\mathrm{k}5}Z_{\mathrm{k}}})\}+\sum\cdots. \end{aligned} \tag{付18}$$

ただし，末項の $\sum\cdots$ は，定数項のみを含み，エネルギーの流れには寄与しない．後で述べるように，時間に比例して増大・減少する項は6次のオーダーではじめて現れる．

付1．3　エネルギー伝達

付1．3．1　項 ${}_4E$ について

まず，（付9）の $n=2$ の場合の解を求める．解くべき方程式は，

$$ \frac{d^2}{dt^2}{}_2\Phi_{\mathrm{k}}+\omega_{\mathrm{k}2}^2\Phi_{\mathrm{k}}=\sum_{\substack{\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2=\mathrm{k}\\ s_1,s_2}}D_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2}^{s_1,s_2}\Phi_{\mathrm{k}1}^{s_1}\Phi_{\mathrm{k}2}^{s_2}\exp\left[-i(S_1\omega_{\mathrm{k}_1}+S_2\omega_{\mathrm{k}_2})t\right] \tag{付19}$$

となる．ここで，

$$ D_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2}^{s_1,s_2}=i(\omega_1+\omega_2)\{k_1k_2\tanh k_1h\tanh k_2h-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)\}-\frac{i}{2}\left(\frac{\omega_1k_2^2}{\cosh^2k_2h}+\frac{\omega_2k_1^2}{\cosh^2k_1h}\right) \tag{付20}$$

であり，$\omega_j=S_j\omega_{\mathrm{k}_j}$ である．（付19）は強制振動の方程式とみなせるが，$\omega_{\mathrm{k}}^2\neq(S_1\omega_{\mathrm{k}_1}+S_2\omega_{\mathrm{k}_2})^2$ が常に成立するので，共鳴は起こらない．これは重力波が3波共鳴相互作用を行わないことに対応している．ちな

みに，(付19) の解としては，

$$ {}_2\Phi_{\mathbf{k}}=\sum_{\substack{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}\\ s_1,s_2}}\frac{D^{s_1,s_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}}{\omega_{\mathbf{k}}^2-(S_1\omega_{\mathbf{k}_1}+S_2\omega_{\mathbf{k}_2})^2}\,{}_1\Phi^{s_1}_{\mathbf{k}_1}\,{}_1\Phi^{s_2}_{\mathbf{k}_2}\exp\left[-i(S_1\omega_{\mathbf{k}_1}+S_2\omega_{\mathbf{k}_2})t\right] \tag{付21} $$

を得る．

次に，(付９) の $n=3$ の場合の解を求める．解くべき方程式は，

$$ \frac{d^2}{dt^2}{}_3\Phi_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}3}^2\Phi_{\mathbf{k}}=\sum_{\substack{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=\mathbf{k}\\ s_1,s_2,s_3}}D^{s_1,s_2,s_3}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}\,{}_1\Phi^{s_1}_{\mathbf{k}_1}\,{}_1\Phi^{s_2}_{\mathbf{k}_2}\,{}_1\Phi^{s_3}_{\mathbf{k}_3}\exp\left[-i(S_1\omega_{\mathbf{k}_1}+S_2\omega_{\mathbf{k}_2}+S_3\omega_{\mathbf{k}_3})t\right] \tag{付22} $$

となる．ここで，

$$ D^{s_1,s_2,s_3}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}=\frac{1}{3}\{\hat{D}^{s_1,s_2,s_3}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}+\hat{D}^{s_2,s_3,s_1}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_1}+D^{s_3,s_1,s_2}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\} \tag{付23} $$

であり，また，

$$ \begin{aligned}\hat{D}^{s_1,s_2,s_3}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}=&\frac{iD^{s_2,s_3}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}}{\omega^2_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3}-(\omega_2+\omega_3)^2}\\ &\times\left[2(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\left\{\frac{\omega_1^2\omega^2_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3}}{g^2}-\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\right\}-\frac{\omega_1(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)^2}{\cosh^2(|\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3|h)}\right]\\ &-iD^{s_2,s_3}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}\frac{\omega_1}{g^2}(\omega_1^2+\omega_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3})+E^{s_2,s_3}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}\left\{\frac{\omega_1^3(\omega_2+\omega_3)}{g}-g\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\right\}\\ &+\frac{\omega_1}{2g^2}(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3)\{(\omega_1+\omega_2+\omega_3)(\omega_2^2+\omega_3^2)+\omega_2\omega_3(\omega_2+\omega_3)\}\\ &-\frac{\omega_1\omega_2^2k_3^2}{2g^2}(\omega_1+\omega_2+2\omega_3)-\frac{\omega_1\omega_3^2k_2^2}{2g^2}(\omega_1+2\omega_2+\omega_3)\end{aligned} \tag{付24} $$

である．ただし，

$$ E^{s_2,s_3}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}=\frac{1}{2g}\left\{(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3)-\frac{1}{g^2}\omega_2\omega_3(\omega_2^2+\omega_3^2+\omega_2\omega_3)\right\} \tag{付25} $$

である．この場合は，与えられた $\mathbf{k}$ に対して，$\omega_{\mathbf{k}}^2=(S_1\omega_{\mathbf{k}_1}+S_2\omega_{\mathbf{k}_2}+S_3\omega_{\mathbf{k}_3})^2$を満足する $\mathbf{k}_j$ と S_j を選ぶことができるから，このとき（４波）共鳴が起き，解は時間 t に比例して変化する永年項をもつ．従って，${}_4E$ のうち，$\overline{{}_1\Phi_{-\mathbf{k}3}\Phi_{\mathbf{k}}}$ は t に比例した項を含むが，これは純虚数であるので ${}_4E$ には寄与しない（$\overline{{}_1Z_{-\mathbf{k}3}Z_{\mathbf{k}}}$ に関しても同様）．すなわち，${}_4E$ は定数項しか含まず，エネルギーの授受に関与しない．

付１．３．２　項 ${}_6E$ について

${}_6E$ を計算するためには，(付９)の $n=5$ の場合の解まで求めなくてはならない．これを実行し(付18)に代入すると，時間 t に比例するものとして ${}_6E$ のエネルギースペクトル ${}_6F(\mathbf{k})$ を得る．この ${}_6F(\mathbf{k})$ を t で微分すると，

$$ \begin{aligned}\frac{\partial_6F(\mathbf{k}_4)}{\partial t}=&\omega_4\int\cdots\int d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2d\mathbf{k}_3G(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\\ &\times\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)\{{}_6n_1\,{}_6n_2({}_6n_3+{}_6n_4)-{}_6n_3\,{}_6n_4({}_6n_1+{}_6n_2)\}\end{aligned} \tag{付26} $$

となる．ここで，${}_6n_j\equiv{}_6n(\mathbf{k}_j)\equiv{}_6F(\mathbf{k}_j)/\omega_j$ であり，

$$G=\frac{9\pi g^2 D^2}{4\rho^2\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}, \tag{付27}$$

$$D=D^{++-}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,-\mathbf{k}_2}=D^{++-}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,-\mathbf{k}_1}=D^{++-}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_4}=D^{++-}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3} \tag{付28}$$

である．ただし，(付26) は ${}_6F(\mathbf{k})\ll{}_2F(\mathbf{k})$ が満たされるような時間 t が十分小さいときには成立するが，t の増加とともに速やかに漸近解としての性質を破綻させてしまう．そこで，${}_2F$ が時間に関してゆっくり変動すると想定すれば，十分長い時間で成立するものとして，

$$\frac{\partial F(\mathbf{k}_4)}{\partial t}=\omega_4\int\cdots\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 G(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)$$
$$\times\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)\{n_1n_2(n_3+n_4)-n_3n_4(n_1+n_2)\} \tag{付29}$$

を得る．これが，いわゆる非線形エネルギー伝達関数 $S_{nl}(\mathbf{k}_4)$ である．ここで，$n_j\equiv n(\mathbf{k}_j)\equiv F(\mathbf{k}_j)/\omega_j$ であり，

$$F={}_2F+{}_4F+{}_6F+\cdots \tag{付30}$$

である．