

ある変形非線形シュレディンガー方程式の解の発展 について

及川, 正行
九州大学応用力学研究所 : 教授

<https://doi.org/10.15017/4743939>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 74, pp.369-384, 1992-10. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

ある変形非線形シュレディンガー方程式 の解の発展について

及川正行*

概 要

分散曲線が変曲点を持つような波動系において、変曲点近傍の平面波の非線形変調を支配する変形非線形シュレディンガー方程式 (MNLS) の周期境界条件の下での解の時間発展を数値的に調べる。その MNLS は非線形シュレディンガー方程式 (NLS) に3次の分散項を付け加えた形をしているが、この3次の分散項のために解が不規則になるかどうか特に注目する。他の項の係数をそのままにして3次の分散項の係数だけを小さくした場合の解についても考察する。

Key words : Modified nonlinear Schrödinger equation, Modulational instability, Chaotic behaviour, Separation distance

1. はじめに

1次元弱非線形分散系における平面波の非線形変調が非線形シュレディンガー方程式 (NLS) によって記述されることはよく知られている¹⁾。しかしながら、分散曲線の変曲点の近傍においては NLS の分散項の係数が非常に小さくなるために、非線形項とのバランスを保つためには、3次の分散項も考慮しなければならない。その結果、NLS は次の変形非線形シュレディンガー方程式 (MNLS) で置き換えなければならない。

$$i \frac{\partial A}{\partial T} - \beta \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - i\gamma \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} - |A|^2 A = 0. \quad (1)$$

ここで、場を代表する変量 φ が非線形性を表わす微小パラメータ ε の最低次で

$$\varphi \sim A(X, T) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}$$

(c.c. は複素共役) と書けるとし、

$$X = \varepsilon^{2/3}(x - \omega' t), \quad T = \varepsilon^2 t \quad (2)$$

である。ただし、 $\omega = \omega(k)$ は線形分散関係、“'”は波数 k に関する微分を表わす。また、

$$\beta = -\frac{\omega''}{2\varepsilon^{2/3}}, \quad \gamma = \frac{1}{6}\omega''' \quad (3)$$

*九州大学教授, 応用力学研究所

であって、注目している平面波の波数 k が変曲点における波数 k_c に十分近いために、 $\omega''(k) \sim \varepsilon^{2/3}$ であるとしている。分散曲線が変曲点を持つ例としては表面張力重力波があるが、その場合の方程式(1)の導出が文献2)で与えられている。

最近、Akylas と Kung³⁾ は MNLS を調べ、双山孤立波の無限個の族が存在することを示唆し、最初の3個の族を数値的に計算した。各々の族は1-パラメータの族である。また、著者は文献2)において、MNLS の周期境界条件の下での解の発展を計算した。初期条件は元の物理系の一様波列に対応する MNLS の解に周期的な小さな摂動を加えたもので、Yuen と Ferguson⁴⁾ が NLS に対して行った計算と同様のものである。文献2)では、NLS の場合と異なって MNLS の場合には解がカオス的になりうることを示唆したが、計算精度に若干問題があり、特に長時間の計算はできなかった。このノートでは文献2)とは別な計算法を採用し、計算した結果とその後の若干の進展を述べる。文献2)では $\gamma=0$ (NLS) と $\gamma=0.0936\dots$ (いずれも $\beta=0.1817\dots$ としている) の場合を調べたが、このノートでは $\gamma=0.01$ の場合についても述べる。また、初期値が非常に近い2つの解の間の距離の時間発展を計算した。それによれば、NLS の場合には距離は線形的に増加するが、MNLS の場合には最も単純な解(周期解)の場合を除いていずれも距離は指数関数的に増加する。文献2)では $|A|$ のグラフとともに $|A|$ のフーリエ成分の絶対値のグラフを示したが、このノートでは A そのもののフーリエ成分の絶対値を示しているので注意してほしい。

2. 問題の設定と計算法

文献2)で述べたように、MNLS (1)の一様な解——元の系の一様波列解に対応する—— $A_0 = a_0 \exp(-ia_0^2 T + ib_0)$ (a_0 : 正数, b_0 : 実数) の変調不安定特性は

$$\Omega = \gamma x^3 \pm \sqrt{x^2(\beta^2 x^2 - 2\beta a_0^2)} \quad (4)$$

で与えられる。ここで擾乱は $e^{i(\alpha x - \Omega T)}$ の形を仮定している。従って、 $\beta < 0$ なら安定、 $\beta > 0$ なら、

$$0 < x < x_c (\equiv \sqrt{2/\beta} a_0) \quad (5)$$

の範囲で不安定となる。図1の曲線は $\beta > 0$ のときの擾乱の増幅率を表わしている。

不安定な擾乱がどのように時間発展するかということを問題にする。初期条件は、

$$\begin{aligned} A(X, 0) &= U(X, 0) + iV(X, 0), \\ U(X, 0) &= a_0[1 - \alpha \cos(\alpha X)], \quad V(X, 0) = 0 \\ 0 &\leq X \leq L, \quad L = 2\pi/\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

とし、境界条件は周期的とする。2つの解の間の距離を計算する場合を除いては、

$$a_0 = 1, \quad \alpha = 0.1 \quad (7)$$

とする。また、 β の値は

$$\beta = 0.1817\dots \quad (8)$$

に固定している。この値は無限水深の表面張力重力波の場合に $\varepsilon = 0.05$, $k = 0.9$ (ただし、 $k_c = 1$ となる無次元化において) と選んだときの β の値である²⁾。またこの場合 γ は $\gamma = 0.0936\dots$ となる。このノートで

- : $S = 0.7$
- : $S = 0.35$
- △ : $S = 0.27$
- × : $S = 0.22$
- ◇ : $S = 0.18$

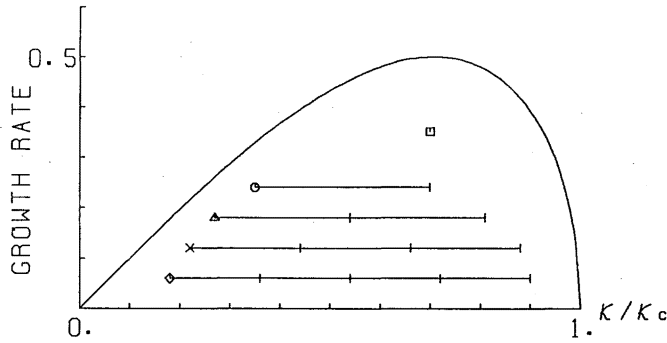


図1 MNLS(1)の一樣な解の変調不安定特性. 横軸は x/x_c , 縦軸は増幅率である. 図の s は初期値(6)の波数を x とするとき, $s=x/x_c$ で定義されている.

は(1) $\gamma=0$, (2) $\gamma=0.0936\dots$, (3) $\gamma=0.01$ の3通りを考える. x の値は次の5通りを考える. (a) $x=0.7x_c$, (b) $x=0.35x_c$, (c) $x=0.27x_c$, (d) $x=0.22x_c$, (e) $x=0.18x_c$. 図1に見られるように, 不安定区間に含まれる基本波と高調波を合わせた数 m は, それぞれ, (a) $m=1$, (b) $m=2$, (c) $m=3$, (d) $m=4$, (e) $m=5$ である. これらの初期条件は Yuen と Ferguson⁴⁾が NLS について, 初期値の不安定特性と不安定解の長時間発展との関連を調べたときに用いたものと同様である. 彼らは文献4)において, “(図1のように)不安定域が波数の上限を持つ系では, 不安定の発展に伴うエネルギー分配過程に関与するモードが常に不安定な低波数モードに限定されるために, (6)のような初期値から出発した解は無秩序にはならないだろう”と提案した. しかし, NLS の場合に解が無秩序にならないのは, そうした不安定特性ばかりでなく, NLS が完全積分可能な系⁵⁾であるためとも考えられる. もしそうならば, (証明したわけではないが, たぶん)完全積分可能でない MNLS (1)の解は, 不安定特性が同じ($\gamma \neq 0$ のときには Ω に実部が現われる点)が異なるだけで, 増幅率は $\gamma=0$ のときと同じ)であっても, NLS の解の挙動とは定性的に異なると予想される. また, γ は(1)に現われる最高階の導関数の係数であるから, γ の値を小さくしても解は $\gamma=0$ の場合の解には近づかず, 何か特異な挙動を示すことが考えられる. こうした事柄を調べるために MNLS (1)を数値的に解いてみようとするわけである.

MNLS (1)は少なくとも次の3つの保存量をもつ.

$$I_1 = \int_0^L |A|^2 dX = \int_0^L (U^2 + V^2) dX, \tag{9}$$

$$I_2 = \int_0^L i \left(A^* \frac{\partial A}{\partial X} - A \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) dX = 2 \int_0^L \left(V \frac{\partial U}{\partial X} - U \frac{\partial V}{\partial X} \right) dX, \tag{10}$$

$$I_3 = \int_0^L \left\{ \beta \frac{\partial A}{\partial X} \frac{\partial A^*}{\partial X} + \frac{i\gamma}{2} (A^* A_{xx} - A_x A_{xx}^*) - \frac{1}{2} |A|^4 \right\} dX$$

$$= \int_0^L \{ \beta(U_x^2 + V_x^2) + \gamma(V_x U_{xx} - U_x V_{xx}) - \frac{1}{2}(U^2 + V^2)^2 \} dX, \quad (11)$$

ただし, U, V はそれぞれ A の実部と虚部である.

$$H = iI_3 \quad (12)$$

とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T} &= -i\beta \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \gamma \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} - iA^2 A^* = \frac{\delta H}{\delta A^*}, \\ \frac{\partial A^*}{\partial T} &= i\beta \frac{\partial^2 A^*}{\partial X^2} + \gamma \frac{\partial^3 A^*}{\partial X^3} - iA^2 A^{*2} = -\frac{\delta H}{\delta A}. \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, 右辺は汎関数微分である. 従って, (1) はハミルトン系であり, H はそのハミルトニアンである. 次に, 数値計算法について述べる.

$$\xi = xX \quad (14)$$

とおいて, 計算区間を $[0, 2\pi]$ とすると, (1) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T} &= -\beta' \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \gamma' \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} - i|A|^2 A, \\ \beta' &= x^2 \beta, \quad \gamma' = x^3 \gamma \end{aligned} \quad (15)$$

となる. 文献 2) では空間依存性は擬スペクトル法で扱い, 時間に関してはリープ・フロッグとした. しかし, この方法では特に $\gamma \neq 0$ の場合には時間ステップ ΔT を非常に小さくする必要があり, 長時間にわたって精度の良い計算をすることは困難であった. 今回の計算では, 空間依存性は擬スペクトル法であるが時間方向にはフェールベルグ公式と呼ばれる 6 段 5 次のルンゲ・クッタ型公式を用い, ステップ幅を自動調節する方法⁶⁾を適用した. さらに, Tanaka⁷⁾ にならって次のような工夫をした. $A(\xi, T)$ のフーリエ変換を $\tilde{A}_n(T)$ とする.

$$A(\xi, T) = \sum_{n=-N}^N \tilde{A}_n(T) e^{in\xi} \quad (16)$$

すると, (15) は,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{A}_n}{dT} &= -i\sigma(n)\tilde{A}_n - i\widehat{(|A|^2 A)}_n \\ \sigma(n) &= -\beta' n^2 + \gamma' n^3 \end{aligned} \quad (17)$$

となる.

$$\tilde{A}_n(T) = \tilde{A}_n(0) e^{i\sigma(n)T} \quad (19)$$

を導入すると,

$$\frac{d}{dT} \tilde{A}_n(T) = -ie^{i\sigma(n)T} \widehat{(|A|^2 A)}_n \quad (20)$$

(17) の代りに (20) を解いた. ほとんどの場合, $N=64$ とした. $\gamma=0.01$ かつ $x/x_c=0.27, 0.22, 0.18$ の場合は $N=128$ とした. いずれの場合も $T=100$ まで保存量 I_1, I_2, I_3 は十分な精度で保存していた. ほとんどの場合, 上位 10 桁以上が保存しており, 最悪の場合でと上位 8 桁以上は保存していた.

3. $|A|$ 及びフーリエ・モードの時間発展

$|A|$ の時間発展と A のフーリエ成分の時間発展について述べる. $T=32$ まで図示されているが, 実際には $T=100$ まで計算している. $T=32$ まででは $|A|$ の時間発展は文献(2)で示したものと図では区別できない. この節の結果は初期条件(6)で $a_0=1$, $a=0.1$ として得られたものである. また, β の値は常に(8)としている.

図2は NLS ($\gamma=0$) の場合の $|A|$ の発展である. また, 図3は対応する A のフーリエ成分の絶対値を示す. これらの図からいくつかの事柄を指摘できる.

- (N1) 初期値における不安定モードの数 m が増すに従って, 解の挙動は複雑になる. また, 励起されるフーリエ成分の数も増す. この性質は MNLS の場合にもあてはまる.
- (N2) $m=1$ の場合は周期的. 他の場合には初期値に近い状態に時々もどる. $|A|$ の波形は秩序だっている. このことはフーリエ成分でみると各時刻において高波数成分と低波数成分に強い相関があるという点に現われている.
- (N3) 励起されるフーリエ成分の数は意外に多い. 図3と図5を較べてみよ. このことは NLS をスペクトル法で解くときには(10)における N を十分大きくとる必要があることを示唆する. もちろん, これは差分法の場合には, 空間のステップサイズを十分小さくすることに対応する. Caponi⁸⁾は a_0 を大きくすると, NLS の解がカオス的になると述べたが, Yuen⁹⁾は計算に用いるフーリエ・モード数を増すと, そのカオスの挙動が消えてしまうことを指摘した. また, 最近 Ablowitz と Herbst¹⁰⁾は NLS において起ったとされるカオスの挙動は数値的な不安定に起因するものであり, この不安定は NLS のホモクリニックな軌道と深くかかわっているということを指摘した.

図4, 図5は $\gamma=0.0936\dots$ におけるそれぞれ $|A|$ と A のフーリエ成分の絶対値の時間発展を示す. (N1) で述べたことはこの場合もあてはまる. 次の2点に気づく.

- (L1) $m=1$ のとき以外は $|A|$ の発展は無秩序に見える. 再帰性があるようにみえない. NLS の場合とは定性的に異なる.
- (L2) 励起されるフーリエ成分の数は比較的少ない. しかし, 励起されているモードは $m=1$ の場合を除いてほぼ一様に分布している.

図6, 図7は $\gamma=0.01$ の場合を示す. β を一定にしたまま $\gamma \rightarrow 0$ としても物理的には意味がないと思われるが, γ は最高階微分項の係数なので, その値が小さいときにどのようなことが起るか興味深い. この場合も性質(N1)があてはまる. また, 次のことが指摘できる.

- (S1) $m=1$ のときでさえ再帰性はないように見える. $m \geq 2$ では $|A|$ は非常に無秩序に見える.
- (S2) 励起されるフーリエ成分は $\gamma=0.0936\dots$ の場合よりかなり多くなる. n 軸の目盛に注意.
- (S3) $|A|$ の波形において, 空間スケールの小さな部分と大きな部分がかなりはっきりと区別できる. この傾向はフーリエ成分の分布にも多少現われている.

$\gamma=0.01$ の場合の解の様相は NLS の解の様相とは全く違っている. しかし, $\gamma=0.01$ の場合の方が $\gamma=0.0936\dots$ の場合より NLS の解に似ている部分もある. それは $|A|$ におけるピークの形である. $\gamma=0.01$

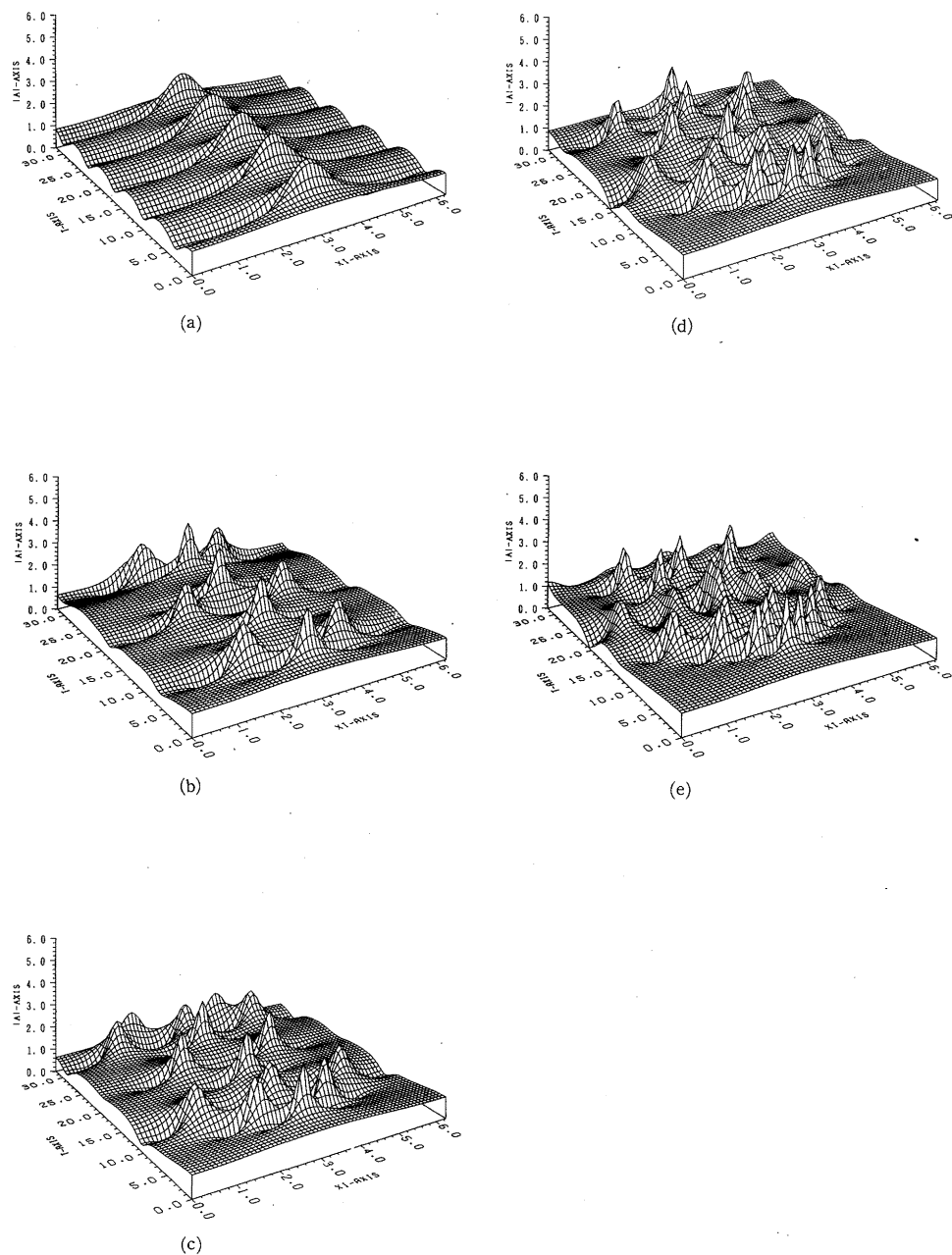


図2 NLSの解の時間発展, $|A|$. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0$. 初期値は(6), (7)で与えられる. (a) $x=0.7x_c$, (b) $x=0.35x_c$, (c) $x=0.27x_c$, (d) $x=0.22x_c$, (e) $x=0.18x_c$. 右の横軸は ξ 軸, 左の横軸は T 軸である.

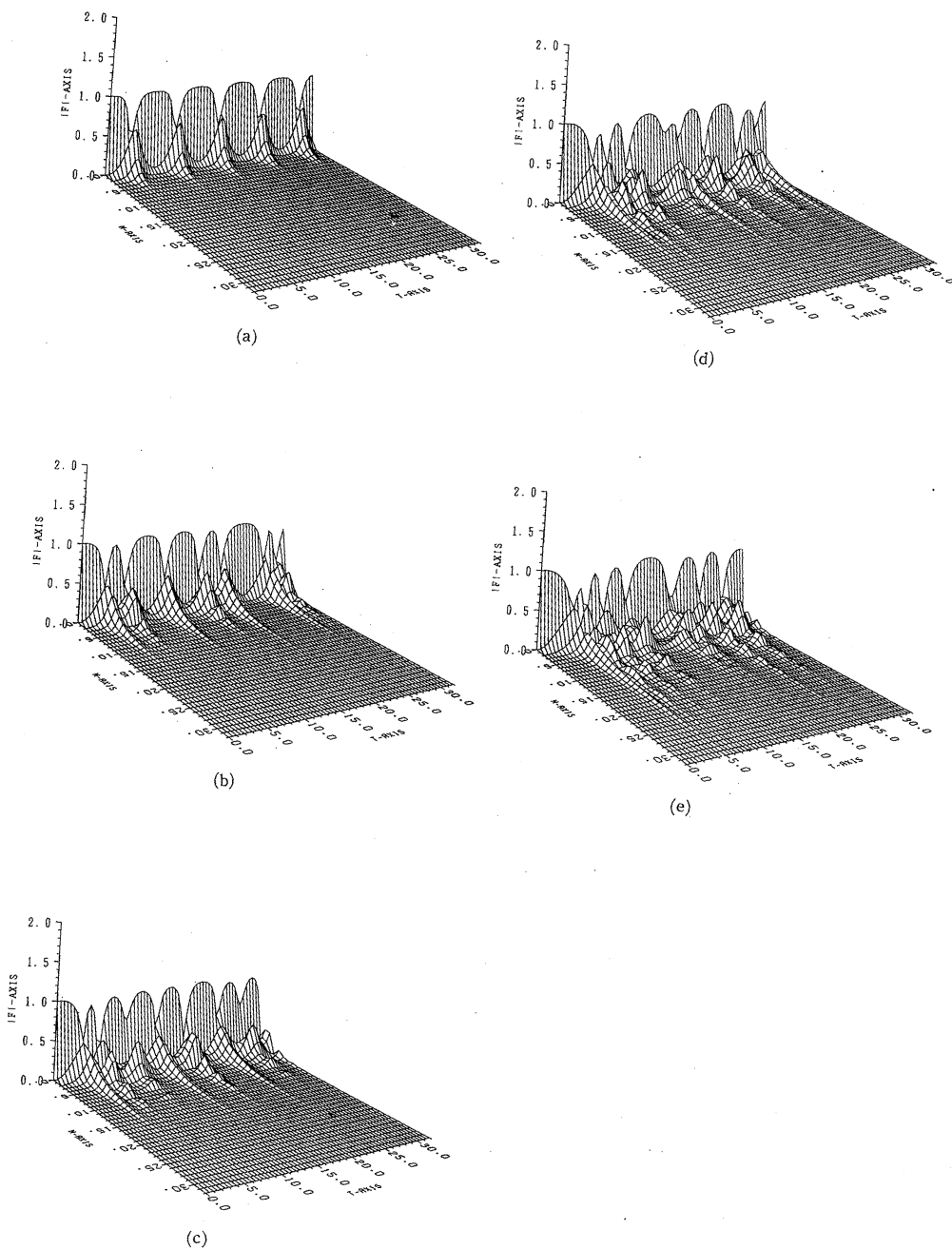


図3 NLSの解Aのフーリエ成分の絶対値. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0$.
 右の横軸はT軸, 左の横軸はn軸である. 他の条件は図2
 と同じ.

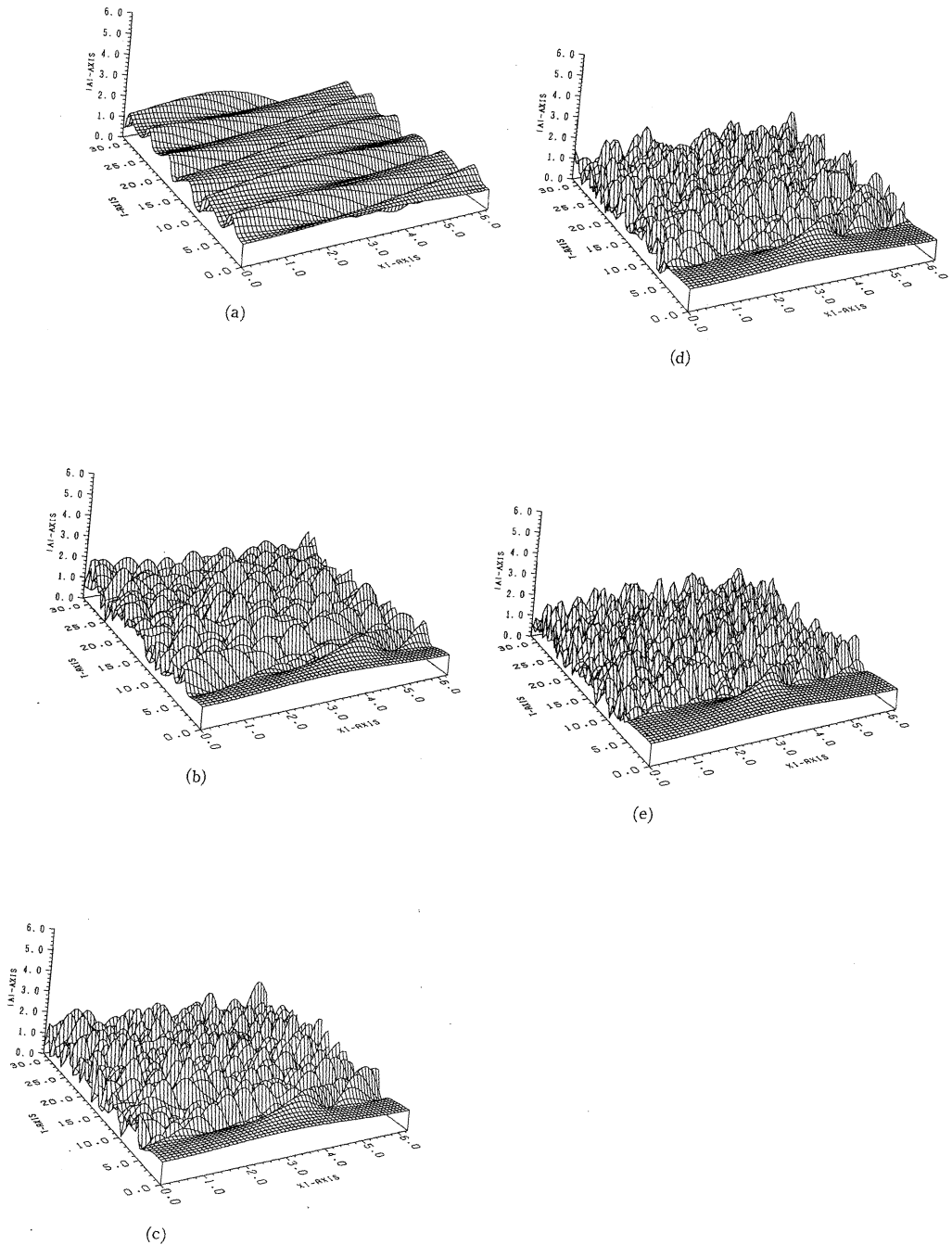


図4 MNLSの解の時間発展, $|A|$. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0.0936\dots$.
他の条件は図2と同じ.

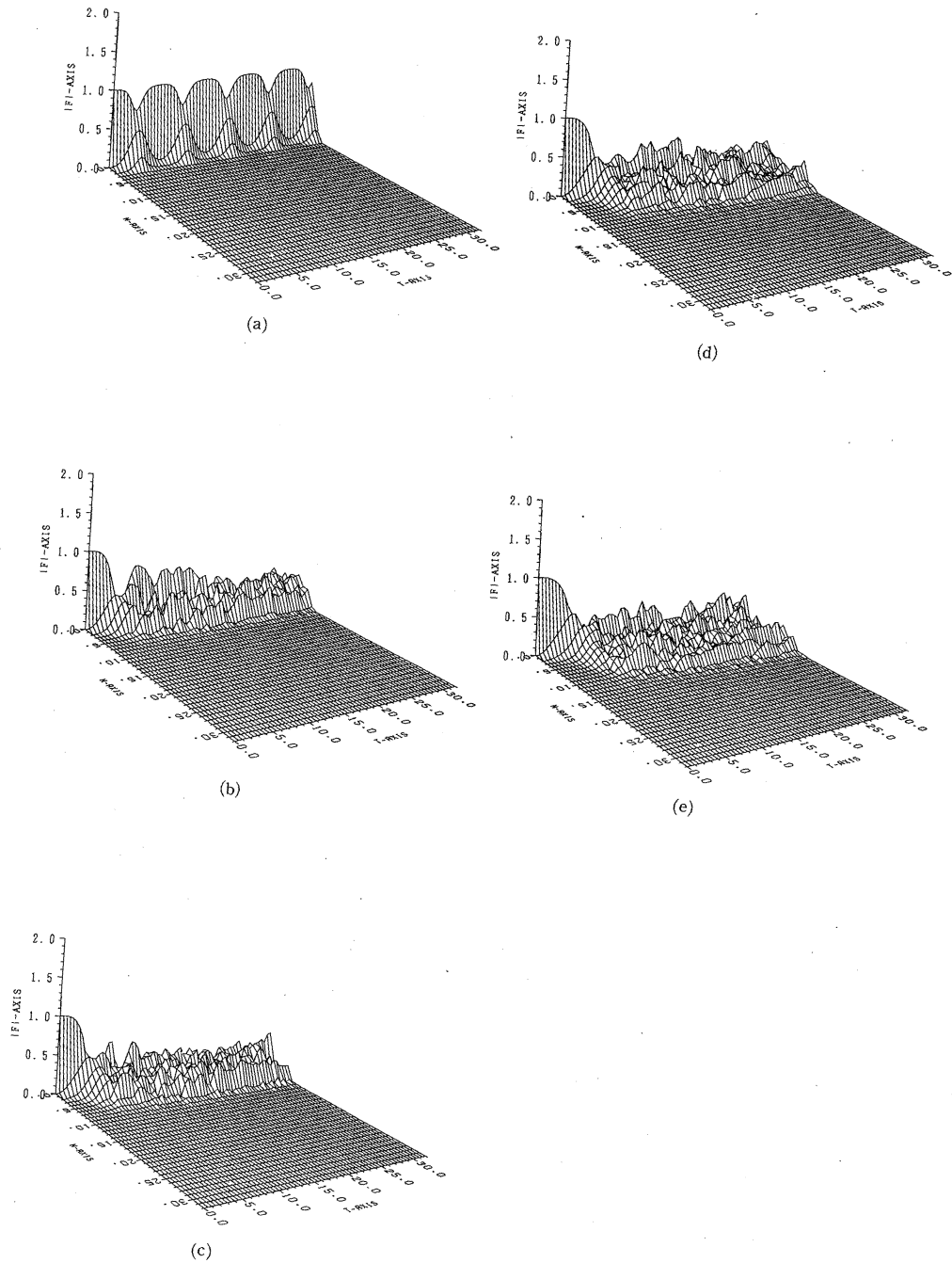
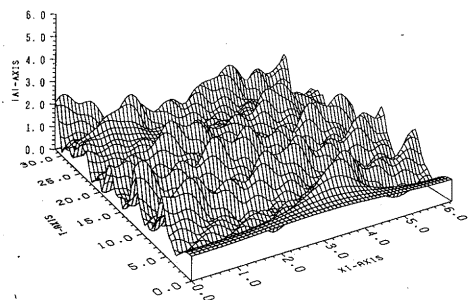
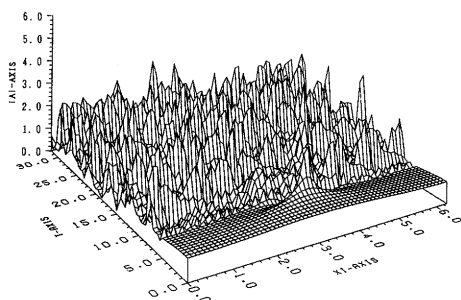


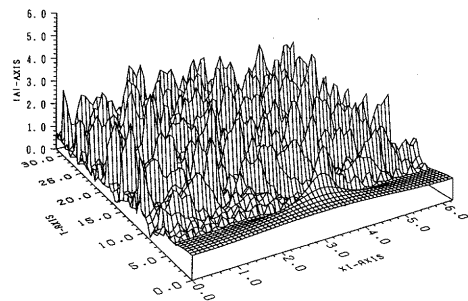
図5 MNLSの解Aのフーリエ成分の絶対値. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0.0936\dots$. 他の条件は図3と同じ.



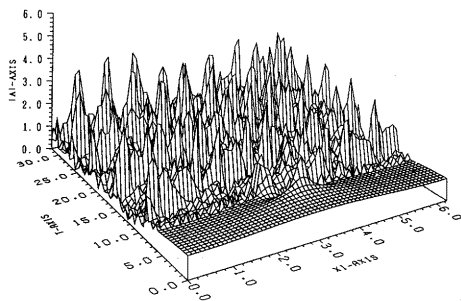
(a)



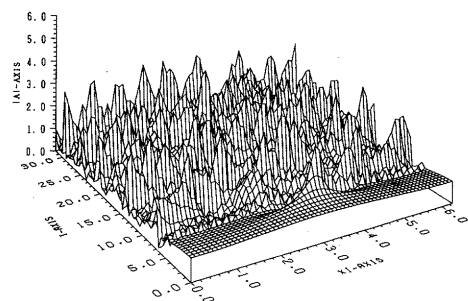
(d)



(b)



(e)



(c)

図6 MNLSの解の時間発展, $|A|$, $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0.01$. 他の条件は図2と同じ.

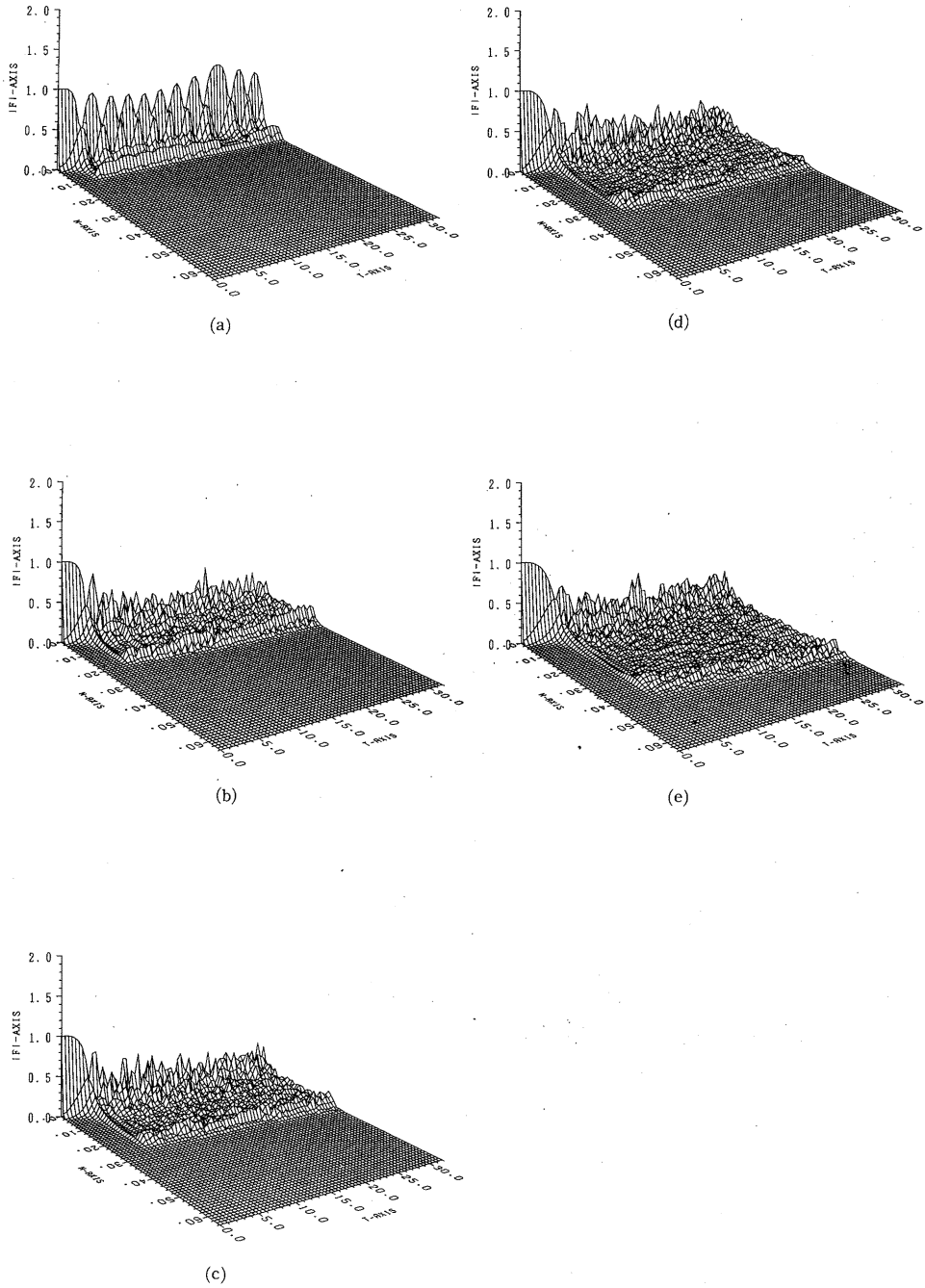


図7 MNLSの解Aのフーリエ成分の絶対値. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0.01$. 他の条件は図3と同じ.

の場合の(空間スケールの大きい方)のピークの形の多くが対応する場合のNLSの解におけるピークに似ていると見ることができる。

図4から図7を見ると $m=1$ の場合を除いて解はカオス的に見える。 $m=1$ の場合も $\gamma=0.01$ のときには規則的であるのかどうかは何とも言えない。

4. 軌道間の距離

カオス的な挙動に対するチェックとして、近い初期値から出発した2つの軌道間の距離

$$d(T) \equiv \sum_{j=0}^{2N-1} |A_j(T) - A'_j(T)|^2, \quad (2)$$

$$A_j(T) \equiv A(j\pi/N, T), \quad A'_j(T) \equiv A'(j\pi/N, T)$$

を計算した。本来はリアプノフ指数を計算すべきであろうが、ここではそれはなされなかった。

図8~10に(6), (7)で与えられる初期値と a_0 だけを $a_0=1.0001$ にかえた初期値とから出発した軌道間の距離を図示している。図8はNLS ($\gamma=0$) の場合で、 $x=0.7x_c$ (細い実線) と $x=0.18x_c$ (太い実線) の2通りが示されている。いずれも距離は線形的にしか離れていかない。図9はMNLS ($\gamma=0.0936\dots$) の場合で、 $x=0.7x_c$ に対しては $d(T)$ は線形的に増加するが、 $x=0.35x_c$, $x=0.18x_c$ に対しては、 $d(T)$ は指数関数的に増加する。また、図10はMNLS ($\gamma=0.01$) の場合で、 $x=0.7x_c$, $x=0.35x_c$, $x=0.18x_c$ のいずれもが指数関数的増大を示す。従って、 $\gamma=0.01$ の場合には、不安定モードを1つしか含まない初期値 ($x=0.7x_c$ で図6(a) から出発した解もカオス的とみてよいように思われる。

図8~10では初期値(6)で a_0 の値がわずかに異なる2つの軌道間の距離を示したが、図11, 12に、初期値のずらせ方を3通りに変えた場合の2つの軌道間の距離の時間発展を示した。図11はNLS ($\gamma=0$) で

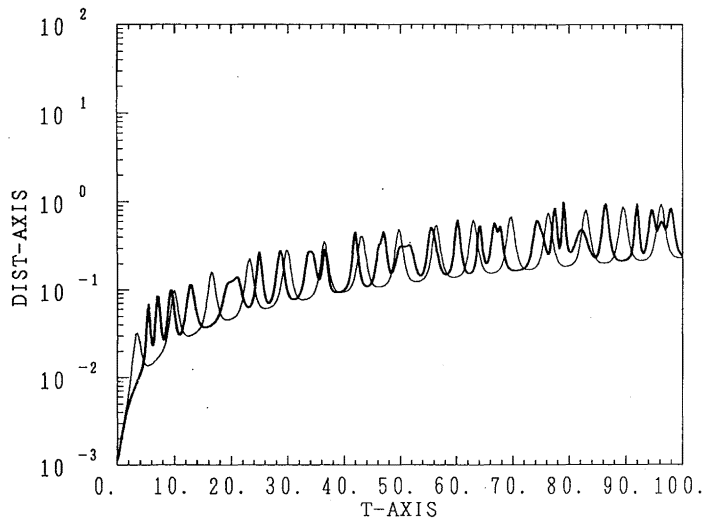


図8 NLSの2つの軌道間の距離 $d(T)$. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0$. 一方の軌道の初期値は(6), (7). 他方の軌道の初期値は(6), (7)で $a_0=1.0001$ と変えたもの。細い実線は $x=0.7x_c$, 太い実線は $x=0.18x_c$.

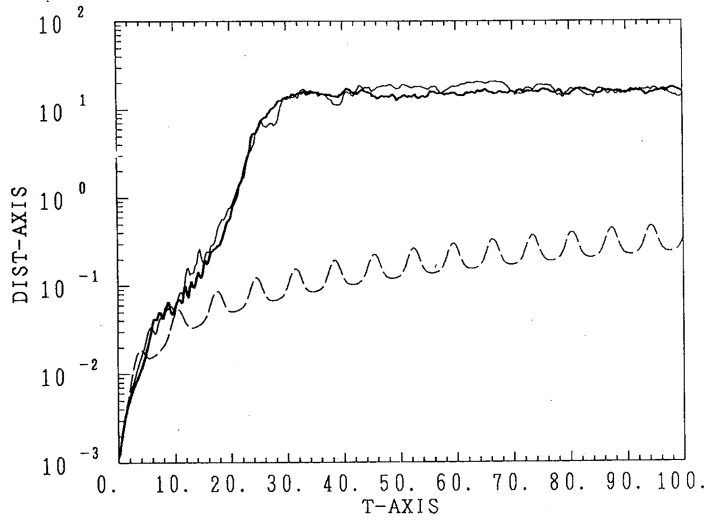


図9 MNLSの2つの軌道間の距離 $d(T)$. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0.0936\dots$. 軌道の初期値は図8と同じ. 破線は $x=0.7x_c$, 細い実線は $x=0.35x_c$, 太い実線は $x=0.18x_c$.

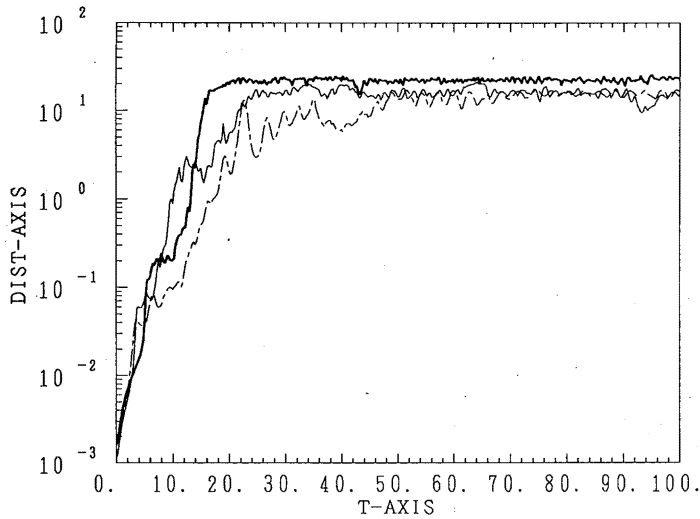


図10 MNLSの2つの軌道間の距離 $d(T)$. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0.01$. 軌道の初期値は図8と同じ. 一点鎖線は $x=0.7x_c$, 細い実線は $x=0.35x_c$, 太い実線は $x=0.18x_c$.

$x=0.18x_c$ ($m=5$) の場合, 図12は MNLS, $\gamma=0.0936\dots$ で $x=0.35x_c$ ($m=2$) の場合である. 破線は図8~10と同じ初期値のずらせ方をした場合である. また, 太い実線の場合は, 一方の軌道の初期値は(6), (7)であり, 他方の軌道の初期値は α の値のみを $\alpha=0.1001$ とずらせたものである. さらに, 細い実線

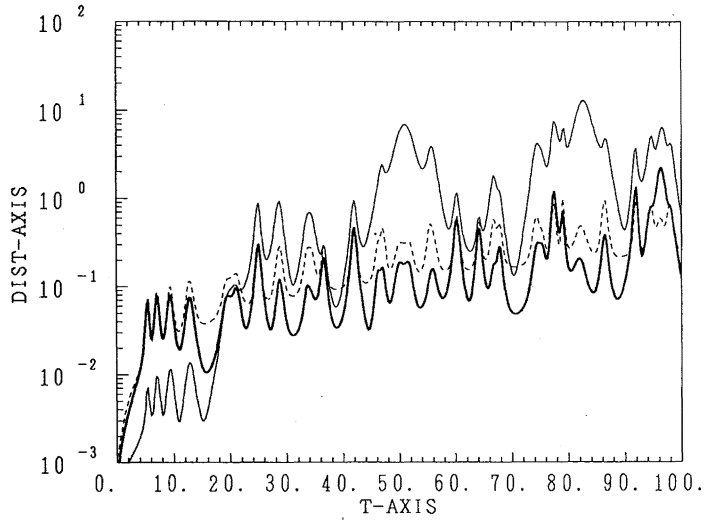


図11 NLSの2つの軌道間の距離 $d(T)$. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0$, $\alpha=0.18x_c$.

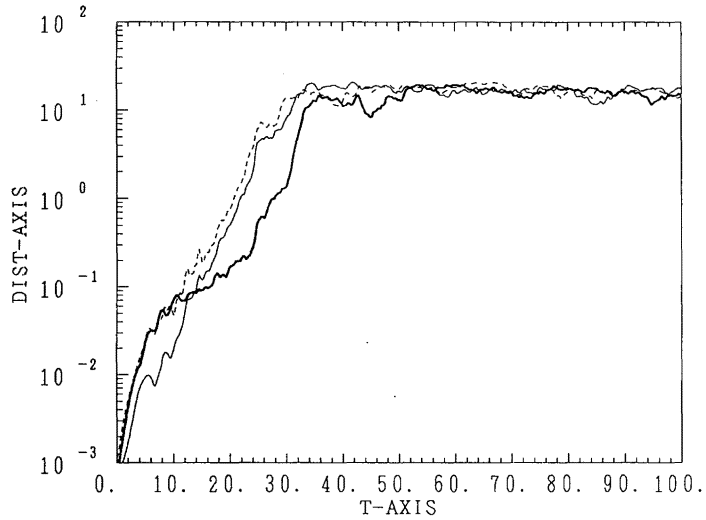


図12 MNLSの2つの軌道間の距離 $d(T)$. $\beta=0.1817\dots$, $\gamma=0.0936\dots$, $\alpha=0.35x_c$.

の場合には、一方の軌道の初期値はやはり(6), (7)であり、他方の軌道の初期値は(6), (7)で $V(X, 0)$ を

$$V(X, 0) = -0.0001 \sin(\alpha X)$$

とずらせたものである。図12では3つの場合の距離はほぼ同じように振舞う。図11では細い実線が他の

2つと少し異なる挙動を示しているように見える。しかし、全体としては線形的な増大とみるべきであろう。

5. ま と め

このノートでは MNLS と NLS の変調不安定波の時間発展を数値的に調べた。MNLS の場合には NLS の場合とちがって、解がカオス的になることが見出された。 $\gamma=0.0936\cdots$ のときには初期値の基本波と1つ以上の高調波が不安定域 $0 < x < x_c$ に含まれているならば、解はカオス的である。一方、 $\gamma=0.01$ のときには、初期値の基本波のみが不安定域に含まれる場合でさえも解はカオス的になった¹¹⁾。 $\gamma=0.01$ の場合の解は全体的には NLS ($\gamma=0$) の解とは全く異なるけれども、ある意味では $\gamma=0.0936\cdots$ の場合よりも、NLS の解に似ているということは大変興味深い。さらに小さい γ に対する計算およびリアプノフ指数の計算は今後の課題である。

この研究における数値計算は、九州大学応用力学研究所の FACOM VP-30、九州大学大型計算機センターの FACOM M-1800 及び FACOM VP-2600 を用いて行なわれた。

参 考 文 献

- 1) 例えば, Taniuti, T. and Yajima, N.: *Perturbation method for a nonlinear wave modulation*. I, J. math. Phys. **10** (1969) 1369.
- 2) Oikawa, M.: *Nonlinear behaviour of capillary-gravity waves near the inflection point of the dispersion curve*, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Uni. **38** (1991) 61.
- 3) Akylas, T.R. and Kung, T.-J.: *On nonlinear wave envelopes of permanent form near a caustic*, J. Fluid Mech. **214** (1990) 489.
- 4) Yuen, H.C. and Ferguson, Jr., W.E.: *Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Fluids **21** (1978) 1275.
- 5) Zakharov, V.E. and Shabat, A.B.: *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62.; Zakharov, V.E. and Manakov, S.V.: *On the complete integrability of the nonlinear Schrödinger equation*, Theor. Math. Phys. **19** (1974) 551.
- 6) 森 正武: FORTRAN 77 数値計算プログラミング, 増補版 (岩波書店, 1987).
- 7) Tanaka, M.: *On a model equation for waves on moderately deep water*, Res. Rep. Fac. Engng., Gifu Univ. No40 (1990) 75.
- 8) Caponi, E.A., Saffman, P.G. and Yuen, H.C.: *Instability and confined chaos in a nonlinear dispersive wave system*, Phys. Fluids **25** (1982) 2159.
- 9) Yuen, H.C.: *Instability and chaos in a nonlinear dispersive wave system*, Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, ed. by Tatsumi, T. (North-Holland, 1984) 145.
- 10) Ablowitz, M.J. and Herbst, B.M.: *On homoclinic structure and numerically induced chaos for*

the nonlinear Schrödinger equation, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990) 339.

- 11) Yoshinaga, T., Wakamiya, M. and Kakunani, T.: *Recurrence and chaotic behavior resulting from nonlinear interaction between long and short waves*, Phys. Fluids A **3** (1991) 83.

(平成4年5月29日受理)