

## f-面上壁面近くを移動する初期Gauss型暖水渦の Bachelor-MODON型渦による近似

増田, 章

九州大学応用力学研究所 : 助手

丸林, 賢次

九州大学応用力学研究所 : 技官

石橋, 道芳

九州大学応用力学研究所 : 技官

<https://doi.org/10.15017/4743819>

---

出版情報 : 應用力學研究所所報. 65, pp. 57-65, 1987-12. 九州大学応用力学研究所  
バージョン :  
権利関係 :



## $f$ -面上壁面近くを移動する初期 Gauss 型暖水渦の Bachelor-MODON 型渦による近似

増 田 章<sup>†</sup> 丸 林 賢 次<sup>††</sup>  
石 橋 道 芳<sup>††</sup>

### 概 要

暖水渦の壁面近くでの挙動を調べるため、安田他(1985)と同様の数値実験を行った。比較のための解析的模型として、定性的に渦糸、定量的に Bachelor-MODON 型渦を調べる。Bachelor-MODON 型初期渦は、角をまわっても変形せず安定であり、その移動速度は理論値と 10%程度の誤差内で一致する。一方、壁面近くに置いた初期 Gauss 型渦は、急速な変形を経た後に Bachelor-MODON 型渦で良く近似されるものに落ち着く。即ち移動速度の推定誤差は 20%程度以内に収まる。また渦の形自体も、渦辺縁で前後非対称性を伴うものの、概ね Bachelor-MODON 型渦で近似できた。

**Key words:** translation velocity along the wall, Bachelor-MODON type eddy, initially Gaussian eddy

### 1. は じ め に

よく知られているように、黒潮続流域北方、湾流北方には、これらの強流から切離されてできる孤立暖水渦が存在する<sup>1)</sup>。その挙動(とくに移動方向)は複雑で、いろいろな方向に進む例が観測されており<sup>2)</sup>、暖水渦近辺の海流系、他の渦、陸岸・海底地形、 $\beta$ -効果など混み入った影響が考えられている<sup>3)</sup>。最近、安田他<sup>3)</sup>(以後 YOM と略記する)は、この暖水渦の挙動に関し、興味深い考察と数値実験を発表した。しかし  $f$ -面上、非粘性の場合についても、解明すべき不明な点が数多く残っている。本論文では、YOM と同様の数値実験を行い、 $f$ -面上の壁面近くの暖水渦の移動速度の評価を論じる。とくに、Bachelor<sup>4)</sup>-MODON<sup>5)6)</sup> 型の渦模型と比較することにより暖水渦の挙動の一側面を流体力学的に明らかにしたい。

本論にはいる前に基礎的な仮定と YOM の結果をまとめておく。下層静止の二層模型を  $f$  面上で考える(reduced gravity model)。 $\phi$  を流線関数とする非粘性準地衡流方程式<sup>3)</sup>

<sup>†</sup> 九州大学助手

<sup>††</sup> 九州大学技官

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - \gamma^2\psi) + Q \cdot J(\psi, \nabla^2\psi - \gamma^2\psi) = 0 \quad (1.1)$$

を出発点に置く。ここに  $Q$  は非線型度 (または渦の振幅),  $t$  は時間,  $\nabla^2$  は Laplacian,  $J$  は Jacobian 演算子を表わす。また渦の半径等を基にして適当な無次元化を施してある。径数  $\gamma$  は変形半径の逆数であり密度成層の効果を示す。とくに  $\gamma^2=0$  のときは、普通の二次元非発散流を表現する。この場合を以後、時々ポテンシャル流と呼ぶことがある。計算は一辺が 10 の正方形で行う。

初期時刻  $t=0$  に次の Gauss 型渦を与える：

$$\psi = e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad (1.2)$$

壁面 ( $x=0$ ) 近く,  $(x_0, y_0)$  を中心とするこの渦は時計と同じ方向にまわり、壁面に沿っても時計まわりに移動する (図 3, 4 参照)。その移動速度  $U$  は, (1) 渦の振幅  $Q$ , (2) 変形半径 (の逆自乗)  $\gamma^2$ , (3) 壁面からの距離  $x_0$  の三つの径数によって決まる。その結論は次のとおりであった<sup>3)</sup>：

- (i)  $U$  は渦の強さ  $Q$  に比例する。
- (ii)  $\gamma$  が大きい程,  $U$  は小さい。
- (iii)  $x_0$  が大きい程,  $U$  は小さい。但し、ポテンシャル流の渦糸模型<sup>4)</sup>から予想される  $U \sim 1/x_0$  よりも急激に減衰する。

## 2. 比較のための解析模型

YOM<sup>3)</sup>の結論のうち (i) は当然である。(1.1) の方程式では時間発展は  $Q$  のみで決まり、他の径数が同じならば、 $Q = \text{一定}$  で全ての現象が同じでなければならないからである。つまり、計算誤差を除けば厳密に  $U$  と  $Q$  は反比例すべきものである。(ii), (iii) の性質を定性的に説明するには、次のような変形半径を考慮した渦糸模型が便利であろう。なお、この渦糸模型は、本論とは全く独立に Flierl<sup>7)</sup>, Umatani and Yamagata<sup>8)</sup>でも扱われていることを注記しておく。前者では孤立渦の力学、後者では湾内の急潮に関連して論じられている。

### 2.1 渦糸模型

ポテンシャル流の理論で知られる渦糸は (1.1) で  $\gamma^2=0$  とおいたものに相当し、 $r^{-1}$  の裾野をもつ。これに対し、密度成層の効果を表わす  $\gamma^2 \neq 0$  の場合は  $\exp(-\gamma r)$  型の裾野をもつ。半径  $a$  (小), 円周速度  $V$  の暖水渦が壁面から  $x_0$  の所にあるとしよう。鏡像渦糸の誘起する速度場から移動速度  $U$  は

$$U = V \cdot \frac{K_1(2\gamma x_0)}{K_1(\gamma a)} \quad (2.1)$$

となると考えられる。但し、 $K_1$  は 1 次の第 2 種変形 Bessel 関数である。 $\gamma \rightarrow 0$  では

$$V \sim \frac{2\pi a U}{4\pi x_0} = \frac{\text{循環}}{4\pi x_0} \quad (2.2)$$

となりポテンシャル流渦糸と同じ結果を得る。

具体的に (2.1) を見てみよう。図 1 (a) に  $a=1$  としたときの

$$\frac{V}{U} = \frac{K_1(2\gamma x_0)}{K_1(\gamma a)} \quad (2.3)$$

を  $\gamma^2$  の関数として示す。実細線、点線、実太線、破線の順に  $x_0=1, 1.33, 1.66, 2.0$  を表わす。図 1 (b) は  $\gamma^2=0$  のときの値を 1 としたただけであとは (a) と同じである。 $\gamma^2=0$  の場合に較べ、 $\gamma^2$  が大きい程、壁 (鏡像渦糸) との相互作用が弱くなることを示している。図 2 は、同じ内容を、壁からの距離  $x_0$  に対し

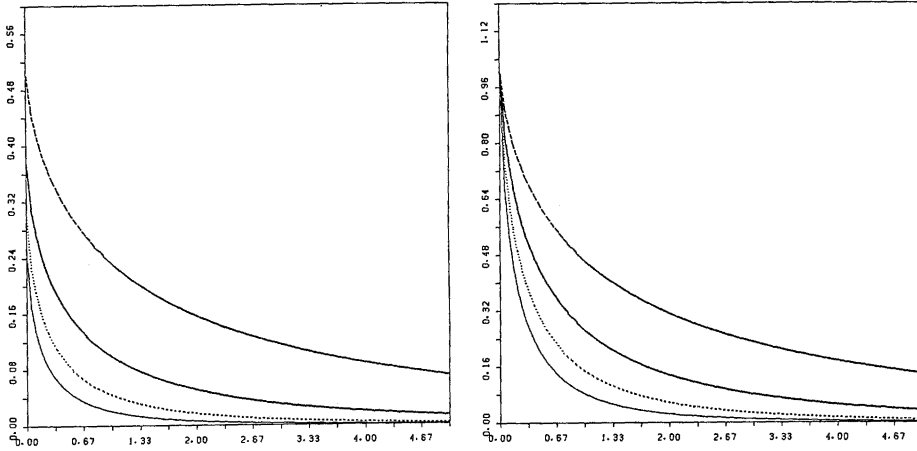


図 1 渦糸模型に基づく、移動速度  $U$  の  $\gamma$  と  $x_0$  に対する依存。小さな半径  $a$  の渦糸が周上速度  $V$  をもつとすると、 $U/V = K_1(2\gamma x_0)/K_1(\gamma a)$  を  $\gamma^2$  に対して画いたもの (a)。実細線、点線、実太線、破線はそれぞれ渦糸の離岸 (壁) 距離  $x_0$  が 1, 1.33, 1.67, 2.0 を表わす。 (b) 図は  $\gamma^2=0$  のときを 1 とする基準化を施したもの。  $\gamma^2=0$  が通常の渦糸に対応する。

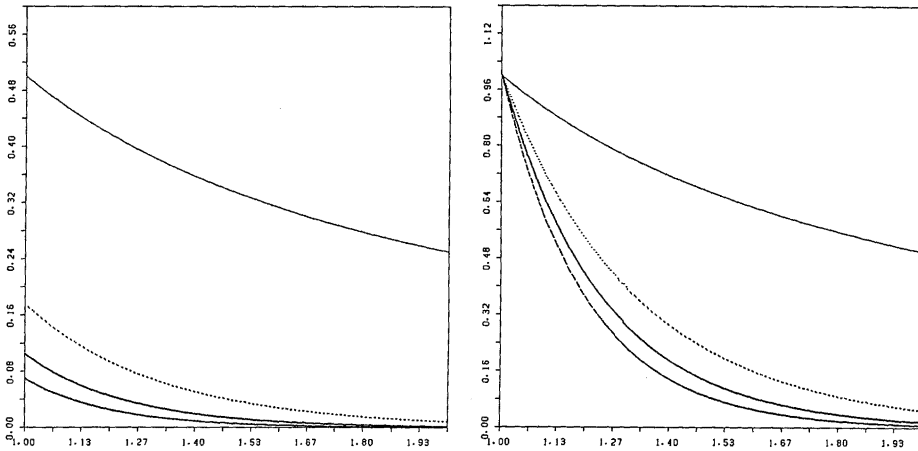


図 2 図 1 と同様。但し横軸を  $x_0$  にとり、 $\gamma^2$  を径数とした (実細線、点線、実太線、破線がそれぞれ  $\gamma^2=0, 1.66, 3.67, 5.0$  に対応)。(a) と (b) の関係は図 1 に同じ。

て画いたものであり右側の(b)も図1と同じ主旨である。実細線、点線、実太線、破線は  $\gamma^2=0, 1.66, 3.66, 5.00$  を表わす。 $\gamma^2=0$  のときの  $r^{-1}$  と  $\gamma^2 \neq 0$  のときの指数的減衰を比較すれば  $\gamma$  の効果は明らかである。

## 2.2 Bachelor-MODON 型渦模型

前記の渦糸模型は定性的傾向を知るには良いが定量的となると具合が悪い。実際の渦は有限域に広がっているからである。とくに好ましくないのは、半径  $a$  の採り方に結果が依存しすぎる点である。 $\gamma^2=0$  の場合は  $r^{-1}$  の裾野に対応して循環が  $a$  の採り方に依らず一意に決まるのに対し、 $\gamma^2 \neq 0$  では指数的裾野が循環をあやふやな量にしてしまうのである。また、後でもわかるが、 $\gamma^2$  大のとき、有限域の影響は大きくて無視できない。幸い Bachelor<sup>4)</sup> に記述されているように有限渦域をもつ単純な模型が存在する。これを  $\gamma^2 \neq 0$  の場合 ( $\beta$  を含んでもよい) に拡張した模型も海洋中規模渦の研究で知られている<sup>5)6)</sup>。MODON と呼ばれるものがこれである。以後これを B-M 渦と略記する。

詳しくは文献<sup>6)</sup>に譲り、必要な範囲で B-M 渦を説明しておこう。 $y=0$  なる壁(図1参照、但し図では直角だけ傾いている)に沿って半径1の半円内に渦位分布をもつ渦が単位速度で動くとき、その一つの解は

$$\begin{cases} \psi = \left( \frac{\gamma^2}{\nu^2} \right) \left\{ \left( \frac{\gamma^2 + \nu^2}{\gamma^2} \right) r - \frac{J_1(\nu r)}{J_1(\nu)} \right\} \sin \theta, & 0 \leq r \\ \psi = \frac{k_1(\gamma r)}{K_1(\gamma)} \sin \theta, & 1 \leq r \end{cases} \quad (2.4)$$

で与えられる。但し、 $J_1$  は1次の第1種 Bessel 関数、 $(r, \theta)$  は渦中心(壁上)からみた極座標である。また  $\nu$  は、 $\psi$  と  $\phi$  の一階微分が連続であるという要請から

$$\frac{J_2(\nu)}{\nu J_1(\nu)} + \frac{K_2(\gamma)}{\gamma K_1(\gamma)} = 0 \quad (2.5)$$

を解いて決まる。 $J_2, K_2$  はそれぞれ2次の第1種 Bessel 関数、第2種変形 Bessel 関数を表わす。実は、 $\gamma$  を与えたとき (2.5) をみたと  $\nu$  は一意でない<sup>6)</sup>。しかし半円の渦領域内で定符号という条件をつければ最小の  $\nu$  が定まる。以後も、この  $\nu$  に対応するものを B-M 渦と呼ぶ。この模型によれば、渦の半径  $a_*$ 、最大  $\psi$  値  $Q_*$ 、変形半径  $\gamma_*^{-1}$  を与えれば、その移動速度  $U_*$  が決まるわけである。

なお B-M 渦は半円形領域内で、渦位が(移動座標系で観た)流線関数の線型関数になるというものである<sup>4)5)6)</sup>。弱い非線型分布をもつ歪んだ渦の模型への拡張が考えられるが、これは別論文で扱う予定である。

## 3. 数値実験と Bachelor-MODON 型渦の比較

方程式(1.1)の初期値問題を、差分法による通常の方法<sup>3)</sup>で解く。比較のため YOM<sup>3)</sup>と同じ記法と条件を採用し、一辺10の正方形領域内で時間積分する。計算上の諸変数(時間きざみ、格子間隔)もほぼ YOM<sup>3)</sup>と同じである。

図3(a)に、前節に述べた B-M 型解析解を流線関数の等高線(実線は正值、点線は負値)により示す。 $|\psi|$  の最大値  $\times 0.1$  を等高線間隔とするが、これは以下も同様である。この例では  $\gamma^2=2$ 、半径  $a=2$ 、最

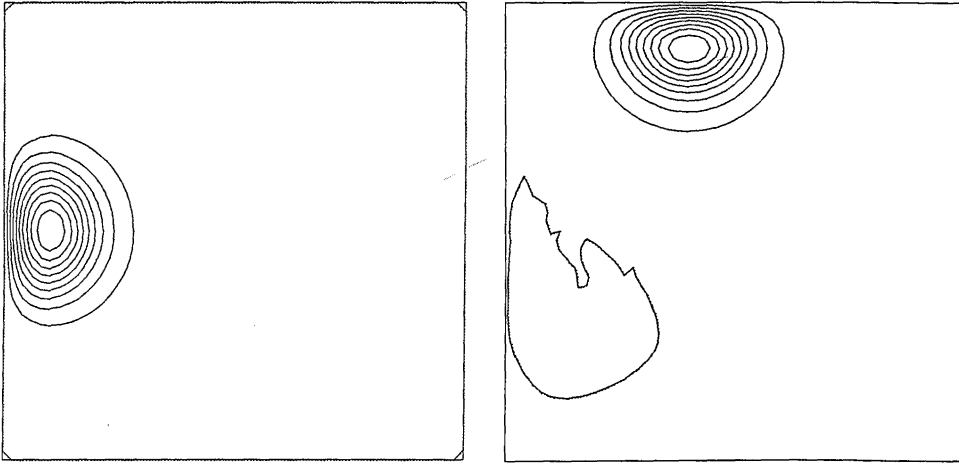


図3 Bachelor-MODON 型渦の発展. この場合の実験条件は  $\gamma^2=2$ , 半径  $a=2$ , 最大  $|\phi|$  値  $Q=10$  である. 等高線間隔は  $Q \times 0.1$  であり以下の図でも同じとする.  
 (a) :  $t=0$  での解析解流線 (実線が正值, 点線が負値を表す).  
 (b) :  $t=4.0$  での渦の流線. 初期の形を保ったままほぼ等速で移動していることがわかる. 左側中ほどは計算誤差雑音である.

大  $|\phi|$  値  $Q=10$ , 中心  $y$  座標  $y_0=5$  である. 移動座標系でなく静止系で見ているので, (2, 4) からみえるように, 渦領域はきっちりした半円にみえない. この解析解を初期値として時間積分すると, (暖水) 渦は壁に沿って北上\*し, 角をまわって更に東に進む. 図3 (b) は  $t=4.0$  における流れである. 西側中程 (渦の元位置附近) に計算誤差による雑音が残っているほか, エネルギーの分散はない. 初期値  $t=0$  (a) と  $t=4.0$  (b) の渦を重ねてみると判るが, 渦は完全と言ってよい程, 変形していない. 角をまわる際に相当の変形を蒙ることを考え合わせれば, B-M 渦がこの方程式の範囲内で非常に安定であることが判る (重力波, Rossby 波, 粘性などが存在する場合は別である). なお, この場合の解析解の理論的移動速度  $U$  は約 1.88 である. 実験で  $t=4.44 \sim 4.54$  区間の平均速度は  $U=1.845$ ,  $t=4.49 \sim 4.54$  区間の平均速度は  $U=1.998$  となった. 従って  $U$  には 10% 程度の計算誤差がありうると見なければならない. 無限領域でなく, 有限な正方形ということの影響もあるかもしれないが,  $\gamma^{-1}=1/\sqrt{2} \ll 5$  を考えると, その影響は小さいと思われる.

以上の結果をふまえて, 初期 Gauss 型渦の実験を行う. 図4に, そのような初期値の例を示す.  $(x_0, y_0)=(1.2, 7.0)$ , 最大  $|\phi|$  値  $Q=10$ ,  $\gamma^2=2$  の場合である. 時間が進み, 暖水渦が北壁中程に達した時 ( $t=3.72$ ) の流線関数を図5 (a) に画く. ここには示さないが, 初期 Gauss 渦は急速に変形して図5 (a) と殆ど同じ形になり, 後は, その形を保持したまま, ほぼ等速度で壁に沿って進む. 角をまわる時における変形を除いて, やはり安定であることが確かめられている.

\* 方位は意味がないが, ここでは説明の都合上, こう呼ぶ.

図5 (a) の流線は  $\psi=0$  の線 (実線と点線が重なり合っている所) を除き, 前出の B-M 渦 (図4 (b)) に非常に良く似ている。そこで初期 Gauss 渦が殆ど変形せず等速度で進むようになった所 (実際は北壁中程) を B-M 渦で近似できないか考えてみる。 $|\psi|$  が最大値をとる点の近く半径程度以内の格子点につき, 最良近似となるように近似模型渦の中心位置  $(x_0, y_0)$ , 半径, 振幅 ( $\sim Q$ ) を決める。流線関数値の差の自乗を比較格子点上で加えて, これを最小になるようにしたわけである。こうして求めた B-M 渦を図5 (b) に示す。実験 (図5 (a)) の方が, 多少滑らかさに欠け, 辺縁部 (4 $\sim$ 0) で前後の非対称性が認められるといった違いはあるものの, 全体の形としては良く一致していると言ってよい。最良近似 B-M 渦の径数が決まるとその移動速度  $U$  も解析解から推定できる。但し,

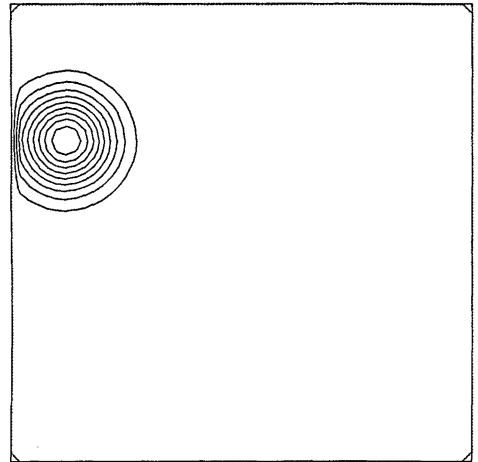


図4 初期 Gauss 型渦の流線 ( $t=0$ ).  $\psi = \exp \{ -(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \}$  の分布で中心位置  $(x_0, y_0) = (1.2, 7.0)$ , 最大  $|\psi|$  値  $Q=10$ ,  $\gamma^2=2$  の場合である。この後急速に変形して以後定常的な形で壁面に沿って進む。

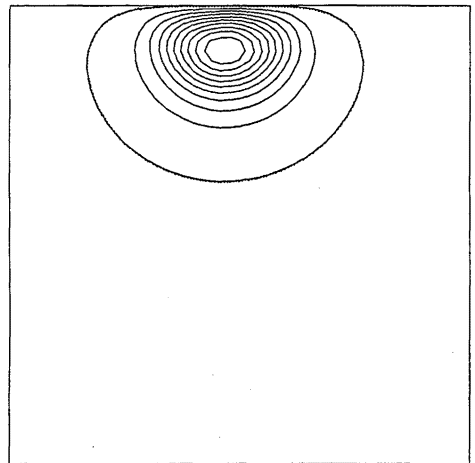
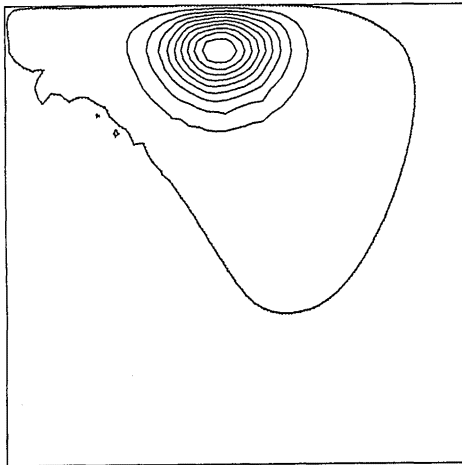


図5 (a): 図4を初期値とする渦の  $t=3.72$  時刻での流線関数, 図3 (または図5 (b)) の Bachelor-MODON 型渦に較べ, 渦辺縁部で前後非対称性が認められ滑らかさに欠ける。  
(b): (a)の渦を本文で説明しているような手順で最も良い近似となるように決めた Bachelor-MODON 型渦の流線関数。(a)と良く似ていることが判る。

この場合、実験してみないと  $U$  の推定ができないので別の方法も考えてみた。初期 Gauss 渦の最大  $|\phi|$  値  $Q$ 、その値をとる点の離岸距離は、時間発展の後あまり変化しないことに注目する。上の二つの量と  $\gamma$  を与えればやはり B-M 渦が決まるので  $U$  が推定できる。

図 6 は、こうして推定した移動速度  $U$  を実験から求めた値と較べたものである。ここでは  $\gamma^2$ -依存を見るため、初期 Gauss 渦の振幅 ( $|\phi|$  最大値)  $Q$  を 10、渦中心の離岸距離  $x_c$  を 1.2 に固定した。図中 model-fitting 1 とあるのが最良近似 B-M 渦による推定を、model-fitting 2 とあるのが、初期 Gauss 渦分布のみに基づく推定を表わす。

先ず図 1 の渦糸模型と比較すれば、 $U$  と  $\gamma^2$  に対する依存の仕方が (1) 定性的には似ていること、(2)  $\gamma$  が大きくなると渦位領域の有限性の影響が強く出ることの二つが指摘される。

次に B-M 渦近似と比較すると、20%程度の誤差はあるものの、実験値を良く近似しているといえよう。10%の計算誤差が、解法上止むを得ないことを考えると悪くない結果である。図 5 で見た程度に形状が一致していれば、その移動速度が図 6 程度に一致することは期待して良かったのかもしれない。但し、全体の傾向として、同じ B-M 渦近似でも、第一の方法は大きめの、第二の方法は逆に小さめの移動速度を与えている。これは偶然の誤差ではないと思われるが将来の問題として残しておく。

#### 4. お わ り に

暖水渦の挙動、とくに f-面上壁面に沿う移動速度を調べるため安田他<sup>3)</sup>と同様の数値実験を行い、渦糸と Bachelor-MODON 型渦という二つの解析模型と比較した。

渦糸は、変形半径  $\gamma^{-1}$  を考慮すれば定性的には良い説明を与える。しかし、 $\gamma \neq 0$  では有限渦位領域でないため循環の取り方に恣意性が生じるという困難が生じる。実際、 $\gamma$  が大きい時、有限域をもつ渦とのずれが大きくなる (図 1 と図 6)。

一方、Bachelor-MODON 渦は、特殊な渦位分布をしているものの、有限渦位領域を有するという利点をもつ。初期条件として B-M 渦解析解を置く実験を行ったところ、(1) 角をまわるといふ大きな変形を受けても安定であり (2) 元の形が殆ど完全に保存され (3) 角から離れた壁面では理論値 (に近い) 速度で移動することが確かめられた。

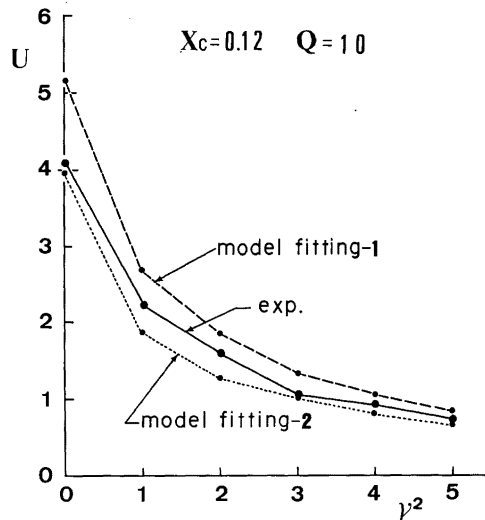


図 6 移動速度  $U$  の  $\gamma^2$ -依存を実験値と推定値で較べたもの。Model-fitting 1 は図 5 (b) の手続きによる推定、model-fitting 2 は初期条件のみから推定したもの (本文参照)。形状 (図 5 (b)) のみならず、移動速度  $U$  も 20% 程度の誤差で近似できていることが判る。

初期に Gauss 分布型の  $\phi$  をもち、壁面近くに位置する暖水渦は、急速に変形した後は、ほぼ一定の形と速度を保ちながら壁面に沿って移動する。この状態の渦は B-M 渦と同様非常に安定にみえる。渦運動がこうして定常的になったと見られる所で B-M 渦による最良近似を試みた。その際、B-M 渦を規定する中心位置、規模(半径)、振幅の三つを、中心部分の流線関数値の差の自乗和が小さくなるように決める。こうして求めた近似 B-M の流線模様は実験結果と良く一致した。但し、実験流線は、渦辺縁域で多少の前後非対称性をもち、滑らかさに欠けるようである。また壁に沿う移動速度  $U$  も、この近似 B-M 渦から計算できる。 $U$  を推定するのに、数値実験に基づく“観測”流線模様を用いず、初期 Gauss 渦の形状、振幅から B-M 渦を推定し  $U$  を計算することも試みた。その結果、実験から得られる移動速度が、第一、第二いずれの方法でも 20% 程度の誤差で近似できることが判った。

以上のように、初期 Gauss 渦が定常的に落ち着いた状態では B-M 渦による近似も悪くない結果を与える。但し、B-M 渦は有限渦位域をもつ孤立渦として非常に特殊なものである。第二節で触れたような一般化が望ましい。一方で、このように特殊かつ粗い渦で初期 Gauss 型渦(の落ち着いた状態)が、形状、移動速度ともかなり良く近似できることは注目値する。いろいろの初期分布からしても B-M 渦に近い状態に落ち着く可能性が示唆されるわけで流体力学的に面白い課題として残る。

ここでの考察は (1.1) の方程式系を基礎としたが、実際の海岸では第一節に述べたような複雑な要因が無視できない。とくに  $\beta$  効果や粘性の影響など、孤立渦についてみても、非線型がからむとよくわからない点が多い。数値実験のみならず、室内実験を加味して“渦の力学”を調べていく必要があらう<sup>9)</sup>。

## 謝 辞

暖水渦の挙動についての論文を送っていただいた安田一郎氏、同じくプレプリントをいただいた馬谷紳一郎氏に感謝します。数値計算は応用力学研究所電子計算機システム FACOM 360AP で行った。

## 参 考 文 献

- 1) Kawai, H.: Hydrography of the Kuroshio Extension, Kuroshio, its physical aspects (ed. Stommel, H. and Yoshida, K.), (University of Tokyo Press, Tokyo, 1972) 235.
- 2) Mizuno, K. and White, B.: Annual and interannual variability in the Kuroshio Current System, J. Phys. Oceanogr., 13 (1983) 1954.
- 3) 安田一郎, 奥田邦明, 水野恵介: 境界付近の渦についての数値実験—東北海区の暖水塊についての考察, 東北区水産研究所研究報告, 48, (1986) 67.
- 4) Bachelor, G. K.: An Introduction to Fluid Dynamics, (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).
- 5) Stern, M. E.: Minimal properties of planetary eddies, J. Mar. Res. 33, (1975) 1.
- 6) Flierl, G. R., Larichev, V. D., McWilliams, J. C. and Reznik, G. M.: The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies, Dyn. Atmos. Oceans, 5, 1.
- 7) Flierl, G. R.: Isolated Eddy Models for Geophysical Flows, Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics (1986), Woods Hole Oceanographic Institution, 78.
- 8) Umatani, S. and Yamagata, Y.: Evolution of an isolated eddy near a coast and its relevance

to the “Kyucho” (to appear in J. Oceanogr. Soc. Jap., 1987).

- 9) 増田章, 丸林賢次, 石橋道芳:  $\beta$ -面上の順圧孤立渦の挙動に関する室内実験および数値実験, 九州大学応用力学研究所所報, 第 65 号, (1987).

(昭和 62 年 6 月 1 日 受理)