

プラズマ膜の非線形波動

矢嶋, 信男
九州大学応用力学研究所 : 教授

仲里, 敏子

<https://doi.org/10.15017/4743815>

出版情報 : 応用力学研究所所報. 65, pp.463-472, 1987-12. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

プラズマ膜の非線形波動

矢嶋 信男^A 仲里 敏子^B

Key words: 薄膜, プラズマ振動, 表面波, 非線形波動, ソリトン, 変調不安定性

§1 はじめに

有限厚さのプラズマの表面波モードは, これまで, 金属薄膜の光学特性や高温プラズマシートの安定性との関連において調べられてきた^{1)~5)}. しかしながら, これらのモードの非線形過程については, 十分な研究は行われていない. ここでは, 考えている波の波長が膜の厚さにくらべて長い場合の非線形現象に着目して, その変調効果を調べることにする.

簡単のために, 図1に示すような板状のプラズマを考える. プラズマの厚さを $2d$ とし, 磁場はないものとする. 平衡状態でのプラズマの密度 $n(x)$ は

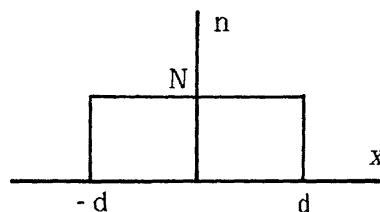
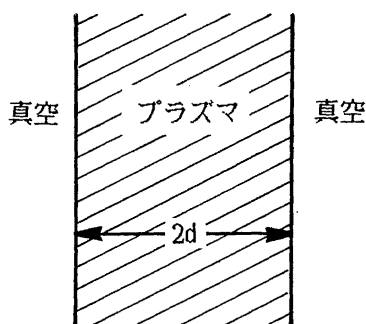
$$N(x) = \begin{cases} N_0 & (|x| \leq d) \\ 0 & (|x| > d) \end{cases} \quad (1)$$

であるとする. ここで, 座標軸は膜に垂直に x 軸をえらび, 膜に平行に y 軸をえらんだ. これまでになされている線形解析によれば, y 方向に伝播する波数 k , 振動数 ω の波は, 次の分散式を満たす.

$$\omega = \omega_{\pm}(k) = \omega_e \left(\frac{1 \pm e^{-2kd}}{2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

$$\omega_e^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m} \quad (\text{電子プラズマ振動数}) \quad (3)$$

m, e は電子の質量と電荷を表わす. このモードの分散曲線と振動のようすが図2, 3に示されている. $\omega = \omega_+$ に対しては, $kd \rightarrow 0$ の長波長極限で振動数は

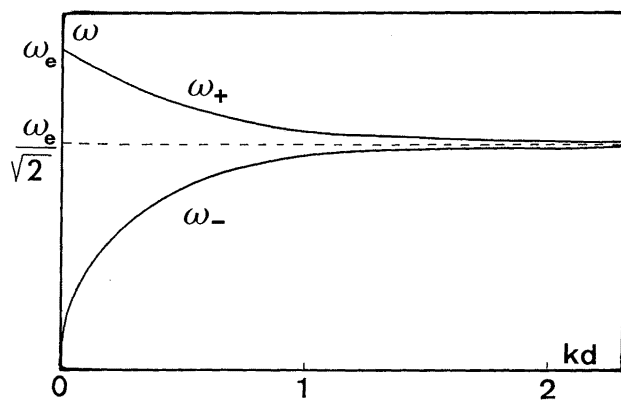


第1図 プラズマ膜の構造

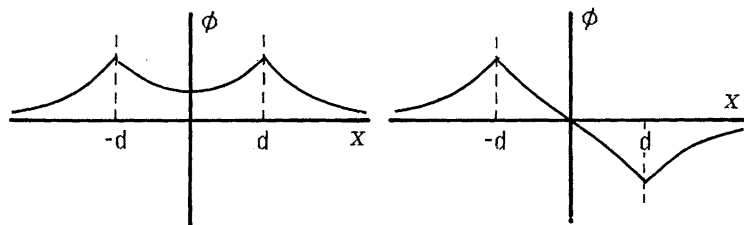
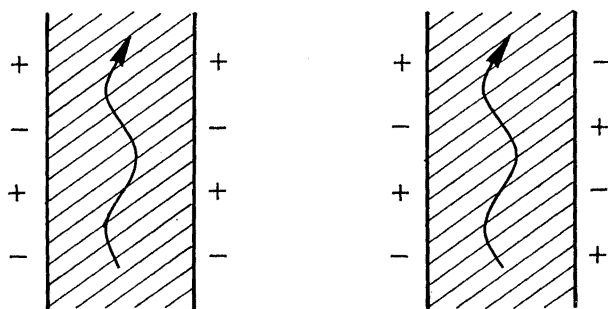
^A 応用力学研究所教授

^B 東芝エネルギー研究所勤務

ω_e に等しくなるが、 k とともに減少して、 $kd \gg 1$ の短波長極限では $\omega = \omega_e / \sqrt{2}$ となって、いわゆる半無限プラズマの表面波モードに一致する。このモードは、図3から判るように、膜の両側で荷電が逆位相で振動するモードで、膜の左右でポテンシャル差が存在する。一方、 $\omega = \omega_-$ のモードは $kd \rightarrow 0$ で $\omega \sim \omega_e \sqrt{kd}$ のようにふるまって、 $kd \rightarrow \infty$ でやはり表面波モードに移行している。このモードでは、膜の両



第2図 分散曲線



第3図 膜振動の固有モード (左 ω_+ , 右 ω_-)

側の荷電状態は同位相になっていて、膜内ポテンシャルは x 方向にほとんど平坦である。

これらのモードのうちで、外部から入射する光と強く結合するのは ω_+ のモードであるので、ここではとくに高周波モードに対してのみ考察することにする。§2 では線形波を記述する方程式を導いて、とくに長波長領域で有効な近似式を求める。§3 ではそれに対する非線形効果を考察される。われわれは、長波長波動に着目しているの、電子自体の非線形運動からの寄与は小さい。その場合、問題となる非線形効果はポンダロモティブ力である。この効果を考慮することによって、系は非線形変調に対して安定でなくなる。§4 で、この不安定条件が調べられる。

§2 線形近似

波がないときの電子密度は (1) で与えられているとする。波にともなった密度揺動を n 、速度の x 成分を u 、 y 成分を v 、静電ポテンシャルを ϕ と書くと、プラズマ領域 ($|x| \leq d$) に対して

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial y}(Nv) = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4c)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 4\pi ne \quad (4d)$$

が成り立つ。プラズマの外側 ($|x| > d$) では、真空状態を仮定しているの、(4d) で $\bar{n}=0$ とおいたもの、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0 \quad (5)$$

が成立している。

(4a)~(4d) から n , u , v を消去すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_e^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0 \quad (6)$$

を得る。(4d) で $n \neq 0$ とすると (6) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_e^2 \right) n = 0 \quad (7)$$

という通常のプラズマ振動を与える。これは、bulk mode に相当している。われわれは、プラズマが境界を持つことによって生じる波動モード、すなわち表面モードに興味を持っているので、このモードは考えない。そこで $n=0$ として、プラズマ内部でも (5) のタイプのラプラス方程式が満たされているものとする。(5) の形式解が

$$\phi_p(x, y, t) = \cos\left(x \frac{\partial}{\partial y}\right) A(y, t) + \sin\left(x \frac{\partial}{\partial y}\right) B(y, t) \quad (13)$$

で与えられることは、代入してみれば明らかである。とくに、プラズマ内部のポテンシャルであることを明記する意味で ϕ_p と書いた。この内部解を適当な条件のもとに外部解をつなげばよい。

真空領域 ($|x| > d$) における静電ポテンシャルを ϕ_v としよう。 ϕ_v は $|x| \rightarrow \infty$ で 0 という条件を満たさ

なければならない。すなわち、

$$\phi_v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_k(t) e^{iky - |k||x|} dk \quad (|x| > d) \quad (14)$$

を得る。一方、(4b) 式を $x=d$, または $x=-d$ をはさんだ微小領域 $[\pm d - \epsilon, \pm d + \epsilon]$ で積分すると、

$$[\phi(x, y, t)]_{\pm d - \epsilon}^{\pm d + \epsilon} = \frac{m}{e} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\pm d - \epsilon}^{\pm d + \epsilon} u dx$$

となる。 u が境界において特異性を持たないとすれば、右辺の積分は $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で 0 である：

$$\phi(\pm d + \epsilon, y, t) = \phi(\pm d - \epsilon, y, t) \quad (15)$$

また、ここで、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\pm d - \epsilon, y, t) = \phi_p(\pm d, y, t), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\pm d + \epsilon, y, t) = \phi_v(\pm d, y, t)$$

に注意すれば、(15) は

$$\phi_v(\pm d, y, t) = \phi_p(\pm d, y, t) \quad (16)$$

という連続条件を与える。そこで、これを (14) に入れて逆 Fourier 変換を用いると、

$$a_k(t) = e^{ikd} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \phi_p(\pm d, y, t) dy \quad (17)$$

を得る。ここで d の前の複号は、領域 $x > d$ における a_k に対しては正号を、 $x < -d$ の a_k に対しては負号を用いる。そこで、これを (14) に入れて、 $x > d$ に対して、

$$\phi_v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ik(y-z) - |k|(x-d)} \phi_p(d, z, t) \quad (18a)$$

を得る。また $x < -d$ に対しては、

$$\phi_v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ik(y-z) + |k|(x+d)} \phi_p(-d, z, t) \quad (18b)$$

である。 k と z に関する積分を入れかえて、 k についての積分を先に行うと、最終的に

$$\phi_v(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z-y-i(x-d)} - \frac{1}{z-y+i(x-d)} \right] \phi_p(d, z, t) dz & (x > d) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z-y+i(x+d)} - \frac{1}{z-y-i(x+d)} \right] \phi_p(-d, z, t) dz & (x < -d) \end{cases} \quad (19a, 19b)$$

を得る。

内部解と外部解を完全につなぐためには、(16) の連続条件だけでは不十分である。 ϕ の微係数についてのつなぎの条件が必要になる。それは (4d) を境界をはさむ x の微小領域 $[\pm d - \epsilon, \pm d + \epsilon]$ で積分することによって得られる。プラズマは非摂動状態において密度分布が階段関数状をしているとしたので、プラズマ中に密度変動が生じるとプラズマと真空の境界には表面電荷が誘起される。これを $\sigma_{\pm}(y, t)$ と書くと、

$$\sigma_{\pm}(y, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pm d - \epsilon}^{\pm d + \epsilon} n(x, y, t) dx \quad (20)$$

と表わすことができる。この量を用いれば (4d) は

$$\left. \frac{\partial \phi_v}{\partial x} \right|_{\pm d} - \left. \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right|_{\pm d} = \pm 4\pi e \sigma_{\pm} \quad (21)$$

を与える。

(19) を (21) に代入して、 ϕ_v を消去しよう。(19) から

$$\frac{\partial \phi_v}{\partial x} \Big|_{\pm d} = \pm \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-y} \frac{\partial \phi_p(\pm d, z, t)}{\partial z} dz$$

を得るので、これを (21) に入れて、

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial x} \Big|_{\pm d} \mp H \frac{\partial \phi_p(\pm d, y, t)}{\partial y} = \mp 4\pi e \sigma_{\pm} \quad (22)$$

となる。ここで H は Hilbert 変換で

$$Hf(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-y} f(z) dz \quad (23)$$

で定義されている。この Hilbert 変換に対しては、

$$H^2 f(y) = -f(y) \quad (24a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Hf(y) = H \frac{\partial f}{\partial y} \quad (24b)$$

$$H(\text{const}) = 0 \quad (24c)$$

などの性質はよく知られている。

(4a) を $x = \pm d$ をはさむ微小領域で積分して、(4b) を用いて u を消去すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sigma_{\pm} = \pm \frac{N_0 e}{m} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \Big|_{\pm d} \quad (25)$$

を得る。そこで、(13) と (22) を (25) に入れて最終的に、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 + \cot \left(d \frac{\partial}{\partial y} \right) H \right) \frac{\partial A}{\partial y} + \omega_e^2 \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \tan \left(d \frac{\partial}{\partial y} \right) H \right) \frac{\partial B}{\partial y} + \omega_e^2 \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

を得る。これらのモードに対して $A, B \sim e^{i(ky - \omega t)}$ を代入して、

$$H e^{iky} = 2i \operatorname{sgn}(k) e^{iky} \quad (28)$$

を用いると、次の分散式を得る。

$$(1) \quad A \neq 0: \omega^2 = (1 + \coth(|k|d))^{-1} \omega_e^2 \quad (29a)$$

$$\phi_p = \phi_0 \cosh(|k|x) e^{i(ky - \omega t)} \quad (29b)$$

$$(2) \quad B \neq 0: \omega^2 = (1 + \tanh(|k|d))^{-1} \omega_e^2 \quad (30a)$$

$$\phi_p = \phi_0 \sinh(|k|x) e^{i(ky - \omega t)} \quad (30b)$$

これらの分散式と固有関数は第2図ならびに第3図で示されているものに対応している。以下では、(30) で与えられるモードに対する非線形効果を考える。

§3 非線形効果

ここで考えている問題は、波長が膜厚 d にくらべて大きい場合の変調効果であるから、電子自身のもつ非線形効果の影響は小さい。というのは、運動方程式にあらわれる非線形項は必ず微分演算をとまなうからである。したがって、考えられるべき非線形効果は高周波振動が電子に与えるポンデロモティブ

力によってつくり出される。

(30b) で与えられる高周波静電ポテンシャルが電子に与える効果を考えよう。いま高周波場のつくる電場を

$$bf \quad E = \frac{1}{2} \{ \epsilon(x, t) e^{-i\omega t} + \epsilon^*(x, t) e^{i\omega t} \} \quad (31)$$

で与えられるとする。このとき、電子は

$$u \cong -\frac{ie}{2m\omega} \{ \epsilon(x, t) e^{-i\omega t} - \epsilon^*(x, t) e^{i\omega t} \} \quad (32)$$

でゆり動かされるため、これが圧力効果を生み出して電子密度にゆらぎをつくり出す。いま、電子の温度を T として、つくり出される密度ゆらぎを δn_e とすると、力の釣り合い条件から

$$\delta n_e T + m N_0 \overline{u^2} - e N_0 \Phi = 0 \quad (33)$$

が成立する。ここで、記号 $\bar{Q}$ は Q を高周波振動について平均することを意味する。また、 Φ は静電ポテンシャルの低周波成分である。低周波振動に対して中性条件をおくと $\Phi \sim 0$ とすることができて、 δn_e は

$$\delta n_e = -\frac{m N_0 \overline{u^2}}{T} = -\frac{1}{8\pi T} |\epsilon|^2 \quad (34)$$

と書くことができる。($\omega^2 \simeq \omega_e^2$ を用いた。)

電場ベクトル E は静電ポテンシャル ϕ_p の勾配として与えられる。波長の長い振動を考えているので、電場ベクトルは殆ど x 方向をむいていて、

$$E_x = -\cos\left(x \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial B}{\partial y} \quad (35a)$$

$$E_y = -\sin\left(x \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial B}{\partial y} \quad (35b)$$

で与えられる。したがって x についての最低次項のみを拾うと

$$\delta n_e = -\frac{1}{4\pi T} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 \quad (36)$$

を得る。

密度揺動 δn_e が存在するとプラズマ振動数は変調を受けて、

$$\omega_e^2 \rightarrow \omega_e^2 (1 + \delta n_e / N_0) \quad (37)$$

となる。このことを (27) 式で考慮すると、 $b = \partial B / \partial y$ に対して

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \tan\left(d \frac{\partial}{\partial y}\right) H \right) b + \omega_e^2 \left(1 - \frac{1}{4\pi N_0 T} \bar{b}^2 \right) b = 0 \quad (38)$$

が得られる。これが表面波モードの非線形変調を記述する方程式である。

(38) をもっと簡単な方程式に書き変えておこう。波長が十分に長いとして

$$\left[1 - \tan\left(d \frac{\partial}{\partial y}\right) H \right]^{-1} \simeq 1 + d \frac{\partial}{\partial y} H - d^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$$

を用いると、(38) は

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_e^2 \left(1 + d \frac{\partial}{\partial y} H - d^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{4\pi N_0 T} \bar{b}^2 \right\} b = 0$$

と近似することができる。いま (31) と同じように

$$b = \frac{1}{2}(\beta e^{-i\omega_e t} + \beta^* e^{i\omega_e t}) \quad (39)$$

とおくと、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_e^2 \right) b \simeq -i\omega_e e^{-i\omega_e t} \frac{\partial \beta}{\partial t} + c. c.$$

と近似できるので、最終的に次の式を得る。

$$i \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\omega_e}{2} dH \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\omega_e}{2} d^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\omega_e |\beta|^2}{32\pi N_0 T} \beta = 0 \quad (40)$$

§4 変調安定性

(40) は

$$\beta = E_0 e^{i\phi}, \quad \phi = Qy - \Omega t \quad (41a)$$

$$\Omega/\omega_e = -\frac{1}{2}|Q|d + \frac{1}{2}Q^2 d^2 - \frac{|E_0|^2}{32\pi N_0 T} \quad (41b)$$

という平面波解を持つ。この解の変調安定性を調べる。(41 a) の振幅が摂動を受けたと考える

$$\beta = (E_0 + b_1 e^{i\phi} + b_2 e^{-i\phi}) e^{i\phi} \quad (42a)$$

$$\phi = qx - \omega t \quad (42b)$$

とおいてみよう。(q, ω) は、それぞれ変調の波数と振動数をあらわしている。(42) を (41) に代入すると次の分散式を得る：

(i) $Q > q > 0$:

$$\omega/\omega_e = -\frac{1}{2}(1-2Qd)qd \pm \frac{1}{2}qd\sqrt{q^2 d^2 - |E_0|^2/(8\pi N_0 T)} \quad (43)$$

(ii) $q > Q > 0$:

$$\omega/\omega_e = -\frac{1}{2}(1-2qd)Qd \pm \frac{1}{2}\sqrt{\{(q-Q)d - q^2 d^2\}^2 + \frac{|E_0|^2}{8\pi N_0 T} \{(q-Q)d - q^2 d^2\}} \quad (44)$$

これらの分散式で根号内が正になる条件から安定条件が決められる。 $Qd < 1/4$ であれば、この安定条件は第4図に示すようになる。図から判るように、安定な平面波には振幅に上限があつて、

$$\frac{|E_0|^2}{8\pi N_0 T} < \begin{cases} q^3 d^2 & q \leq Q \\ q^2 d^2 - (q-Q)d & Q \leq q \leq q_c \end{cases} \quad (45)$$

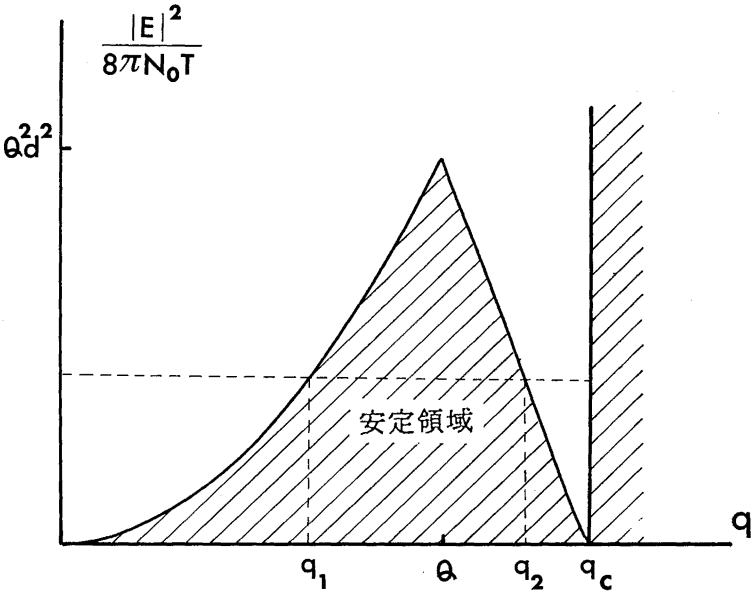
のときに安定となる。 q_c は

$$q_c = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4Qd}) \quad (46)$$

で与えられ、 $q > q_c$ では振幅によらず平面波は安定である。 $Qd > 1/4$ のときには q_c は複素数になって、安定条件は (45) で $q_c \rightarrow \infty$ としたものに等しくなつて、第5図に示すようになる。

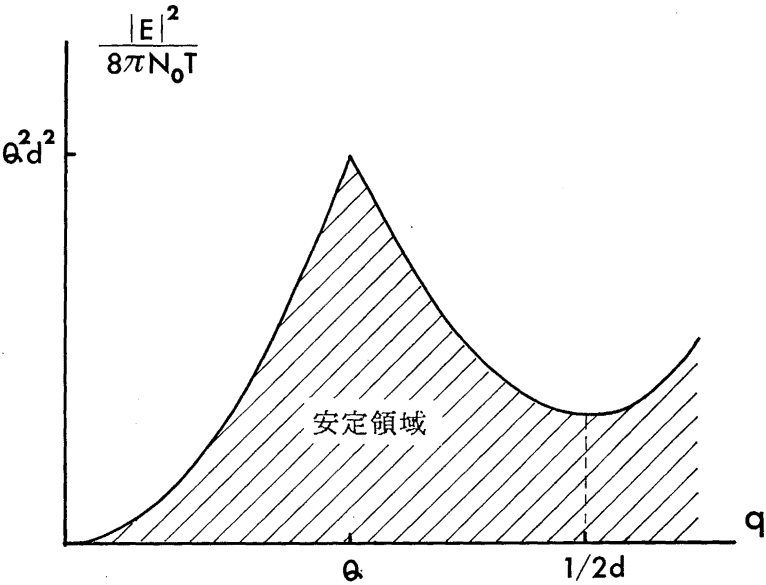
分散曲線の例を第6図に示す。これは第4図の場合について計算したもので、平面波の振幅として

$$|E_0|^2/8\pi N_0 T = 0.4 Q^2 d^2$$

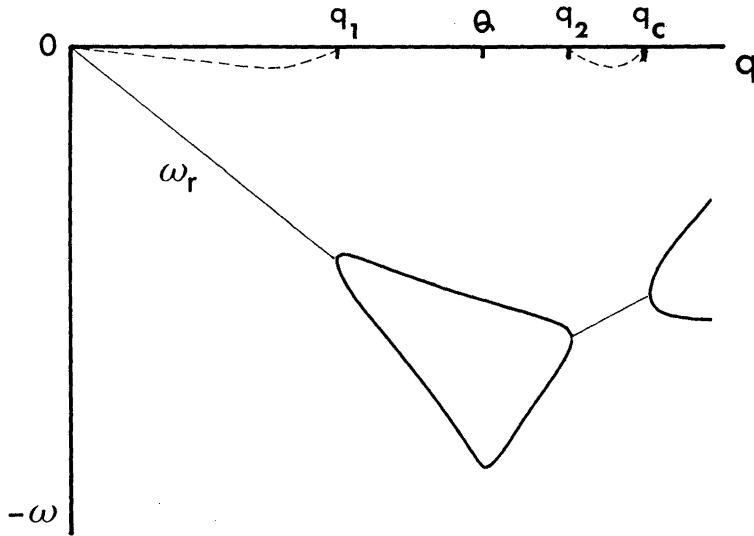


第4図 安定領域 ($Qd < 1/4$)

F4-5



第5図 安定領域 ($Qd > 1/4$)



第6図 変調波の分散曲線 ($Qd < 1/4$)
 実線は ω_r , 点線は成長率 γ を表わす。太線は安定な分散曲線を示す。

がとられている。このとき、

$$q_1 \leq q \leq q_2, \quad q \geq q_c \quad (47)$$

の範囲で系は安定となる。ただし、

$$q_1 = \sqrt{0.4}Q, \quad q_2 = \frac{1}{2d}\{1 - \sqrt{1 - 4Qd(1 - 0.4Qd)}\}$$

である。

§5 ま と め

ここでは、有限厚さのプラズマ膜の非線形高調波振動を考えた。有限振幅のために系は非線形変調に対して安定でなくなる。このような変調不安定性は、無限に拡がったプラズマの場合にも存在するが、そのときには分散効果は $q\lambda_D$ (λ_D = デバイ距離) のオーダーになる。したがって、ここでのとりあつかいは $d > \lambda_D$ のときにのみ有効である。電子温度が高くて $\lambda_D > d$ になると、膜振動のようすはバルク振動に似てきて、変調効果も Zakharov の予想に近くなる。すなわち、平面波は

$$\frac{|E_0|^2}{8\pi n_0 T} > q^2 \lambda_D^2 \quad (48)$$

で変調不安定となる⁶⁾。これはちょうど第4図の長波長部分で $d \rightarrow \lambda_D$ としたものに相当している。しかし、変調波長が短くなると、不安定性の様子は変化して、安定領域はいったん減少するが、 $q > q_c$ で再び安定化する。

ここでの考察は、波長のが厚さにくらべて長い場合にかぎられている。膜厚と同程度かそれ以下の波長の波の非線形効果は実用上重要な意味を持つが、非線形項が微積分演算を含むので、取り扱いが面倒になる。これについては、また別の機会に述べることにする。

文 献

- 1) R. H. Ritchie; Phys. Rev. **106** (1957) 874
- 2) E. N. Economou; Phys. Rev **182**(1969) 539.
- 3) R. A. Ferell; Phys Rev. **111** (1958) 1214.
- 4) A. Otto; Z. Phys. **185** (1965) 232
- 5) 金原榮, 藤原英夫著; 薄膜 pp. 193~232 (裳華房, 1986)
- 6) V. E. Zakharov; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **62** (1972) 1745

(昭和 62 年 6 月 4 日 受理)