九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

一方向繊維強化複合材料接着面におけるT型き裂問題：（その2）数値解析方法・結果および有限要素法による計算結果との比較

汪，文学
九州大学応用力学研究所 ： 助教授

高雄，善裕
九州大学応用力学研究所 ： 助教授

栖原，寿郎
九州大学応用力学研究所 ： 教授

https://doi.org/10.15017/4743799

出版情報：應用力學研究所所報. 65, pp.283-293, 1987-12. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

一方向繊維強化複合材料接着面におけるT型き裂問題
—(その2) 数値解析方法・結果および有限要素法による計算結果との比較

汪　文　学* 高　雄　善　裕+
栖　原　寿　郎+

概　　要

一方向繊維強化複合材料内部の接着面に垂直き裂と界面き裂が同時に存在する2次元のT型き裂問題についてその新しい弾性解析方法と若干の数値結果を示す．第1報で求めた積分方程式の数値解析にあたり，従来の Jacobi 多項式展開を使用せずに，Gauss-Chebyshev 積分公式だけを使用する新しい数値解析方法を提案する．これにより，積分方程式から容易に精度の良い連立一次代数方程式が得られる．この連立一次方程式を解くことにより，き裂先端における応力拡大係数やき裂表面の変位が求められる．今回の数値解析方法を検証するために，有限要素法を使った数値計算を行い，応力拡大係数に関する今回の結果と比較する．今回の手法による結果の方が従来の Jacobi 多項式展開によるものより有限要素法による結果に近い値を示す．

Key words: Composite Materials, T-shaped Crack, Debonding, Delamination, Numerical Method

1. 序

一方向繊維強化複合材料とその積層板は，そのすぐれた比剛性，比強度などにより，宇宙航空から機械，自動車等各方面にわたって用いられている．それに伴い，複合材料の単なる力学特性ばかりでなく，強度，破壊などの問題が重要な研究課題となってきた．複合材料のマクロな破壊機構や破壊強度などは内部き裂の各伝播様式と深く関連する．これまで，この内部き裂問題について，数多くの研究者が2次元または3次元的な各種のき裂パターンを用いて解析を行っている[1)~9)]．しかしながら，これらの大部分は界面に垂直なき裂と界面に沿うき裂が単独に接着面に近づくかまたは存在する場合の研究である．わ

* 九州大学大学院工学研究科応用力学専攻
+ 九州大学助教授，応用力学研究所
* 九州大学名誉教授

ずかに Goree と Venezia[7] や Lu と Erdogan[8)9)] が半平面あるいは帯板どうしの接着面に両き裂が同時に存在する問題の解析を行っている．それらの結果は繊維体積含有率が極めて小さい場合，つまり繊維間の距離が大きい場合には有効であるが，現実的な繊維体積含有率 0.2～0.7 の場合には直接適用できない．

前報[10)] において，現実的な繊維体積含有率に対応する繊維間隔(マクロ的には例えば 0°/90°/0° 系積層板の 0° 層間隔) を取ることができる解析モデルを考察し，連立特異積分方程式を導いた．

ところで，この種の積分方程式に従来用いられてきた Jacobi 多項式展開による数値処理法[7)9)] はかなり長い計算を要する．更に，最終的に得られる連立一次方程式を解くための補助条件の設定に問題が残る．解の収束と精度に対する疑点が述べられているが[9)] これらはこのかなり繁雑な数値処理過程や補助条件の設定に関係すると思われる．

そこで，本論文では，垂直き裂が一方向繊維強化複合材料内部接着面に同時に存在するいわゆるT型き裂問題について，補助条件の設定に充分な吟味を加え，Jacobi 多項式を使用せず，Gauss-Chebyshev 積分公式だけを使う，簡明な新しい数値処理方法を提案する．更に，今回の数値解析方法を検証するために，有限要素法による数値計算も行い，今回のものと比較する．数値計算例として，有限要素法の適用が容易であり，また従来，解析が試みられている，材料定数の異なる 2 つの等方性帯板接着面にT型き裂が存在する場合をとりあげる．

2. 数 値 解 析 法

2.1 T型き裂(図1)に対する積分方程式の新しい数値処理方法

前章で得られた複雑な積分方程式の解析的な解を求めるのは極めて困難であるので，数値解析を行う．前報[10)] の式 (119)*～(121) に示すような，解関数 $f_2(t)$, $f_3(t)$ の特異性が複素数で表現されている積分方程式，つまり界面き裂が絡む積分方程式に対して，従来より，$f_2(t)$, $f_3(t)$ を Jacobi 多項式に展開する数値解析法が用いられてきた[7)9)]．しかしながら，Jacobi 多項式展開による数値解析法は接着された 2 つの半無限平面の界面き裂問題に対しては有効であるが[11)]，それより複雑な問題，特に界面き裂と界面に垂直なき裂が同時に存在する問題に対しては，途中の解析と計算が極めて繁雑となり，解の収束や精度などの問題が生じる[9)]．更に，今回の問題では，両

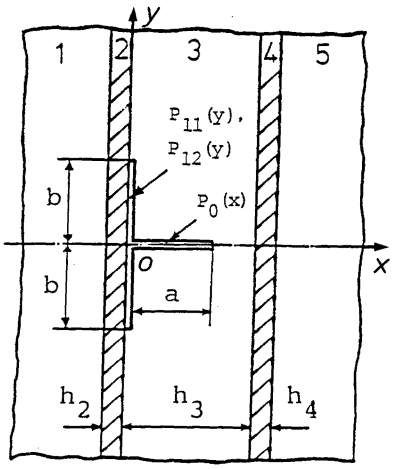

Fig. 1 Calculation model : a T-shaped crack at the interface in unidirectional fiber-reinforced composites

* 以降においても式番号 (1)～(128) は前報[10)] の式番号を示す．

き裂の相互作用がある上に，5つの部材間の相互作用もあるので一層複雑となっている．

したがって，本論文では，この種の問題に対する新しい数値解析方法を試みる．$f_1(t)$ に関しては既存の取扱いに従うものの，$f_2(t)$，$f_3(t)$ に関しては，複素関数 $g_2(t)$ をその実部と虚部に対応する2つの実関数に分け，さらに，$\beta_2=\frac{1}{2}+i\omega$ の振動項 $i\omega$ を数値積分の重み関数から分離させる．これにより，Jacobi 多項式を使用せず，Gauss-Chebyshev の数値積分公式だけを使って最終的な連立一次代数方程式が導き出される．この方式では，従来の Jacobi 多項式の展開による数値解析法に比べて計算量がかなり減少し，その結果，次章に示すような収束の良い数値解が得られた．

まず，

$$\left.\begin{aligned} t&=\frac{a}{2}(t_1+1)\ ,\quad x=\frac{a}{2}(s_1+1)\ ,\qquad (0<t,x<a\ ;\ -1<t_1,s_1<1),\\ t&=\frac{b}{2}(t_2+1)\ ,\quad y=\frac{b}{2}(s_2+1)\ ,\qquad (0\leqq t,y<b\ ;\ -1\leqq t_1,s_2\leqq 1)\end{aligned}\right\}\ , \tag{129}*$$

を用いて，積分方程式（106）～（108）および（80）を次のように正規化する．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_1^*(t_1)}{t_1-s_1}dt_1+\frac{a}{2\pi}\int_{-1}^{1}f_1^*(t_1)K_{11}^*(t_1,s_2)dt_1+\frac{b}{2\pi}\int_{-1}^{1}[f_2^*(t_2)\times K_{12}^*(t_2,s_1)+f_3^*(t_2)K_{13}^*(t_2,s_1)]dt_2=-\frac{2}{E_3}P_0^*(s_1)\ , \tag{130}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_2^*(t_2)}{t_2-s_2}dt_2+\lambda f_3^*(s_2)+\frac{a}{2\pi}\int_{-1}^{1}f_1^*(t_1)K_{21}^*(t_1,s_2)dt_1+\frac{b}{2\pi}\int_{-1}^{1}[f_2^*(t_2)K_{22}^*(t_2,s_2)+f_3^*(t_2)K_{23}^*(t_2,s_2)]dt_2=-\frac{2}{a_{11}E_2}P_{11}^*(s_2)\ , \tag{131}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_3^*(t_2)}{t_2-s_2}dt_2-\lambda f_2^*(s_2)+\frac{a}{2\pi}\int_{-1}^{1}f_1^*(t_1)K_{31}^*(t_1,s_2)dt_1+\frac{b}{2\pi}\int_{-1}^{1}[f_2^*(t_2)K_{32}^*(t_2,s_2)+f_3^*(t_2)K_{33}^*(t_2,s_2)]dt_2=-\frac{2}{a_{11}E_2}P_{12}^*(s_2)\ , \tag{132}$$

$$a\int_{-1}^{1}f_1^*(t_1)dt_1-b\int_{-1}^{1}f_3^*(t_2)dt_2=0\ . \tag{133}$$

ここで，f_i^*，K_{ij}^*，P_0^*，P_{11}^*，P_{12}^* はそれぞれ f_i，K_{ij}，P_0，P_{11}，P_{12} と同じものであるが，式（129）の変数変換により，その引数が異なるので，変換後のものに＊印を付けて区別した．

次に，f_1^* については従来通り[7]，

$$f_1^*(t_1)=\frac{g_1^{\#}(t_1)}{(1-t_1^2)^{1/2}}\left[\equiv f_1\left(\frac{a}{2}(t_1+1)\right)\right]\ , \tag{134}$$

$$g_1^{\#}(-1)=0\ , \tag{135}$$

と置く．f_2^*，f_3^* については，次の新しい置換えを施す．式（118）の f_i に式（129）の変数変換を行い，後の便利さのために定数をかけて $g_2^{\#}(t_2)$ を次の様に定義する：

$$g_2^{\#}(t_2)=\left(\frac{2}{b}\right)^{1/2}g_2\left(\frac{b}{2}(t_2+1)\right)\ . \tag{136}$$

＊ 前報[10]の式番号との関連上，本報の式番号は（129）より始める．

複素関数 $g_2^{\#}$ の実部と虚部を $g_{2R}^{\#}$, $g_{2I}^{\#}$ とすると

$$g_2^{\#}(t_2) = g_{2R}^{\#}(t_2) + ig_{2I}^{\#}(t_2) \ , \tag{137}$$

となる．式 (136) を使って，上式 (137) を式 (118) に代入すると（式 (119)～(121) の特異性の値を参照）

$$\begin{aligned} & f_2^*(t_2) + if_3^*(t_2) (\equiv f_2(t) + if_3(t)) \\ &= \frac{1}{(1-t_2)^{1/2}} \{ [g_{2R}^{\#}(t_2)\cos\theta - g_{2I}^{\#}(t_2)\sin\theta] \\ &\quad + i[g_{2R}^{\#}(t_2)\sin\theta + g_{2I}^{\#}(t_2)\cos\theta] \} \ , \end{aligned} \tag{138}$$

$$\theta = \omega \ln\left(\frac{2}{b(1-t_2)}\right) \ , \tag{139}$$

よって

$$f_2^*(t_2) = \frac{1}{(1-t_2)^{1/2}} (g_{2R}^{\#}(t_2)\cos\theta - g_{2I}^{\#}(t_2)\sin\theta) \ , \tag{140}$$

$$f_3^*(t_2) = \frac{1}{(1-t_2)^{1/2}} (g_{2R}^{\#}(t_2)\sin\theta + g_{2I}^{\#}(t_2)\cos\theta) \ , \tag{141}$$

が得られる．振動の特異項は三角関数の θ に含まれている．振動の特異性を考慮しない解析は，上式において，$\theta=0$ と置いたものに対応し，式 (139) の関係を無視したことになる．

式 (140)，(141) に示す f_2^* と f_3^* の右辺に $(1+t_2)\cdot(1+t_2)^{-1/2}$ をかけると，$g_{2R}^{\#}$ と $g_{2I}^{\#}$ に関する積分に Gauss-Chebyshev の数値積分公式[12]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{(t-s)} \frac{1}{(1-t^2)^{1/2}} dt = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{g(t_i)}{t_i - s_j} \ , \tag{142}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{(1-t^2)^{1/2}} K(t,s)dt = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(t_i)K(t_i, s_j) \ , \tag{143}$$

$$\begin{aligned} t_i &= \cos\left(\frac{2_i - 1}{2n}\pi\right) \ , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \ , \\ s_j &= \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) \ , \qquad (j = 1, 2, \cdots, n-1) \ , \end{aligned} \tag{144}$$

が直接適用できる．つまり，まず特異性が含まれる f_i を特異性のない $g_1^{\#}$, $g_{2R}^{\#}$, $g_{2I}^{\#}$ に置きかえるために式 (134)，(140)，(141) を積分方程式 (130)～(133) に代入する．これに上の数値積分公式 (142)～(144) を用いれば離散化された未知数 $g_1^{\#}(t_{1i})$, $g_{2R}^{\#}(t_{2i}(s_{2j}))$, $g_{2I}^{\#}(t_{2i}(s_{2j}))$ に対する連立一次代数方程式が得られる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} g_1^{\#}(t_{1i}) \left[\frac{1}{t_{1i} - s_{1j}} + \frac{a}{2}K_{11}^* \right] + \frac{b}{2N_2}\sum_{i=1}^{N_2} (1+t_{2i})^{1/2} [g_{2R}^{\#}(t_{2i})(K_{12}^*\cos\theta_i + K_{13}^*\sin\theta_i) \\ & \quad + g_{2I}^{\#}(t_{2i}) \times (K_{13}^*\cos\theta_i - K_{12}^*\sin\theta_i)] = -\frac{2}{E_3} P_0^*(s_{1j}) \ , \\ & \qquad (j = 1, 2, ..., N_1 - 1) \ , \end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} \frac{(1+t_{2i})^{1/2}}{t_{2i} - s_{2j}} [g_{2R}^{\#}(t_{2i})\cos\theta_i - g_{2I}^{\#}(t_{2i})\sin\theta_i] + \frac{\lambda}{(1-s_{2j})^{1/2}} [g_{2R}^{\#}(s_{2j})\sin\theta_j + g_{2I}^{\#}(s_{2j})\cos\theta_j] \\ & \quad + \frac{a}{2N_1}\sum_{i=1}^{N_1} g_1^{\#}(t_{1i})K_{21}^* + \frac{b}{2N_2}\sum_{i=1}^{N_2} (1+t_{2i})^{1/2} [g_{2R}^{\#}(t_{2i})(K_{22}^*\cos\theta_i + K_{23}^*\sin\theta_i) \end{aligned} \tag{146}$$

$$+g_{21}^{\#}(t_{2i})(K_{23}^{*}\cos\theta_i-K_{22}^{*}\sin\theta_i)]=-\frac{2}{a_{11}E_2}P_{11}^{*}(s_{2j})\ ,\qquad (j=1,2,...,N_2-1)\ ,$$

$$\frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2}\frac{(1+t_{2i})^{1/2}}{t_{2i}-s_{2j}}[g_{2R}^{\#}(t_{2i})\sin\theta_i+g_{2I}^{\#}(t_{2i})\cos\theta_i]-\frac{\lambda}{(1-s_{2j})^{1/2}}[g_{2R}^{\#}(s_{2j})\cos\theta_j$$

$$-g_{2I}^{\#}(s_{2i})\sin\theta_j]+\frac{a}{2N_1}\sum_{i=1}^{N}g_1^{\#}(t_{1i})K_{31}^{*}+\frac{b}{2N_2}\sum_{i=1}^{N_2}(1+t_{2i})^{1/2}[g_{2R}^{\#}(t_{2i})(K_{32}^{\#}\cos\theta_i+K_{33}^{*}\sin\theta_i) \tag{147}$$

$$+g_{2I}^{\#}(t_{2i})(K_{33}^{*}\cos\theta_i-K_{32}^{*}\sin\theta_i)]=\frac{-2}{a_{11}E_2}P_{12}^{*}(s_{2i})\ ,\qquad (j=1,2,...,N_2-1)\ ,$$

$$\frac{a}{N_1}\sum_{i=1}^{N1}g_1^{\#}(t_{1i})-\frac{b}{N_2}\sum_{i=1}^{N2}(1+t_{2i})^{1/2}[g_{2R}^{\#}(t_{2i})\sin\theta_i+g_{2I}^{\#}(t_{2i})\cos\theta_i]=0\ . \tag{148}$$

ここで，t と s の下添字はそれぞれ2個で，$2i(2j)$ は $2\times i(2\times j)$ではない．この t_{ki}，s_{kj} は

$$\left.\begin{aligned} t_{ki}&=\cos\left(\frac{2i-1}{2N_k}\pi\right)\ ,\qquad (i=1,2,...,N_k\ ;\ k=1,2,)\ ,\\ s_{kj}&=\cos\left(\frac{j\pi}{N_k}\right)\ ,\qquad (j=1,2,\cdots,N_k-1\ ;\ k=1,2)\ ,\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

である[12]．

さらに，式（146），（147）中の $g_{2R}^{\#}(s_{2j})$ と $g_{2I}^{\#}(s_{2j})$ を

$$\left.\begin{aligned} g_{2R}^{\#}(s_{2j})&=\frac{1}{2}[g_{2R}^{\#}(t_{2j})+g_{2R}^{\#}(t_{2j+1})]\ ,\\ g_{2I}^{\#}(s_{2j})&=\frac{1}{2}[g_{2I}^{\#}(t_{2j})+g_{2I}^{\#}(t_{2j+1})]\ ,\end{aligned}\right\} \tag{150}$$

と近似する．式(149)に示すように，$t_{2j}<s_{2j}<t_{2j}+1$ であり，また関数 $g_{2R}^{\#}(s_2)$，$g_{2I}^{\#}(s_2)$ は区間$(-1\leqq s_2\leqq 1)$においてHölder条件を満足する．したがって，N_2 を適当に取れば，式（150）の近似式は十分な精度のものとなる．計算結果の表1に示すように，$N_2=50$ で十分な精度が得られることから，間接的ながら，この近似の妥当性が推測される．

近似式(150)を式(146)，(147)に代入すると，式(135)，(145)～(148)は N_1+2N_2 個の未知数 $g_1^{\#}(t_{1i})$，$g_{2R}^{\#}(t_{2i})$，$g_{2I}^{\#}(t_{2i})$ を含む N_1+2N_2-1 個の連立一次代数方程式となる．解を得るには，なお1個の条件式を必要とする．今回のT型き裂問題では，両き裂の交点 $(x_{(3)}=0, y_{(3)}=0)$ が拘束のない端点であることから，

$$\sigma_{2x}(0,0)=0\ , \tag{151}$$

を補助条件として選択する．補助条件式より1個の一次方程式が求められる．この一次方程式は x 軸方向垂直応力に対する式(146)に $s_{2j}=-1$，$P_{11}(s_{2j}=-1)$ を代入したものに対応する．補助条件式を式(151)とした理由の詳細は2.2節に述べる．よって，問題は式（135），(145)～(148)，(151）の連立一次代数方程式を解くことに帰着した．

なお，応力拡大係数を求めるための式（124），(125）の $g_1(a)$ と $g_1(b)$ は，それぞれ f_1 と g_1 の関係式（118），特異性の式（119）（120），変数変換式（129），f_1^{*} と $g_1^{\#}$ の関係式（134），および g_2 と $g_{2^{\#}R(I)}$ の関係式（136），(137）より

$$g_1(a)=\frac{\sqrt{a}}{2}g_1^{\#}(1)\ , \tag{152}$$

$$g_2(b)=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\left[g_{2R}^{\#}(1)+ig_{2I}^{\#}(1)\right], \tag{153}$$

となる.

2.2 補助条件の選択方法について

各部材，部材間に成立する連続条件や境界条件から得られる積分方程式 (80)，(106)～(108) 自体は完全なものである．一般に積分方程式を数値的に解くときには，N 個の未知数を取り，この離散化された未知数に対し，N 個の代数方程式を作ってやればよい．また解関数に積分可能な特異性が存在する場合特異点近傍での積分の収束精度に関し充分な注意が必要である．この点を考慮して，式 (118) の一般的な特異性に対しては通常 Jacobi 多項式が適用され，また，$\alpha_i=\beta_i=\frac{1}{2}$ の場合は Gauss-Chebyshev の積分公式が適用されてきた．そこでは，直交条件を満足するよう式の展開を行っていくため，得られる一次方程式の数と未知数の間には特異積分方程式 (106)～(108) の性質に基づく一定の関係がある．積分方程式によっては，得られる一次方程式の数が多過ぎる場合も，少な過ぎる場合も丁度良い場合もある．多い時には減らさなければならないし，少い時は追加しなければならない[12]．方程式を追加する時には，最初の連立一次方程式が特異性，直交性に充分注意したうえ求められているものであるので，追加する一次方程式にも解の収束精度に悪影響を与えないよう配慮が必要である．

今回，1) 理論解析から得られる変位の唯一性条件：式 (80)，2) f_1^* 自体には物理的に垂直き裂先端での特異性しか存在しないのに，数学的処理のため原点 ($x_{(3)}=y_{(3)}=0$) で見掛けだけの特異性を追加した (式 (134) の $t_1=-1$ での特異性) が，この特異性が見掛けだけの物であることを示す補助条件式 (135) を入れ，最終的に 1 個不足する．

追加する条件として，式 (18)～(21)，(26)～(29)，(39)～(42) に関連した条件が考えられる．残りの連続条件と境界条件式 (14)～(17)，(22)～(25)，(30)～(38) は，R_i や G_3 に，つまり部材 3 に直接関連していないか，あるいは x 軸に関する対称性により，数値誤差の影響を全く受けず完全に満足されている．先の 12 の条件式の何れからでも，どの点でも，連立一次方程式 (145)～(146) と重複しない限り補助条件を作ることができる．その際，未知数の増加を条件式の増加が 1 個上回らねばならない．現実には f_i で表現されている垂直き裂上の垂直応力条件式 (130)，界面き裂上の垂直応力条件式 (131)，あるいは，せん断応力条件式 (131) から離散化された未知数の数を殖やさず補助条件を 1 個作る方が便利である．

ここではき裂面上の 1 点で上記 3 条件式の 1 個から補助条件を作ることにする．また，式 (130)～(132) を離散化した式 (145)～(147) では式 (149) で定義される点に対して良好な収束精度が理論上保証されているが，式 (149) 以外のき裂面上の点でも式 (145)～(147) を準用する．未知数の数を増化させていく時，数値解析結果の表 1 に示すような十分な解の精度が得られることから，この準用に問題はないと思われる．

式 (149) でカバーされない代表的な点には式 (149) の点の中間と両側がある．両側とは両き裂先端

と両き裂の交点つまり $x_{(3)}=y_{(3)}=0$ である．両き裂先端で応力の定義はできないので，原点が候補として残る．特別な理由はないが，片方のき裂にのみ関連する多数の点のうちの1個ではなく，両き裂に関連する唯一の点である原点を補助条件用の点として選択する．原点の応力に関する条件は3個ある．せん断応力は x 軸に関する対称性のためゼロであることが保証されている．y 方向垂直応力 σ_y の負則からの値は定義されていない．$0\leqq x_{(3)}\leqq h_3$ で定義される応力関数 ϕ_3 の正解が求められたとして，これを $x_{(3)}<0$ 側まで拡張すると σ_y は $x_{(3)}$ 軸上の原点近傍で大きく変化する可能性もある．つまり，近似計算で $x_{(3)}=0$ の σ_y 値を決めてしまうと，最終的に求めたいき裂先端での応力拡大係数等の計算精度の悪い影響が現れることも考えられる．$y_{(3)}$ の正負両領域で $x_{(3)}$ 軸に対称に定義されている垂直応力 σ_x にはこの心配がない．よって，原点における σ_x を補助条件に選ぶ．$g^{\#}_{2R(I)}(t_{2j})$ を使った $g^{\#}_{2R(I)}(s_{2j})$ に関する近似式(150)を式（146）の一次方程式に代入して得られたものに $s_{2j}=-1$ を代入すれば式（151）に対応する一次方程式が得られる．

今回は追加する方法を取ったが，未知数の数を減らすことも可能である．例えば，連立一次方程式からき裂中央部分での未知数 $g^{\#}_{2R}(t_{2j})$ を消去し，そこに $0.5\times(g^{\#}_{2R}(t_{2j-1})+g^{\#}_{2R}(t_{2j+1}))$ の線形近似式あるいは，より高次の近似式を代入すれば良い．

3. 数値計算例および有限要素法による結果との比較

前章で得られた連立一次方程式に材料定数，負荷条件および幾何学的なパラメータなどを入れて計算すれば，各種の問題に対する応力拡大係数やき裂表面での変位などが得られる．本論文では，今回の解析方法の収束や精度を確かめるため，図2の2枚の帯板接着界面に存在するT型き裂問題を解析する．この問題には Jacobi 多項式を使った数値計算の試みが有る[7]．更に，この問題について有限要素法を使った数値計算を行い，3つの結果を比較する．

3.1 Gauss-Chebyshev 積分処理法による数値結果

図2のT型き裂問題を平面ひずみの状態で解析する．垂直き裂の表面に一定圧力 $P_0(x)\equiv P_0$ が加えられていると仮定する．この問題の解は前報[10]の3章および付録Dに詳しく述べられている．式（135），(145)～(148)，(151)に材料定数，負荷および幾何学パラメータを代入すると $g^{\#}_1(t_{1i})$，$g^{\#}_{2R(I)}(t_{2i})$ を得る．更に，これらを式(124)，(125)，(152)，(153)に代入すると応力拡大係数 k_i が求められる．

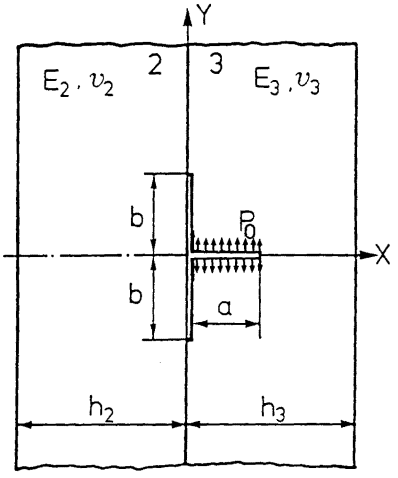

Fig. 2　A T-shaped crack at the interface of two bonded strips.

表1に，解の収束状態を示している．ここでは $N_1=N_2=N$ にとっている．N を増すと $P_0\sqrt{a/2}$ で無次

Table 1 Effects of N(=N_1=N_2) on the convergence of solutions, (ν_2=ν_3=0.3, E_2=3E_3, h_2=h_3=10a, b=5a, k_i'(a)=k_i(a)/($P_0\sqrt{a/2}$, k_i'(b)=k_i(b)/($P_0\sqrt{b/2}$))

	N=20	30	40	50
k_1'(a)	1.5382	1.5416	1.5427	1.5438
k_1'(b)	−0.0107	−0.0109	−0.0110	−0.0110
k_2'(b)	0.0525	0.0526	0.0526	0.0526

元化した応力拡大係数 k_i' は一定値に収束し，N=50 で充分な精度が得られることがわかる．$k_1'(a)$ が垂直き裂先端の Mode I の応力拡大係数で，$k_1'(b)$, $k_2'(b)$ が界面き裂のそれぞれ Mode I および Mode II の応力拡大係数である．このことから Gauss-Chebyshev 積分公式を直接使用した今回の解析方法とそれに付随した各種の仮定，式 (150) の $g_{2R(l)}^{*}(s_{2j})$ の近似，式 (151) の補助条件の選定，補助条件に関連した式(146)の拡張使用等が全て妥当であったことがわかる．

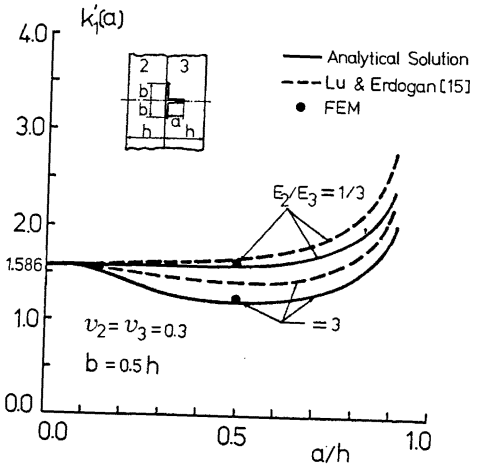

Fig. 3 Stress intensity factor at the tip of crack perpendicular to the interface, (h_2=h_3=h, $k_1'(a)$ = $k_1'(a)/(P_0\sqrt{a/2})$).

Jacobi 多項式展開を使用した従来の数値解との比較を図 3 に示す．計算条件は過去のもの[9]と同様で，帯板の幅およびポアソン比を等しく，h_2=h_3=h, ν_2=ν_3=0.3, 界面き裂長を b=0.5h とし，垂直き裂長 a を 0 から増大させ，無次元化した垂直き裂先端の応力拡大係数 $k_1'(a)$ を縦軸にとっている．ヤング率比 E_2/E_3 が 1/3 と 3 の 2 例求めている．縦軸上の $k_1'(a)$ = 1.586 は半平面に edge-crack がある時の応力拡大係数である[13]．今回の Gauss-Chebyshev 積分処理法による結果が実線で Jacobi 多項式展開によるものが破線である．a をパラメータとした $k_1'(a)$ の傾向は似たものとなっているが，E_2/E_3=3 の場合 a が 0.5 h 付近で，両者の差は 15〜20%程となっている．

3.2 有限要素法による計算結果との比較

応力拡大係数は，エネルギー開放率，き裂先端近傍の応力勾配あるいはき裂先端近傍の開口変位量等により，計算されるが[14]，ここでは，Mode I の応力拡大係数 k_1 によって

$$u_y = \frac{1}{8\mu}k_1\sqrt{2\rho}\left\{(2\varkappa+1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right\}, \tag{154}$$

と表わされるき裂に垂直な方向のき裂先端近傍開口変位量を利用する．図 4 に示すように ρ はき裂先端

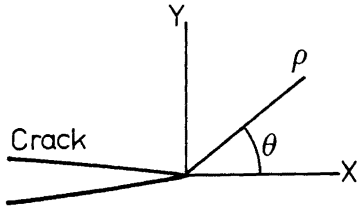

Fig. 4　Local polar coordinate at a crack tip.

からの距離，θ は x 軸から測った角度を示す．x は平面ひずみ状態では 3-4 ν，μ はせん断剛性 $0.5E/(1+\nu)$，E と ν はヤング率とポアソン比である．き裂表面では $\theta=\pi$ であるので

$$k_1 = u_y \frac{E}{2(1-\nu^2)\sqrt{2\rho}} , \qquad (155)$$

を得る．

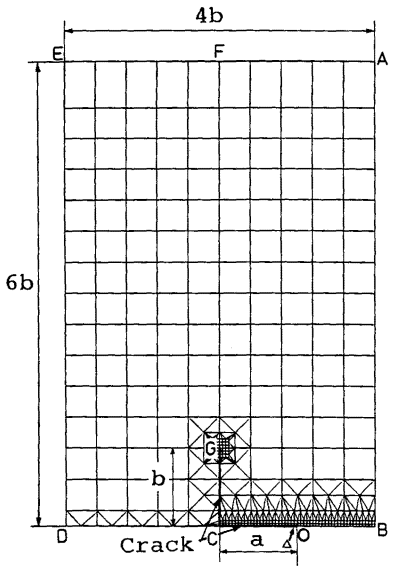

Fig. 5　Finite element geometry.

図2を有限要素法によって解析する．問題が x 軸に関して対称であるので，$y\geqq 0$ について計算すればよい．Gauss-Chebyshev 積分公式を直接利用した今回の処理法の結果と Jacobi 多項式展開を利用した結果を比較するため，き裂先端まわりに充分な数の細かい分割が取れる $a=0.5h(h_2=h_3=h)$ を解析する．b も $0.5h$ とする．図5に要素分割図を示す．長手方向は，両き裂より充分大きな $6b$ に取っている．点OとGが垂直き裂と界面き裂の先端，太線COとCGが垂直き裂面と界面き裂面を示す．四角形CDEFが部材2，四角形ABCFが部材3である．辺AB, DE, EA, CGの支持条件は自由である．点Oは両方向拘束されている．辺BO, CDは長手方向のみ拘束され，横方向には自由支持である．辺OCの横方向は自由で長手方向に一様な圧力が加えられている．三角形と四角形の平面要素を併用している．計算には，富士通（株）の構造解析プログラム FEM IIIを用いた．

有限要素法を使って求められる変位には要素の分割などによる誤差が生じるので修正する必要がある．Edge-crack の正解[13]をこの修正のために使用する．まず，界面き裂より左側の部分のヤング率 E_2 を右側ヤング率 E_3 の 10^{-5} 倍に置き，図5の垂直き裂面OC上の△印で示す節点位置の長手方向変位 u_{yF} を求める．$10^{-5}E_3$ は実質的に部材2が存在しないことに対応する．u_{yF} を式（155）の u_y に代入して求めた応力拡大係数が正解の 1/1.1113（約9/10）倍となった．よって修正係数は 10/9 となり

$$u_y = \frac{10}{9} u_{yF} , \qquad (156)$$

と置けばよいことがわかる．式（156）を式（155）に代入すると

$$k_1 = \frac{10}{9} u_{yF} \frac{E}{2(1-\nu^2)\sqrt{2\rho}} , \qquad (157)$$

が求められる．

結果を図3に黒丸で示す。$E_2/E_3=1/3$ と3の両方について，有限要素法で求めた結果は　Gauss-

Chebyshev 積分公式処理法で求めたものとよく一致している。

Jacobi 多項式展開で求めたものと比較すると $E_2/E_3=1/3$ の場合にはそれ程違っていないものの，$E_2/E_3=3$ の場合になると15%程応力拡大係数の値が違ってくる。

4. 結　　論

1) 連立積分方程式の数値解析に対し，この種の界面き裂が絡む問題に従来用いられてきた Jacobi 多項式展開法を使わない，新しい数値解析方法を求めた．そこでは界面き裂に付随する特異項の振動部分を数値積分の重み関数から分離させ Gauss-Chebyshev の数値積分だけを使っている。その結果，解析的な計算量と計算機を使っての計算量がかなり減少した．

2) 2つの帯板接合界面にT型き裂がある問題の解を今回の解より導いた。これについて数値計算をし，また有限要素法を使った計算も行った．これらの結果と従来の Jacobi 多項式展開を使用した結果を比較すると，今回の解析の方が有限要素法による解析に近い結果を出すことがわかった。

3) これにより，巨視的にも微視的にも破壊の観点から興味深い一方向繊維強化複合材料内部のT型き裂の進展挙動について，精度の良い解析が適当な計算量で可能となつた。現在，実用的な幾何学的パラメータや荷重条件を用いて Tungsten/Copper, Glass/Epoxy, Carbon/Epoxy 各系のT型き裂問題の数値解析を進めている．

最後に本論文の計算に九州大学応用力学研究所の FACOM M-360AP 電子計算機を使用したことを付記する．

謝　　辞

本論文の作成にあたり，本研究所川建和雄教授には有益な助言と励ましをいただいた．また清書を篠崎由美さんにお願いした．なお，この研究は一部文部省科学研究費一般（c）の援助を受けて行った．

参 考 文 献

1) Pacella, A. H. and Erdogan, F., A Penny-shaped crack in a filament-reinforced matrix-II. The crack problem, Int. J. Solids Structures, 10 (1974), pp. 807-819.

2) Wang, W. X., Takao, Y. & Suhara, T., A fiber-reinforced matrix containing a penny-shaped crack under Mode III loading condition, Int. J. Eng. Sci., (accepted for publication).

3) Erdogan, F. and Ozbek, T., Stress in fiber-reinforced composites with imperfect bonding, J. Appl. Mech., 36 (1969), pp. 865-869.

4) 笠野・松本・中原，円筒面状界面き裂を有する非均質異方性弾性体，機論，51-471号，A（昭60），pp. 2450-2458.

5) Delale, F. and Erdogan, F., Boned orthotropic strips with cracks, Int. J. Fract., 15 (1979), pp. 343-364.

6) 関根・神谷，一方向連続繊維強化複合材料中のせん断破壊の解析，機論，52-480（昭61），pp. 2001-2009.

7) Goree, J. G. and Venezia, W. V., Bonded elastic half-planes with an interface crack and a

perpendicular intersecting crack that extends into the adjacent material-I, Int. J. Eng. Sci., 15 (1977), pp. 1-17.

8) Lu, M. C. and Erdogan, F., Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface-I. Analysis, Eng. Fract. Mech. **18** (1983), pp. 491-506.

9) Lu, M. C. and Erdogan, F., Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface-II. Solution and results Eng. Fract. Mech. **18** (1983), pp. 507-528.

10) 汪・高雄・栖原，一方向繊維強化複合材料接着面におけるT型き裂問題—（その1）理論解析，九州大学応用力学研究所所報，(1987)，(前報)．

11) Erdogan, F. and Gupta, G. D., Layered composites with an interface flaw, Int. J. Solids Structures, 7 (1971), pp. 1089-1107.

12) Erdogan, F., Gupta, G. D. and Cook, T. S., Numerical solution of integral equations, in *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, edited by G. C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden, (1973), Chap. 7.

13) Gupta, G. P. and Erdogan, F., The problem of edge cracks in an infinite strip, J. Appl. Mech., **41** (1974), 1001-1006.

14) Hilton, P. D. & Sih, G. C., Application of the finite element method to the calculation of stress intensity factor, in *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, edited by G. C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden, (1973), Chap. 8.

（昭和62年5月30日　受理）