

## 一方向繊維強化複合材料接着面におけるT型き裂問題 ：（その1）理論解析

汪，文学

九州大学応用力学研究所：助教授

高雄，善裕

九州大学応用力学研究所：助教授

栖原，寿郎

九州大学応用力学研究所：教授

<https://doi.org/10.15017/4743798>

---

出版情報：応用力学研究所所報. 65, pp.265-282, 1987-12. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：



# 一方向繊維強化複合材料接着面における T型き裂問題—(その1) 理論解析

汪 文 学\* 高 雄 善 裕†  
栖 原 寿 郎‡

## 概 要

一方向繊維強化複合材料内部の接着面に垂直き裂と界面き裂が同時に存在する2次元のT型き裂問題について理論解析を行う。従来、2つの部材からなるモデルについて解析が行われていたが、今回、5つの部材からなるモデルについて解析する。これにより、繊維体積含有率を自由に現実的な範囲に取ることができる。2次元の線形弾性理論に基づいて、Airyの応力関数とFourier変換を適用すると、この問題は連立特異積分方程式に帰着する。き裂先端とはく離先端の特異性についても考察する。

**Key words:** Composite Materials, T-shaped Crack, Debonding, Delamination, Integral Equation, Singularity

## 1. 序

構成素材の特性を合理的に補い優れた性能を出す複合材料は構造部材として近年ますます広く用いられてきている。なかでも、一方向繊維強化複合材料とその積層板は、構造部材として主要な位置を占め、そのすぐれた比剛性、比強度などにより、また最近では異方性までもが積極的に利用され、宇宙航空から、船舶、機械、自動車各方面にわたって、用いられている。それに伴い、複合材料の力学特性をはじめ、強度、破壊などの問題が重要な研究課題となってきた。特に、複合材料では、材料特性の異なる構成素材が接合されているため、その破壊は均一材料の場合に比べ極めて複雑となる<sup>1)~6)</sup>。構成素材の材料定数の組合せや構成の幾何学的なパラメータあるいは接合界面接着強さなどの材料学的パラメータにより、複合材料内部のき裂伝播様式が多様化し、それによって、複合材料全体のマクロな破壊強度も変化する。したがって、複合材料を高い負荷レベルでより安全に使用するには、そのマクロな破壊機構や破壊強度などと内部き裂の各伝播様式との関連、各伝播様式間の相互作用およびこれらに対する各種のパラメー

\* 九州大学大学院工学研究科応用力学専攻

† 九州大学助教授、応用力学研究所

‡ 九州大学名誉教授

夕の影響などについて、微視力学的な観点からの考察が必要となる。特に、一方向繊維強化複合材料の破壊問題についての研究は、より複雑な構成の複合材料の破壊強度を評価するときに、基礎となるので、理論的にも実用的にも重要である。

これまで、この方面の問題について、数多くの研究者が2次元または3次元の各種のき裂パターンを用いて解析を行なっている<sup>7)~15)</sup>。Erdogan と Pacella<sup>7)</sup> は内部に円板状き裂がある一方向繊維強化複合材料に引張荷重が作用した3次元問題について解析を行い、き裂進展に対する繊維の抵抗を求めている。Wang ら<sup>8)</sup> は同様な幾何学的形状の物にねじりが作用した場合を解析し、繊維のき裂進展阻止効果をき裂先端に沿う応力拡大係数の変化で表している。また、Erdogan と Ozbek<sup>9)</sup> や笠野ら<sup>10)</sup> は繊維と母相の接着面に円筒状界面き裂がある問題について解析を行っている。その他、2次元の取扱いでは、異方性帯板の接着面に周期的に存在する垂直き裂に対する Delale と Erdogan<sup>11)</sup> による解析や、関根と神谷<sup>12)</sup> による異方性板におけるせん断破壊に対する解析などがある。

しかしながら、それらはいずれも、界面に垂直なき裂と界面に沿うき裂が単独に接着面に近づくまたは存在する場合の研究であり、両き裂が同時に接着面あるいはその近傍に存在する場合の研究は少ない。わずかに Goree と Venezia<sup>13)</sup> や Lu と Erdogan<sup>14)15)</sup> が半平面あるいは帯板どうしの接着面に両き裂が同時に存在する問題の解析を行っている程度である。それらの結果は繊維体積含有率が極めて小さい場合、つまり繊維間の距離が大きい場合には有効であるが、現実的な繊維体積含有率 0.2~0.7 の場合には直接適用できない。

今回の解析モデルでは、現実的な繊維体積含有率に対応する繊維間隔(マクロ的には例えば 0°/90°/0° 系積層板の 0° 層間隔)を取ることができる。第2章では、2次元線形弾性理論<sup>16)</sup> に基づき Airy の応力関数および Fourier 変換を用いて、この問題の連立積分方程式を導く。参考文献 14) 15) が議論された、帯板どうしの接着面に T 型き裂が存在する問題は今回の解析の特殊な場合に対応している。この問題の解を今回の最終結果より 3 章で導く。

## 2. 理論解析

### 2.1. 解析モデル

一方向繊維強化複合材料内部の繊維~母相間接着面

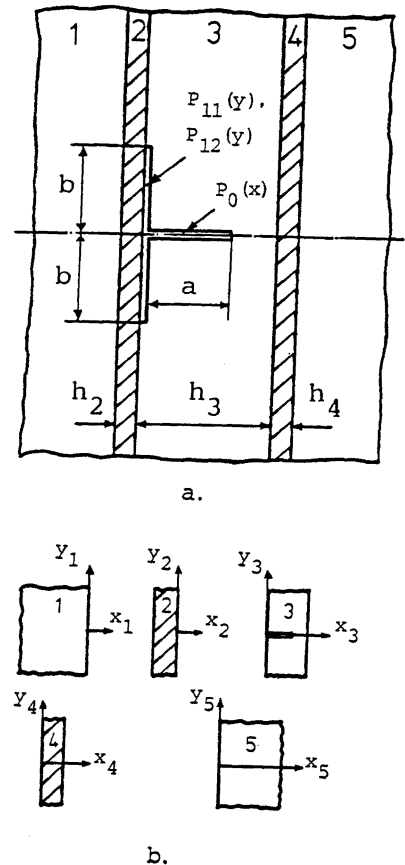


Fig. 1 Calculation model ; a. a T-shaped crack at the interface in unidirectional fiber-reinforced composites, b. local coordinate systems.

のはく離と母相内のき裂進展問題について、図 1 に示す基本的な 2 次元 T 型き裂モデルを考える。図 1-a に示す解析モデルは 5 つの部材により構成され、界面き裂 (長さ  $2b$ ) と垂直き裂 (長さ  $a$ ) の部分を除いてそれらは完全に接着されている。部材 1, 3, 5 は母相, 2, 4 は繊維, 部材  $i$  の幅は  $h_i$ , 部材 1 と 5 は半無限平面 ( $h_1 = h_5 = \infty$ ) であり、それぞれの直交座標系  $x_i, y_i$  は図 1-b に示されている。部材 1, 2 にのみ座標原点が部材右側にとられている。繊維 2 と母相 3 の間の接着面に界面き裂があり、 $x$  軸に関して対称である。それに直交して母相 3 の  $x$  軸上に垂直き裂が存在する。垂直き裂の表面に垂直圧力  $P_0(x)$ , 界面き裂の表面に垂直圧力  $P_{11}(y)$  およびせん断応力  $P_{12}(y)$  が加えられている。よく知られているように、このような負荷条件はき裂先端の特異性に関する限り、それぞれ無限遠点で  $y$  方向の引張、 $x$  方向の引張、および  $xy$  面内剪断を加えた場合に対応する。また、界面き裂に作用する応力は  $x$  軸に関して対称、つまり、 $P_{11}(y) = P_{11}(-y)$ ,  $P_{12}(y) = -P_{12}(-y)$ , と仮定する。ここで、 $x_i(y_i)$  の代りにその総称として  $x(y)$  を使用している。各々の式で (1)  $x(y)$  は全ての  $i$  に対応するものであるか、あるいは (2) 他の付帯条件より定義される範囲が明確であるのでこれからも  $x_i(y_i)$  の代りに必要に応じ混乱のない範囲で  $x(y)$  を使用する。また境界条件に関する記述以降は主な変数  $x_3(y_3)$  を意味している。

### 2.2. 基礎方程式

2 次元線形弾性理論により、図 1 に示す問題に関する適合方程式を部材  $i$  に対する Airy の応力関数  $\varphi_i$  を用いて表せば、次の重調和方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \varphi_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \tag{1}$$

を得る。式 (1) に Fourier 変換を施し、更に問題の  $x$  軸に関する対称性を考えれば、式 (1) を満足する応力関数  $\varphi_i$  は

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{[(A_i + B_i x)e^{-xs} + (C_i + D_i x)e^{xs}] \cos(sy) \\ & + G_i(1 + sy)e^{-sy} \cos(xs)\} ds, \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \end{aligned} \tag{2}$$

と得られる<sup>17)</sup>。下添字  $i$  は部材  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) に関する量を示す。部材 1, 5 が半平面であることから、

$$A_1 = B_1 = 0, \quad C_5 = D_5 = 0. \tag{3}$$

部材 1, 2, 4, 5 の内部にき裂がないことから、

$$G_1 = G_2 = G_4 = G_5 = 0, \tag{4}$$

が得られる。その外の 17 個の未知関数  $A_i(s), B_i(s), C_i(s), D_i(s), G_i(s)$  は境界条件と連続条件によって決められる。

式 (2) を部材  $i$  に関する応力関数  $\varphi_i$ - $x(y)$  方向垂直 (せん断) 応力  $\sigma_{x(y)}(\tau_{xy})$  の関係式

$$\sigma_{ix} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}, \quad \sigma_{iy} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}, \quad \tau_{ixy} = -\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y}, \tag{5}$$

に代入し、更に次の平面応力状態に対応する構成方程式と  $x(y)$  方向垂直 (せん断) ひずみ  $\varepsilon_{x(y)}(\gamma_{xy})$ - $x(y)$  方向変位  $u_{x(y)}$  の関係式

$$\varepsilon_{ix} = \frac{1}{E_i}(\sigma_{ix} - \nu_i \sigma_{iy}), \quad \varepsilon_{iy} = \frac{1}{E_i}(\sigma_{iy} - \nu_i \sigma_{ix}), \quad \gamma_{ixy} = \frac{2(1+\nu_i)}{E_i} \tau_{ixy}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ix} = \frac{\partial u_{ix}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{iy} = \frac{\partial u_{iy}}{\partial y}, \quad \gamma_{ixy} = \frac{\partial u_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial u_{iy}}{\partial x}, \quad (7)$$

を用いると、応力、変位成分が次のように得られる。

$$\sigma_{ix} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{[(A_i + B_i x)e^{-xs} + (C_i + D_i x)e^{xs}]s^2 \cos(ys) - G_i s^2 (ys - 1)e^{-ys} \cos(xs)\} ds, \quad (8)$$

$$\sigma_{iy} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{[(A_i s + B_i x s - 2B_i)e^{-xs} + (C_i s + D_i x s + 2D_i)e^{xs}]s \cos(ys) - G_i s^2 (1 + ys)e^{-ys} \cos(xs)\} ds, \quad (9)$$

$$\tau_{ixy} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{[(A_i s + B_i x s - B_i)e^{-xs} - (C_i s + D_i x s + D_i)e^{xs}]s \sin(ys) + G_i y s^3 e^{-ys} \sin(xs)\} ds, \quad (10)$$

$$u_{ix} = \frac{2}{E_i \pi} \int_0^\infty \{[(A_i + B_i x)(1 + \nu_i)s + (1 - \nu_i)B_i]e^{-xs} - [(C_i + D_i x)(1 + \nu_i)s - (1 - \nu_i)D_i]e^{xs}\} \cos(ys) ds + \frac{2}{E_i \pi} \int_0^\infty G_i s [ys(1 + \nu_i) - (1 - \nu_i)]e^{-ys} \sin(xs) ds, \quad (11)$$

$$u_{iy} = \frac{2}{E_i \pi} \int_0^\infty \{[(A_i + B_i x)(1 + \nu_i)s - 2B_i]e^{-xs} + [(C_i + D_i x)(1 + \nu_i)s + 2D_i]e^{xs}\} \times \sin(ys) ds + \frac{2}{E_i \pi} \int_0^\infty G_i s [2 + ys(1 + \nu_i)]e^{-ys} \cos(xs) ds, \quad (12)$$

( $i = 1, 2, \dots, 5$ ).

ここで、 $E_i$  と  $\nu_i$  は部材  $i$  のヤング率とポアソン比であり平面ひずみの場合は上式中の  $E_i$ ,  $\nu_i$  を

$$\frac{E_i}{(1 - \nu_i^2)}, \quad \frac{\nu_i}{(1 - \nu_i)}, \quad (13)$$

に置き換えればよい。以下に現れる  $E_i$ ,  $\nu_i$  についても同様である。

問題の  $x$  軸に関する対称性を踏まえると、未知関数  $A_i$  等を決めるための境界条件と連続条件は図 1 により

$$u_{1x}(0, y) = u_{2x}(-h_2, y), \quad (14)$$

$$u_{1y}(0, y) = u_{2y}(-h_2, y), \quad (15)$$

$$\sigma_{1x}(0, y) = \sigma_{2x}(-h_2, y), \quad (16)$$

$$\tau_{1xy}(0, y) = \tau_{2xy}(-h_2, y), \quad (17)$$

$$u_{3x}(h_3, y) = u_{4x}(0, y), \quad (18)$$

$$u_{3y}(h_3, y) = u_{4y}(0, y), \quad (19)$$

$$\sigma_{3x}(h_3, y) = \sigma_{4x}(0, y), \quad (20)$$

$$\tau_{3xy}(h_3, y) = \tau_{4xy}(0, y), \quad (21)$$

$$u_{4x}(h_4, y) = u_{5x}(0, y), \quad (22)$$

$$u_{4y}(h_4, y) = u_{5y}(0, y), \quad (23)$$

$$\sigma_{4x}(h_4, y) = \sigma_{5x}(0, y), \quad (24)$$

$$\tau_{4xy}(h_4, y) = \tau_{5xy}(0, y), \quad (0 \leq y_{4(5)} < \infty), \quad (25)$$

$$u_{2x}(0, y) = u_{3x}(0, y), \quad (b < y_{2(3)} < \infty), \quad (26)$$

$$u_{2y}(0, y) = u_{3y}(0, y), \quad (b < y_{2(3)} < \infty), \quad (27)$$

$$\sigma_{2x}(0, y) = \sigma_{3x}(0, y), \quad (0 \leq y_{2(3)} < \infty), \quad (28)$$

$$\tau_{2xy}(0, y) = \tau_{3xy}(0, y), \quad (0 \leq y_{2(3)} < \infty), \quad (29)$$

$$u_{1y}(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x_1 \leq 0), \quad (30)$$

$$\tau_{1xy}(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x_1 \leq 0), \quad (31)$$

$$u_{2y}(x, 0) = 0, \quad (-h_2 < x_2 \leq 0), \quad (32)$$

$$\tau_{2xy}(x, 0) = 0, \quad (-h_2 < x_2 \leq 0), \quad (33)$$

$$u_{4y}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x_4 \leq h_4), \quad (34)$$

$$\tau_{4xy}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x_4 \leq h_4), \quad (35)$$

$$u_{5y}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x_5 < \infty), \quad (36)$$

$$\tau_{5xy}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x_5 < \infty), \quad (37)$$

$$\tau_{3xy}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x_3 \leq h_3), \quad (38)$$

$$u_{3y}(x, 0) = 0, \quad (a < x_3 \leq h_3), \quad (39)$$

$$\sigma_{3y}(x, 0) = -P_0(x), \quad (0 < x_3 < a), \quad (40)$$

$$\sigma_{3x}(0, y) = -P_{11}(y), \quad (0 \leq y_3 < b), \quad (41)$$

$$\tau_{3xy}(0, y) = -P_{12}(y), \quad (0 \leq y_3 < b), \quad (42)$$

と表わせる。式 (10) と (12) により、境界条件のうち式 (30)~(38) は自動的に満足されている。したがって、17 個の未知関数  $A_i$  等を決めるには、その外の条件式を考えればよい。

### 2.3. 積分方程式

一般には、14 個の条件式 (14)~(25), (28), (29) により、14 個の未知関数を他の 3 個で表わし、これらを混合条件式 (26), (27), (39)~(42) に代入すれば、残る 3 個の未知関数に対する積分方程式が導かれる。具体的には以下の様に行う。

まず、 $A_i$  等で表現した応力と変位の式 (8)~(12) を全ての条件式 (14)~(29), (39)~(42) に代入し、Fourier 変換を使い

$$\begin{aligned} & [A_2(1+\nu_2)s - B_2(h_2s(1+\nu_2) - (1-\nu_2))] \frac{E_1}{E_2} e^{h_2s} - [C_2(1+\nu_2)s - D_2(h_2s(1+\nu_2) + (1-\nu_2))] \\ & \times \frac{E_1}{E_2} e^{-h_2s} + C_1(1+\nu_1)s - D_1(1-\nu_1) = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & [A_2(1+\nu_2)s - B_2(h_2s(1+\nu_2) + 2)] \frac{E_1}{E_2} e^{h_2s} + [C_2(1+\nu_2)s - D_2(h_2s(1+\nu_2) - 2)] \frac{E_1}{E_2} e^{-h_2s} \\ & - C_1(1+\nu_1)s - 2D_1 = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$(A_2 - B_2h_2)e^{h_2s} + (C_2 - D_2h_2)e^{-h_2s} - C_1 = 0, \quad (45)$$

$$[A_2s - B_2(h_2s + 1)]e^{h_2s} - [C_2s - D_2(h_2s - 1)]e^{-h_2s} + C_1s + D_1 = 0, \quad (46)$$

$$[A_4(1 + \nu_4)s + B_4(1 - \nu_4) - C_4(1 + \nu_4)s + D_4(1 - \nu_4)] \frac{E_3}{E_4} - [A_3(1 + \nu_3)s + B_3(h_3s(1 + \nu_3)$$

$$+ (1 - \nu_3))]e^{-h_3s} + [C_3(1 + \nu_3)s + D_3(h_3s(1 + \nu_3) - (1 - \nu_3))]e^{h_3s} = R_1(s),$$

$$[A_4(1 + \nu_4)s - 2B_4 + C_4(1 + \nu_4)s + 2D_4] \frac{E_3}{E_4} - [A_3(1 + \nu_3)s + B_3(h_3s(1 + \nu_3) - 2)]e^{-h_3s}$$

$$- [C_3(1 + \nu_3)s + D_3(h_3s(1 + \nu_3) + 2)]e^{h_3s} = R_2(s),$$

$$-s^2(A_4 + C_4) + s^2(A_3 + B_3h_3)e^{-h_3s} + s^2(C_3 + D_3h_3)e^{h_3s} = R_3(s), \quad (49)$$

$$s(A_4s - B_4 - C_4s - D_4) - [A_3s^2 + B_3s(h_3s - 1)]e^{-h_3s} + [C_3s^2 + D_3s(h_3s + 1)]e^{h_3s} = R_4(s), \quad (50)$$

$$[A_4(1 + \nu_4)s + B_4(h_4s(1 + \nu_4) + (1 - \nu_4))] \frac{E_5}{E_4} e^{-h_4s} - [C_4(1 + \nu_4)s + D_4(h_4s(1 + \nu_4) - (1 - \nu_4))]$$

$$\times \frac{E_5}{E_4} e^{h_4s} - A_5(1 + \nu_5)s - B_5(1 - \nu_5) = 0,$$

$$[A_4(1 + \nu_4)s + B_4(h_4s(1 + \nu_4) - 2)] \frac{E_5}{E_4} e^{-h_4s} - [C_4(1 + \nu_4)s + D_4(h_4s(1 + \nu_4) + 2)] \frac{E_5}{E_4} e^{h_4s}$$

$$- A_5(1 + \nu_5)s + 2B_5 = 0,$$

$$(A_4 + B_4h_4)e^{-h_4s} + (C_4 + D_4h_4)e^{h_4s} - A_5 = 0, \quad (53)$$

$$[A_4s + B_4(h_4s - 1)]e^{-h_4s} - [C_4s + D_4(h_4s + 1)]e^{h_4s} - A_5s + B_5 = 0, \quad (54)$$

$$[A_2(1 + \nu_2)s + B_2(1 - \nu_2) - C_2(1 + \nu_2)s + D_2(1 - \nu_2)] \frac{E_3}{E_2} - [A_3(1 + \nu_3)s + B_3(1 - \nu_3) - C_3(1 + \nu_3)s$$

$$+ D_3(1 - \nu_3)] = R_5(s), \quad (55)$$

$$[A_2(1 + \nu_2)s - 2B_2 + C_2(1 + \nu_2)s + 2D_2] \frac{E_3}{E_2} - [A_3(1 + \nu_3)s - 2B_3 + C_3(1 + \nu_3)s + 2D_3] = R_6(s), \quad (56)$$

$$(A_3 + C_3 - A_2 - C_2)s^2 = R_7(s), \quad (57)$$

$$(A_2s - B_2 - C_2s - D_2) - (A_3s - B_3 - C_3s - D_3) = 0, \quad (58)$$

$$\int_0^\infty G_3(s)s \cos(sx) ds = 0, \quad (\alpha < x < h_3), \quad (59)$$

$$\int_0^\infty \{[A_3s^2 + B_3s(xs - 2)]e^{-xs} + [C_3s^2 + D_3s(xs + 2)]e^{xs} - G_3s^2 \cos(sx)\} ds = -\frac{\pi}{2}P_0(x), \quad (60)$$

$$(0 < x < a),$$

$$\int_0^\infty [-s^2(A_3 + C_3) \cos(sy) + G_3s^2(sy - 1)e^{-ys}] ds = -\frac{\pi}{2}P_1(y), \quad (0 \leq y < b), \quad (61)$$

$$\int_0^\infty s(-A_3s + B_3 + C_3s + D_3) \sin(sy) ds = -\frac{\pi}{2}P_2(y), \quad (0 \leq y < b), \quad (62)$$

を得る。ここで、 $R_j(s)(j=1, 2, \dots, 7)$  は

$$R_1(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G_3(t)t^2 \left[ (1 + \nu_3) \frac{t^2 - s^2}{(t^2 + s^2)^2} - (1 - \nu_3) \frac{1}{t^2 + s^2} \right] \sin(th_3) dt, \quad (63)$$

$$R_2(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G_3(t)ts \left[ (1 + \nu_3) \frac{2t^2}{(t^2 + s^2)^2} + \frac{2}{t^2 + s^2} \right] \cos(th_3) dt, \quad (64)$$

$$R_3(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G_3(t)t^3 \left[ \frac{t^2 - s^2}{(t^2 + s^2)^2} - \frac{1}{t^2 + s^2} \right] \cos(th_3) dt, \quad (65)$$

$$R_4(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G_3(t) t^4 \frac{2s}{(t^2+s^2)^2} \sin(th_3) dt, \quad (66)$$

$$\int_0^\infty R_5(s) \cos(sy) ds = 0, \quad (b < y < \infty), \quad (67)$$

$$\int_0^\infty R_6(s) \sin(sy) ds = \int_0^\infty G_3(t) t [ty(1+\nu_3)+2] e^{-\nu_3 t} dt, \quad (b < y < \infty), \quad (68)$$

$$R_7(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G_3(t) t^3 \left[ \frac{t^2-s^2}{(t^2+s^2)^2} - \frac{1}{t^2+s^2} \right] dt, \quad (69)$$

である。

次に、変位の微分と相対変位の微分で定義される新しい 3 つの未知関数<sup>14)</sup>

$$f_1(x) = \frac{\partial u_{3y}(x, 0)}{\partial x}, \quad (70)$$

$$f_2(y) = \frac{\partial}{\partial y} [u_{3x}(0, y) - u_{2x}(0, y)], \quad (71)$$

$$f_3(y) = \frac{\partial}{\partial y} [u_{3y}(0, y) - u_{2y}(0, y)], \quad (72)$$

を導入する。\$A\_i\$ 等で表現した変位成分式 (11), (12) を上記 \$f\_i\$ の定義式 (70)~(72) に代入し、部材 2~3 間の変位に関する連続条件から得られた関係式 (55), (56) を使うと

$$f_1(x) = -\frac{4}{\pi E_3} \int_0^\infty s^2 G_3(s) \sin(xs) ds, \quad (73)$$

$$f_2(y) = \frac{2}{\pi E_3} \int_0^\infty R_5(s) s \sin(ys) ds, \quad (74)$$

$$f_3(y) = -\frac{2}{\pi E_3} \int_0^\infty \{R_6(s) s \cos(ys) + G_3(s) s^2 [(1-\nu_3) + ys(1+\nu_3)] e^{-\nu_3 s}\} ds, \quad (75)$$

となる。式 (73)~(75) に Fourier 逆変換を施せば

$$G_3(s) = -\frac{E_3}{2s^2} \int_0^a f_1(t) \sin(ts) dt, \quad (76)$$

$$R_5(s) = E_3 \int_0^b f_2(t) F_5(t, s) dt, \quad (77)$$

$$R_6(s) = E_3 \int_0^a f_1(t) F_{6a}(t, s) dt + E_3 \int_0^b f_3(t) F_{6b}(t, s) dt, \quad (78)$$

が得られる。\$F\_5, F\_{6a}, F\_{6b}\$ は他の \$F\_i\$ と同じよにまとめて式 (86)~(89) に示されている。式 (76) の \$G\_3\$ を \$R\_j (j=1, 2, 3, 4)\$ に関する式 (63)~(66) に代入すると、

$$R_j(s) = E_3 \int_0^a f_1(t) F_j(t, s) dt, \quad (j=1, 2, 3, 4). \quad (79)$$

式 (77) より式 (67) は満足されている。式 (76) の \$G\_3\$ と式 (78) の \$R\_6\$ を式 (68) に代入すると、

$$\int_0^a f_1(t) dt - \int_0^b f_3(t) dt = 0. \quad (80)$$

式 (76) の \$G\_3\$ を \$R\_7\$ に関する式 (69) に代入すると、

$$R_7(s) = E_3 \int_0^a f_1(t) F_7(t, s) dt, \quad (81)$$

を得る。また式 (76) により式 (59) は満足されている。ここで \$F\_i(t, s)\$ は

$$F_1(t, s) = \frac{1}{2s} [(1 - \nu_3) \sinh(ts) + h_3 s(1 + \nu_3) \sinh(ts) - ts(1 + \nu_3) \cosh(ts)] e^{-h_3 s}, \quad (82)$$

$$F_2(t, s) = \frac{1}{2s} [-2 \sinh(ts) + h_3 s(1 + \nu_3) \sinh(ts) - ts(1 + \nu_3) \cosh(ts)] e^{-h_3 s}, \quad (83)$$

$$F_3(t, s) = \frac{s}{2} [t \cosh(ts) - h_3 \sinh(ts)] e^{-h_3 s}, \quad (84)$$

$$F_4(t, s) = -\frac{1}{2} [(1 - h_3 s) \sinh(ts) + ts \cosh(ts)] e^{-h_3 s}, \quad (85)$$

$$F_5(t, s) = \frac{1}{s} \sin(ts), \quad (86)$$

$$F_{6a}(t, s) = \frac{1}{s} \left[ 1 - (1 + \nu_3) \frac{ts}{2} \right] e^{-ts}, \quad (87)$$

$$F_{6b}(t, s) = -\frac{1}{s} \cos(ts), \quad (88)$$

$$F_7(t, s) = \frac{ts}{2} e^{-ts}, \quad (89)$$

となり，既知関数である。

次に式 (43)～(58) を 16 個の未知関数  $A_i$  等について解くと，

$$C_1 = (A_2 - B_2 h_2) e^{h_2 s} + (C_2 - D_2 h_2) e^{-h_2 s}, \quad (90)$$

$$D_1 = [-2A_2 s + B_2(2h_2 s + 1)] e^{h_2 s} + D_2 e^{-h_2 s}, \quad (91)$$

$$A_2 = B_2 \left( h_2 + \frac{1}{2s} \right) - D_2 \frac{E_{11}}{2s} e^{-2h_2 s}, \quad (92)$$

$$C_2 = B_2 \frac{E_{12}}{2s} e^{2h_2 s} + D_2 \left( h_2 - \frac{1}{2s} \right), \quad (93)$$

$$B_2 = (R_5 - R_6) \frac{E_2}{4E_3} - R_7 \frac{(1 + \nu_2)}{4s} - B_3 \frac{E_{18}}{4} - C_3 s \frac{E_{17}}{2} - D_3 \frac{E_{17}}{4}, \quad (94)$$

$$D_2 = (R_5 + R_6) \frac{E_2}{4E_3} + R_7 \frac{(1 + \nu_2)}{4s} + A_3 s \frac{E_{17}}{2} - B_3 \frac{E_{17}}{4} + D_3 \frac{E_{18}}{4}, \quad (95)$$

$$A_4 = -B_4 \left( h_2 - \frac{1}{2s} \right) - D_4 \frac{E_{13}}{2s} e^{2h_4 s}, \quad (96)$$

$$C_4 = B_4 \frac{E_{14}}{2s} e^{-2h_4 s} - D_4 \left( h_4 + \frac{1}{2s} \right), \quad (97)$$

$$B_4 = (R_1 - R_2) \frac{E_4}{4E_3} - (R_3 + R_4) \frac{(1 + \nu_4)}{4s} + B_3 \frac{E_{16}}{4} e^{-h_3 s} + C_3 \frac{E_{15}}{2} e^{h_3 s} + D_3(2h_3 s + 1) \frac{E_{15}}{4} e^{h_3 s}, \quad (98)$$

$$D_4 = (R_1 + R_2) \frac{E_4}{4E_3} + (R_3 + R_4) \frac{(1 + \nu_4)}{4s} - A_3 s \frac{E_{15}}{2} e^{-h_3 s} - B_3(2h_3 s - 1) \frac{E_{15}}{4} e^{-h_3 s} \\ + D_3 \frac{E_{16}}{4} e^{h_3 s}, \quad (99)$$

$$A_5 = (A_4 + B_4 h_4) e^{-h_4 s} + (C_4 + D_4 h_4) e^{h_4 s}, \quad (100)$$

$$B_5 = B_4 e^{-h_4 s} + (2C_4 s + D_4(2h_4 s + 1)) e^{h_4 s}, \quad (101)$$

および

$$A_3s^2 = \sum_{i=1}^7 Q_{Ai}(s)R_i(s), \tag{102}$$

$$B_3s = \sum_{i=1}^7 Q_{Bi}(s)R_i(s), \tag{103}$$

$$C_3s^2 = \sum_{i=1}^7 Q_{Ci}(s)R_i(s), \tag{104}$$

$$D_3s = \sum_{i=1}^7 Q_{Di}(s)R_i(s), \tag{105}$$

となる。\$R\_i\$ を \$f\_i\$ で表わした式 (77)~(79), (81) を上式に代入すれば、\$A\_i\$ 等は 3 つの新しい未知関数 \$f\_i\$ で表現できる。ここで、\$E\_{ij}\$ は材料定数の関数であり、\$Q\_{Ai}\$, \$Q\_{Bi}\$, \$Q\_{Ci}\$, \$Q\_{Di}\$ は既知関数である。その詳細はそれぞれ付録 A, B に示している。

求めた \$A\_i\$ 等のうち、式 (102)~(105) の \$A\_3\$, \$B\_3\$, \$C\_3\$, \$D\_3\$ と式 (76) の \$G\_3\$ を残った 3 つの境界条件式 (60)~(62) に代入して整理すると、最終的に、\$f\_i\$ に関する連立積分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{f_1(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^a f_1(t)K_{11}(t, x) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^b [f_2(t)K_{12}(t, x) + f_3(t)K_{13}(t, x)] dt \\ = -\frac{2}{E_3} P_0(x), \quad (0 < x < a), \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{f_2(t)}{t-y} dt + \lambda f_3(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^a f_1(t)K_{21}(t, y) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^b [f_2(t)K_{22}(t, y) + f_3(t)K_{23}(t, y)] dt \\ = -\frac{2}{a_{11}E_2} P_{11}(y), \quad (0 \leqq y \leqq b), \end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{f_3(t)}{t-y} dt - \lambda f_2(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^a f_1(t)K_{31}(t, y) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^b [f_2(t)K_{32}(t, y) + f_3(t)K_{33}(t, y)] dt \\ = -\frac{2}{a_{11}E_2} P_{12}(y), \quad (0 \leqq y < b), \end{aligned} \tag{108}$$

$$\lambda = \frac{4 + E_{17} - E_{18}}{4 + E_{17} + E_{18}}, \tag{109}$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_{18}} + \frac{1}{4 + E_{17}},$$

が得られる。ここで核関数 \$K\_{ij}\$ は非特異部分 \$K\_{ij}^0\$ と一般化された Cauchy 型特異関数 \$K\_{ij}^s\$ からなる既知関数である：

$$K_{ij} = K_{ij}^0 + K_{ij}^s. \tag{110}$$

\$K\_{ij}^s\$ は

$$K_{i1}^s = \frac{4E_{17}}{E_{18}} \frac{x^2}{(t+x)^3} - \frac{6E_{17}}{E_{18}} \frac{x}{(t+x)^2} + \left( \frac{8E_2}{E_3E_{18}} - 1 - 2a_{11} \frac{E_2}{E_3} \right) \frac{1}{t+x}, \tag{111}$$

$$K_{i2}^s = -\frac{8E_2}{E_3E_{18}} \frac{x^2 t}{(t^2+x^2)^2} + \left( \frac{8E_2}{E_3E_{18}} - 2a_{11} \frac{E_2}{E_3} \right) \frac{t}{t^2+x^2}, \tag{112}$$

$$K_{i3}^s = \frac{8E_2}{E_3E_{18}} \frac{t^2 x}{(t^2+x^2)^2} + 2a_{11} \frac{E_2}{E_3} \frac{x}{t^2+x^2}, \tag{113}$$

$$K_{2i}^s = -\frac{8}{a_{11}E_{18}} \frac{y^2 t}{(t^2+y^2)^2} + \frac{2t}{t^2+y^2}, \tag{114}$$

$$K_{22}^S = \frac{1}{(t+y)}, \quad K_{23}^S = 0, \quad (115)$$

$$K_{31}^S = -\frac{8}{a_{11}E_{18}} \frac{t^2y}{(t^2+y^2)^2} + \frac{2y}{t^2+y^2}, \quad (116)$$

$$K_{32}^S = 0, \quad K_{33}^S = \frac{-1}{(t+y)}, \quad (117)$$

であり、 $K_{ij}^S$  は 1 次関数と指数関数の積の積分で表示された関数であり、あらゆる  $(x, t)$  で収束する。その詳細は付録 C に示されている。

#### 2.4. 関数 $f_i$ の特異性と応力拡大係数

一般に、積分方程式 (106)~(108) を満足する関数  $f_i(t)$  は、次のように仮定できる<sup>18)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \frac{g_1(t)}{t^{\alpha_1}(a-t)^{\beta_1}}, \\ f_2(t) + if_3(t) &= \frac{g_2(t)}{t^{\alpha_2}(b-t)^{\beta_2}}, \end{aligned} \right\} [(0 \leq \text{Re}(\alpha_i, \beta_i) < 1); i = 1, 2]. \quad (118)$$

ここで、 $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$  は Hölder の条件を満足し、き裂の先端においてゼロではない。式 (118) を積分方程式 (106)~(108) に代入して、Muskhelishvili<sup>18)</sup> の積分理論を用いると、 $f_i(t)$  のき裂先端における特異性オーダー  $\alpha_i$  と  $\beta_i$  は

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad (119)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad (120)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} + i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right), \quad (121)$$

と求められる<sup>14)</sup>。式 (119) は垂直き裂と界面き裂の交点 ( $x_{(3)}=0$ ,  $y_{(3)}=0$ ) が特異点でないことを示す。式 (120) と (121) はそれぞれ垂直き裂先端と界面き裂先端における応力レベルの特異性を示している。

なお、き裂先端における応力拡大係数  $k_i$  を

$$k_1(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2(x-a)} \sigma_{3y}(x, 0), \quad (122)$$

$$k_1(b) + ik_2(b) = \lim_{y \rightarrow b^+} \sqrt{2(y-b)^{\beta_2}} [\sigma_{3x}(0, y) + i\tau_{3xy}(0, y)], \quad (123)$$

と定義する時、式 (119)~(121) を式 (118) の  $f_i$  に、この  $f_i$  を式 (77)~(79)、(71) の  $R_i$  と式 (76) の  $G_3$  に、更に  $R_i$  を式 (102)~(105) の  $A_3$ 、 $B_3$ 、 $C_3$ 、 $D_3$  に代入し、最後にこの  $A_3$ 、 $B_3$ 、 $C_3$ 、 $D_3$  を  $G_3$  とともに部材 3 の応力成分式 (8)~(10) に代入すれば

$$k_1(a) = -\frac{E_3}{\sqrt{2}} g_1(a), \quad (124)$$

$$k_1(b) + ik_2(b) = -\frac{a_{11}E_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\lambda^2} g_2(b), \quad (125)$$

を得る。ここで、式 (125) 中の  $a_{11}$  と  $\lambda$  は式 (109) に示されている。

また、 $f_i(t)$  の定義式 (70)~(72) より、き裂表面での変位および相対変位は

$$u_{3y}(x, 0) = -\int_x^a f_1(x) dx, \quad (126)$$

$$u_{3x}(0, y) - u_{2x}(0, y) = -\int_y^b f_2(y) dy, \quad (127)$$

$$u_{3y}(0, y) - u_{2y}(0, y) = -\int_y^b f_3(y) dy, \quad (128)$$

となる。したがって、積分方程式(106)~(108)と(80)を解けば、式(124)~(128)より応力拡大係数やき裂表面での変位などが容易に計算できる。

### 3. 2つの等方性帯板接着面に存在する

#### T 型き裂の解

図2に示す様な2つの帯板接着面に T 型き裂が存在する場合の理論解は、今回の解析結果より直接導くことができる。つまり図1と2の対応より部材1, 4, 5の各ヤング率  $E_1, E_4, E_5$  をゼロと置けば良い。この3つの値が最終的な積分方程式(106)~(108)の各項あるいは各係数に登場するのは、付録Aの式(A.1)~(A.6)と付録Bの式(B.15)~(B.16), (B.20)~(B.21)においてだけである。この値をゼロと置くことによって参考文献14)と同じ積分方程式が得られる。この場合の  $E_{ij}, Q_{A(B,C,D)i}, K_{ij}$  はかなり簡単なものになってくる。付録AおよびBと比較して付録Dに示す。

### 4. 結 果

本論文では、複合材料内部き裂問題の基礎的な研究の一つとして、現実的な体積含有率をカバーできる5部材モデルを用い、一方向繊維強化複合材料内部接着面の T 型き裂を理論的に解析した。2次元線形弾性理論に基づき、Airy の応力関数および Fourier 変換を用いて、上記問題を連立特異積分方程式に帰着させた。また、これより2つの等方性帯板接着面に存在する T 型き裂の解を導いた。

### 謝 辞

本論文の作成にあたり、本研究所川建和雄教授には有益な助言と励ましをいただいた。また清書を篠崎由美さんをお願いした。なお、この研究は一部文部省科学研究費一般(C)の援助を受けて行った。

### 参 考 文 献

- 1) Cooper, G. A. & Kelly, A., Tensile properties of fiber-reinforced metals: Fracture mechanics, J. Mech. Phys. Solids, 15 (1967), pp. 279-297.
- 2) Dharan, C. K. H., Fracture mechanics of composite materials, J. Eng. Material and Technology, Trans. ASME, 100 (1978), pp. 233-247.

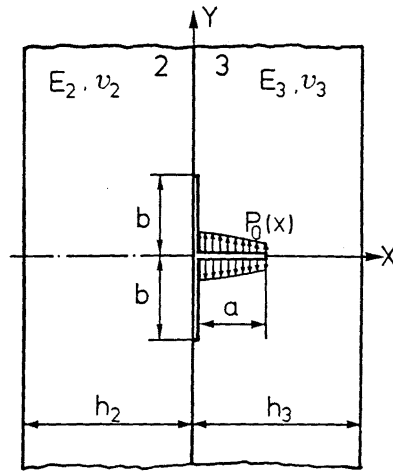


Fig. 2 A T-shaped crack at the interface of two bonded strips.

- 3) Wang, S. S. & Wang, H. T., Interlaminar crack growth in fiber reinforced composites during fatigue, *J. Eng. Material and Technology, Trans. ASME*, 101 (1979), pp. 34-41.
- 4) Theocaris, P. S. & Stassirakis, C. A., Crack propagation in fibrous composite materials studied by SEM, *J. Composite Materials*, 15 (1981), pp. 133-141.
- 5) Newaz, G. M., On interfacial failure in notched unidirectional glass/epoxy composites, *J. Composite Materials*, 19 (1985), pp. 276-286.
- 6) 山崎・結城・北川, エポキシ複合板の異材境界における疲労き裂の分岐現象に関する検討, *機論*, 52-473, A (昭61), pp. 108-116.
- 7) Pacella, A. H. & Erdogan, F., A Penny-shaped crack in a filament-reinforced matrix-II. The crack problem, *Int. J. Solids Structures*, 10 (1974), pp. 807-819.
- 8) Wang, W. X., Takao, Y. & Suhara, T., A fiber-reinforced matrix containing a penny-shaped crack under Mode III loading condition, *Int. J. Eng. Sci.*, (accepted for publication).
- 9) Erdogan, F. & Ozbek, T., Stress in fiber-reinforced composites with imperfect bonding, *J. Appl. Mech.*, 36 (1969), pp. 865-869.
- 10) 笠野・松本・中原, 円筒面状界面き裂を有する非均質異方性弾性体, *機論*, 51-471号, A (昭60), pp. 2450-2458.
- 11) Delale, F. & Erdogan, F., Bonded orthotropic strips with cracks, *Int. J. Fract.*, 15 (1979), pp. 343-364.
- 12) 関根・神谷, 一方向連続繊維強化複合材料中のせん断破壊の解析, *機論*, 52-480 (昭61), pp. 2001-2009.
- 13) Goree, J. G. & Venezia, W. V., Bonded elastic half-planes with an interface crack and a perpendicular intersecting crack that extends into the adjacent material-I, *Int. J. Eng. Sci.*, 15 (1977), pp. 1-17.
- 14) Lu, M. C. & Erdogan, F., Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface-I. Analysis, *Eng. Fract. Mech.* 18 (1983), pp. 491-506.
- 15) Lu, M. C. & Erdogan, F., Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface-II. Solution and results *Eng. Fract. Mech.* 18 (1983), pp. 507-528.
- 16) Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970, Chap. 3.
- 17) Snedden, I. N., *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951, Chap. 1.
- 18) Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen, The Netherland, 1953, Chap. 4.

(昭和62年5月30日 受理)

付録A

$$E_{11} = \left[ \frac{E_1}{E_2} (3 - \nu_2) - (3 - \nu_1) \right] / \left[ \frac{E_1}{E_2} (1 + \nu_2) + (3 - \nu_1) \right], \quad (\text{A.1})$$

$$E_{12} = \left[ \frac{E_1}{E_2} (3 - \nu_2) + (1 + \nu_1) \right] / \left[ \frac{E_1}{E_2} (1 + \nu_2) - (1 + \nu_1) \right], \quad (\text{A.2})$$

$$E_{13} = \left[ \frac{E_3}{E_4} (3 - \nu_4) + (1 + \nu_5) \right] / \left[ \frac{E_3}{E_4} (1 + \nu_4) - (1 + \nu_5) \right], \quad (\text{A.3})$$

$$E_{14} = \left[ \frac{E_5}{E_4} (3 - \nu_4) - (3 - \nu_5) \right] / \left[ \frac{E_5}{E_4} (1 + \nu_4) + (3 - \nu_5) \right], \quad (\text{A.4})$$

$$E_{15} = (1 + \nu_4) - (1 + \nu_3) \frac{E_4}{E_3}, \quad (\text{A.5})$$

$$E_{16} = (1 + \nu_4) + (3 - \nu_3) \frac{E_4}{E_3}, \quad (\text{A.6})$$

$$E_{17} = -(1 + \nu_2) + (1 + \nu_3) \frac{E_2}{E_3}, \quad (\text{A.7})$$

$$E_{18} = (1 + \nu_2) + (3 - \nu_3) \frac{E_2}{E_3}. \quad (\text{A.8})$$

## 付録 B

$$Q_{Ai}(s) = Q_{Bi}(s) \frac{b_{11}}{b_a} + Q_{Di}(s) \frac{b_{12}}{b_a} + \frac{q_{ai}}{b_a}, \quad (\text{B.1})$$

$$Q_{Ci}(s) = -Q_{Bi}(s) \frac{b_{21}}{b_c} - Q_{Di}(s) \frac{b_{22}}{b_c} + \frac{q_{bi}}{b_c}, \quad (\text{B.2})$$

$$Q_{Bi}(s) = \frac{1}{\Delta_a} [q_{ci}\alpha_{22} - q_{ai}\alpha_{12}], \quad (\text{B.3})$$

$$Q_{Di}(s) = \frac{1}{\Delta_a} [q_{ai}\alpha_{11} - q_{ci}\alpha_{21}], \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta_a = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}, \quad (\text{B.5})$$

ここで,

$$b_a = 2(1 + E_{17}RE_{11}), \quad (\text{B.6})$$

$$b_c = 2(1 + E_{17}RE_{12}) + \frac{(h_2E_{17}S)^2}{b_a}, \quad (\text{B.7})$$

$$b_{11} = d_{14} + h_2E_{17}S \frac{b_{21}}{b_c}, \quad (\text{B.8})$$

$$b_{12} = d_{24} + h_2E_{17}S \frac{b_{22}}{b_c}, \quad (\text{B.9})$$

$$b_{21} = d_{13} - h_2E_{17}S \frac{d_{14}}{b_a}, \quad (\text{B.10})$$

$$b_{22} = d_{23} - h_2E_{17}S \frac{d_{24}}{b_a}, \quad (\text{B.11})$$

$$q_{ai} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{B.12})$$

$$q_{bi} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{B.13})$$

$$q_{ai} = -r_{ai} \frac{h_2E_{17}S}{b_c} + r_{bi} \left[ 1 - \frac{(h_2E_{17}S)^2}{b_ab_c} \right], \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{B.14})$$

$$q_{bi} = r_{ai} + r_{bi} \frac{h_2E_{17}S}{b_a}, \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{B.15})$$

$$q_{c1} = s \frac{E_4}{E_3} \left( RE_{14} - \frac{h_4s}{2} \right), \quad (\text{B.16})$$

$$q_{c2} = -s \frac{E_4}{E_3} \left( RE_{14} + \frac{h_4s}{2} \right), \quad (\text{B.17})$$

$$q_{c3} = 1 - (1 + \nu_4) \left( RE_{14} + \frac{h_4 s}{2} \right), \quad (\text{B.18})$$

$$q_{c4} = 1 - (1 + \nu_4) \left( RE_{14} - \frac{h_4 s}{2} \right), \quad (\text{B.19})$$

$$q_{ci} = q_{ai} \frac{h_4 E_{15} s}{b_a} e^{-h_3 s} - q_{bi} \frac{2(1 - E_{15} RE_{14})}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{B.20})$$

$$q_{d1} = -s \frac{E_4}{E_3} \left( RE_{13} + \frac{h_4 s}{2} \right), \quad (\text{B.21})$$

$$q_{d2} = -s \frac{E_4}{E_3} \left( RE_{13} - \frac{h_4 s}{2} \right), \quad (\text{B.22})$$

$$q_{d3} = 1 - (1 + \nu_4) \left( RE_{13} - \frac{h_4 s}{2} \right), \quad (\text{B.23})$$

$$q_{d4} = -1 + (1 + \nu_4) \left( RE_{13} + \frac{h_4 s}{2} \right), \quad (\text{B.24})$$

$$q_{di} = q_{ai} \frac{2(1 - E_{15} RE_{14})}{b_a} e^{-h_3 s} - q_{bi} \frac{h_4 E_{15} s}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{B.25})$$

$$\alpha_{11} = \left( d_{11} - h_4 E_{15} s \frac{b_{11}}{b_a} \right) e^{-h_3 s} - 2(1 - E_{15} RE_{14}) \frac{b_{21}}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (\text{B.26})$$

$$\alpha_{12} = \left( d_{21} - h_4 E_{15} s \frac{b_{12}}{b_a} \right) e^{-h_3 s} - 2(1 - E_{15} RE_{14}) \frac{b_{22}}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (\text{B.27})$$

$$a_{21} = \left[ d_{12} + 2(1 - E_{15} RE_{13}) \frac{b_{11}}{b_a} \right] e^{-h_3 s} - h_4 E_{15} s \frac{b_{21}}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (\text{B.28})$$

$$\alpha_{22} = \left[ d_{22} + 2(1 - E_{15} RE_{13}) \frac{b_{12}}{b_a} \right] e^{-h_3 s} - h_4 E_{15} s \frac{b_{22}}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (\text{B.29})$$

$$RE_{11} = \frac{1}{4} (1 + E_{11} e^{-2h_2 s}), \quad (\text{B.30})$$

$$RE_{12} = \frac{1}{4} (1 + E_{12} e^{2h_3 s}), \quad (\text{B.31})$$

$$RE_{13} = \frac{1}{4} (1 + E_{13} e^{2h_4 s}), \quad (\text{B.32})$$

$$RE_{14} = \frac{1}{4} (1 + E_{14} e^{-2h_4 s}), \quad (\text{B.33})$$

$$d_{11} = 1 - E_{16} RE_{14} - (2h_3 s - 1) h_4 E_{15} \frac{s}{2}, \quad (\text{B.34})$$

$$d_{12} = (1 - E_{15} RE_{13})(2h_3 s - 1) + h_4 E_{16} \frac{s}{2}, \quad (\text{B.35})$$

$$d_{13} = 1 + h_2 E_{17} \frac{s}{2} - E_{18} RE_{12}, \quad (\text{B.36})$$

$$d_{14} = 1 + h_2 E_{18} \frac{s}{2} + E_{17} RE_{11}, \quad (\text{B.37})$$

$$d_{21} = (1 - E_{15} RE_{14})(2h_3 s + 1) + h_4 E_{16} \frac{s}{2}, \quad (\text{B.38})$$

$$d_{22} = -1 + E_{18} RE_{13} + (2h_3 s + 1) h_4 E_{15} \frac{s}{2}, \quad (\text{B.39})$$

$$d_{23} = 1 - h_2 E_{18} \frac{s}{2} + E_{17} R E_{12} , \quad (B.40)$$

$$d_{24} = 1 - h_2 E_{17} \frac{s}{2} - E_{18} R E_{11} , \quad (B.41)$$

$$r_{a5} = s \frac{E_2}{E_3} \left( R E_{12} + \frac{h_2 s}{2} \right) , \quad (B.42)$$

$$r_{a6} = -s \frac{E_2}{E_3} \left( R E_{12} - \frac{h_2 s}{2} \right) , \quad (B.43)$$

$$r_{a7} = 1 + (1 + \nu_2) \left( \frac{h_2 s}{2} - R E_{12} \right) , \quad (B.44)$$

$$r_{b5} = -s \frac{E_2}{E_3} \left( R E_{11} - \frac{h_2 s}{2} \right) , \quad (B.45)$$

$$r_{b6} = -s \frac{E_2}{E_3} \left( R E_{11} + \frac{h_2 s}{2} \right) , \quad (B.46)$$

$$r_{b7} = 1 - (1 + \nu_2) \left( \frac{h_2 s}{2} + R E_{11} \right) . \quad (B.47)$$

付録 C

$$K_{11}^0(t, x) = 4 \int_0^\infty \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 Q_{ai}(x, s) F_i(t, s) \right] + \left[ (Q_{a6}(x, s) - Q_{a6}^\infty(x, s)) F_{6a}(t, s) + (Q_{a7}(x, s) - Q_{a7}^\infty(x, s)) F_7(t, s) \right] \right\} ds , \quad (C.1)$$

$$K_{12}^0(t, x) = 4 \int_0^\infty [Q_{a5}(x, s) - Q_{a5}^\infty(x, s)] F_5(t, s) ds , \quad (C.2)$$

$$K_{13}^0(t, x) = 4 \int_0^\infty [Q_{a6}(x, s) - Q_{a6}^\infty(x, s)] F_{6b}(t, s) ds , \quad (C.3)$$

$$K_{21}^0(t, y) = \frac{4E_3}{a_{11}E_2} \int_0^\infty \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 Q_{\beta i}(s) F_i(t, s) \right] + \left[ (Q_{\beta 6}(s) - Q_{\beta 6}^\infty(s)) F_{6a}(t, s) + (Q_{\beta 7}(s) - Q_{\beta 7}^\infty(s)) F_7(t, s) \right] \right\} \cos(sy) ds , \quad (C.4)$$

$$K_{22}^0(t, y) = \frac{4E_3}{a_{11}E_2} \int_0^\infty [Q_{\beta 5}(s) - Q_{\beta 5}^\infty(s)] F_5(t, s) \cos(sy) ds , \quad (C.5)$$

$$K_{23}^0(t, y) = \frac{4E_3}{a_{11}E_2} \int_0^\infty [Q_{\beta 6}(s) - Q_{\beta 6}^\infty(s)] F_{6b}(t, s) \cos(sy) ds , \quad (C.6)$$

$$K_{31}^0(t, y) = -\frac{4E_3}{a_{11}E_2} \int_0^\infty \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 Q_{\gamma i}(s) F_i(t, s) \right] + \left[ (Q_{\gamma 6}(s) - Q_{\gamma 6}^\infty(s)) F_{6a}(t, s) + (Q_{\gamma 7}(s) - Q_{\gamma 7}^\infty(s)) F_7(t, s) \right] \right\} \sin(sy) ds , \quad (C.7)$$

$$K_{32}^0(t, y) = -\frac{4E_3}{a_{11}E_2} \int_0^\infty [Q_{\gamma 5}(s) - Q_{\gamma 5}^\infty(s)] F_5(t, s) \sin(sy) ds , \quad (C.8)$$

$$K_{33}^0(t, y) = \frac{4E_3}{a_{11}E_2} \int_0^\infty [Q_{\gamma 6}(s) - Q_{\gamma 6}^\infty(s)] F_{6b}(t, s) \sin(sy) ds , \quad (C.9)$$

ここで,

$$Q_{ai}(x, s) = [Q_{Ai}(s) + Q_{Bi}(s)(xs - 2)]e^{-xs} + [Q_{Ci}(s) + Q_{Di}(s)(xs + 2)]e^{xs} , \quad (i = 1, 2, 3, 4) , \quad (C.10)$$

$$Q_{a5}^\infty(x, s) = \left[ -\left( \frac{1}{E_{18}} + \frac{1}{4 + E_{17}} \right) \frac{s}{2} - (sx - 2) s \frac{1}{E_{18}} \right] \frac{E_2}{E_3} e^{-xs} , \quad (C.11)$$

$$Q_{\alpha 6}^{\infty}(x, s) = \left[ \left( \frac{1}{E_{18}} - \frac{1}{4 + E_{17}} \right) \frac{s}{2} + (sx - 2)s \frac{1}{E_{18}} \right] \frac{E_2}{E_3} e^{-xs}, \quad (C.12)$$

$$Q_{\alpha 7}^{\infty}(x, s) = \left[ \frac{(3 - \nu_2)}{2(4 + E_{17})} + \left( xs - \frac{3}{2} \right) \frac{(1 + \nu_2)}{E_{18}} \right] e^{-xs}, \quad (C.13)$$

$$Q_{\beta i}(s) = -[Q_{A_i}(s) + Q_{C_i}(s)], \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (C.14)$$

$$Q_{\beta 5}^{\infty}(s) = \left[ \frac{1}{E_{18}} + \frac{1}{(4 + E_{17})} \right] \frac{E_2}{E_3} \frac{s}{2}, \quad (C.15)$$

$$Q_{\beta 6}^{\infty}(s) = - \left[ \frac{1}{E_{18}} - \frac{1}{(4 + E_{17})} \right] \frac{E_2}{E_3} \frac{s}{2}, \quad (C.16)$$

$$Q_{\beta 7}^{\infty}(s) = - \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 + \nu_2)}{E_{18}} + \frac{(3 - \nu_2)}{(4 + E_{17})} \right], \quad (C.17)$$

$$Q_{\gamma i}(s) = -[Q_{A_i}(s) - Q_{B_i}(s) - Q_{C_i}(s) - Q_{D_i}(s)], \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (C.18)$$

$$Q_{\gamma 5}^{\infty}(s) = \left[ \frac{1}{E_{18}} - \frac{1}{(4 + E_{17})} \right] \frac{E_2}{E_3} \frac{s}{2}, \quad (C.19)$$

$$Q_{\gamma 6}^{\infty}(s) = - \left[ \frac{1}{E_{18}} + \frac{1}{(4 + E_{17})} \right] \frac{E_2}{E_3} \frac{s}{2}, \quad (C.20)$$

$$Q_{\beta 7}^{\infty}(s) = - \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 + \nu_2)}{E_{18}} - \frac{(3 - \nu_2)}{4 + E_{17}} \right]. \quad (C.21)$$

付録D 2つの等方性帯板接着面に存在するT型き裂の場合； ( $E_1 = E_4 = E_5 = 0$ )

$$E_{11} = E_{12} = E_{13} = E_{14} = -1, \quad (D.1)$$

$$E_{15} = E_{16} = 1, \quad (D.2)$$

$$E_{17} = -(1 + \nu_2) + (1 + \nu_3) \frac{E_2}{E_3}, \quad (D.3)$$

$$E_{18} = (1 + \nu_2) + (3 - \nu_3) \frac{E_2}{E_3}, \quad (D.4)$$

$$Q_{A_i}(s) = Q_{B_i}(s) \frac{b_{11}}{b_a} + Q_{D_i}(s) \frac{b_{12}}{b_a} + \frac{q_{ai}}{b_a}, \quad (D.5)$$

$$Q_{C_i}(s) = -Q_{B_i}(s) \frac{b_{21}}{b_c} - Q_{D_i}(s) \frac{b_{22}}{b_c} + \frac{q_{bi}}{b_c}, \quad (D.6)$$

$$Q_{B_i}(s) = \frac{1}{\Delta_a} [q_{ci} \alpha_{22} - q_{di} \alpha_{12}], \quad (D.7)$$

$$Q_{D_i}(s) = \frac{1}{\Delta_a} [q_{di} \alpha_{11} - q_{ci} \alpha_{21}], \quad (D.8)$$

$$\Delta_a = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}, \quad (D.9)$$

ここで,

$$b_a = 2(1 + E_{17} R E_{11}), \quad (D.10)$$

$$b_c = 2(1 + E_{17} R E_{12}) + \frac{(h_2 E_{17} S)^2}{b_a}, \quad (D.11)$$

$$b_{11} = d_{14} + h_2 E_{17} S \frac{b_{21}}{b_c}, \quad (D.12)$$

$$b_{12} = d_{24} + h_2 E_{17} S \frac{b_{22}}{b_c}, \quad (D.13)$$

$$b_{21} = d_{13} - h_2 E_{17} S \frac{d_{14}}{b_a}, \quad (\text{D.14})$$

$$b_{22} = d_{23} - h_2 E_{17} S \frac{d_{24}}{b_a}, \quad (\text{D.15})$$

$$q_{ai} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{D.16})$$

$$q_{bi} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{D.17})$$

$$q_{ai} = -r_{ai} \frac{h_2 E_{17} S}{b_c} + r_{bi} \left[ 1 - \frac{(h_2 E_{17} S)^2}{b_a b_c} \right], \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{D.18})$$

$$q_{bi} = r_{ai} + r_{bi} \frac{h_2 E_{17} S}{b_a}, \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{D.19})$$

$$q_{c1} = q_{c2} = 0, \quad (\text{D.20})$$

$$q_{c3} = q_{c4} = 1, \quad (\text{D.21})$$

$$q_{ci} = -q_{bi} \frac{2}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{D.22})$$

$$q_{d1} = q_{d2} = q_{d3} = q_{d4} = 0, \quad (\text{D.23})$$

$$q_{di} = q_{ai} \frac{2}{b_a} e^{-h_3 s}, \quad (i = 5, 6, 7), \quad (\text{D.24})$$

$$\alpha_{11} = d_{11} e^{-h_3 s} - 2 \frac{b_{21}}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (\text{D.25})$$

$$\alpha_{12} = d_{21} e^{-h_3 s} - 2 \frac{b_{22}}{b_c} e^{h_3 s}, \quad (\text{D.26})$$

$$\alpha_{21} = (d_{12} + 2 \frac{b_{11}}{b_a}) e^{-h_3 s}, \quad (\text{D.27})$$

$$\alpha_{22} = (d_{22} + 2 \frac{b_{12}}{b_a}) e^{-h_3 s}, \quad (\text{D.28})$$

$$RE_{11} = \frac{1}{4} (1 - e^{-2h_2 s}), \quad (\text{D.29})$$

$$RE_{12} = \frac{1}{4} (1 - e^{2h_2 s}), \quad (\text{D.30})$$

$$RE_{13} = RE_{14} = 0, \quad (\text{D.31})$$

$$d_{11} = d_{12} = 1, \quad (\text{D.32})$$

$$d_{13} = 1 + h_2 E_{17} \frac{S}{2} - E_{18} RE_{12}, \quad (\text{D.33})$$

$$d_{14} = 1 + h_2 E_{18} \frac{S}{2} + E_{17} RE_{11}, \quad (\text{D.34})$$

$$d_{21} = d_{22} = 1, \quad (\text{D.35})$$

$$d_{23} = 1 - h_2 E_{18} \frac{S}{2} + E_{17} RE_{12}, \quad (\text{D.36})$$

$$d_{24} = 1 - h_2 E_{17} \frac{S}{2} - E_{18} RE_{11}, \quad (\text{D.37})$$

$$r_{a5} = s \frac{E_2}{E_3} \left( RE_{12} + \frac{h_2 S}{2} \right), \quad (\text{D.38})$$

$$r_{a6} = -s \frac{E_2}{E_3} \left( RE_{12} - \frac{h_2 s}{2} \right), \quad (\text{D.39})$$

$$r_{a7} = 1 + (1 + \nu_2) \left( \frac{h_2 s}{2} - RE_{12} \right), \quad (\text{D.40})$$

$$r_{b5} = -s \frac{E_2}{E_3} \left( RE_{11} - \frac{h_2 s}{2} \right), \quad (\text{D.41})$$

$$r_{b6} = -s \frac{E_2}{E_3} \left( RE_{11} + \frac{h_2 s}{2} \right), \quad (\text{D.42})$$

$$r_{b7} = 1 - (1 + \nu_2) \left( \frac{h_2 s}{2} + RE_{11} \right). \quad (\text{D.43})$$

なお、 $K_B^s$  と  $K_B^0$  は式 (111)～(117) と付録Cに示すものと同じ式を使えばよい。