

## 電子ビーム・プラズマの不安定性とソリトン

矢嶋, 信男  
九州大学応用力学研究所 : 教授

田中, 雅慶  
九州大学大学院総合理工学研究科 : 助手

<https://doi.org/10.15017/4743767>

---

出版情報 : 應用力學研究所所報. 63, pp.281-288, 1987-01. 九州大学応用力学研究所  
バージョン :  
権利関係 :



# 電子ビーム・プラズマの不安定性とソリトン

矢 嶋 信 男<sup>1)</sup> 田 中 雅 慶<sup>2)</sup>

## 概 要

プラズマ内に電子ビームを入射した時に励起される高周波の不安定波動の非線形発展過程が考察される。数値計算と摂動論的解析によって、ソリトンのパルスの発生が不安定性の成長過程で重要な役割を果たすことが示された。

## 1. 序 論

プラズマ内の高周波波動（例えばプラズマ振動）は、その波長が長く振幅が大きければ、イオン音波との結合によってプラズマ内に低周波の時空構造をつくり出す。この過程が1次元的に進行すれば、非線形変調を経て、包絡ソリトンの発生につながる。多次元的な効果を考えると、この包絡ソリトンは不安定となって、いわゆる“collapse”の現象が見られる<sup>1)</sup>。この一連の過程は、Zakharov が始めてその可能性を指摘して以来、多くの人達によって理論研究や計算機シミュレーションの対象とされてきた。しかし、この過程を現実のプラズマに於いて観測するためには、あらかじめ大振幅の高周波波動をプラズマ内に励起しておくことが必要である。じっさいに、Wong 達<sup>2)</sup>は電子ビームやマイクロ波を入射することによって大振幅ラングミュア波の“collapse”現象を実験的に確かめている。

しかしながら、プラズマ内に電子ビームが存在する場合の波動特性は、非ビーム系の場合にくらべて、著しく異なっている。通常のラングミュア波の他にビーム系に固有の不安定モードが存在し得るので、状況は複雑になってくる。したがって、プラズマが一様で平衡状態にあることを前提としたZakharov の理論をビーム系にそのまま適用することはできない。

この論文では、電子ビーム・プラズマにおけるラングミュア波の自己変調効果について調べる。以下では、まず流体近似を用いてビーム効果のために修正された非線形 Schrödinger 方程式を導く。この方程式は、ビーム項の存在のために、解析的とりあつかいが難しく、パルス的な定常解の存在すら明らかではない。それゆえ、ここでは不安定効果が弱い場合をとくにとりあげて、特異摂動法と数値計算の併用によって、ビームモードの成長過程が調べられる。その結果、不安定モードの成長過程で時空的に局在化したパルスソリトンの励起が重要な役割を果たしていることが明らかにされる。

## 2. 基礎方程式

プラズマを構成している電子とイオン、ならびにビーム電子の密度と流れ速度を、それぞれ  $(n_e, \mathbf{u}_e)$ ,  $(n_i, \mathbf{u}_i)$ ,  $(n_b, \mathbf{u}_b)$  と書くと、次の式が成立する。

1) 九州大学, 応用力学研究所教授

2) 九州大学総合理工学研究科助手

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla(n_e \mathbf{u}_e) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \nabla) \mathbf{u}_e = -\frac{e}{m} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{e}{m} \nabla \delta \Phi - \frac{T_e}{m n_e} \nabla n_e \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla(n_i \mathbf{u}_i) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \nabla) \mathbf{u}_i = -\frac{e}{M} \nabla \delta \Phi \quad (4)$$

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \nabla(n_b \mathbf{u}_b) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} + (\mathbf{u}_b \nabla) \mathbf{u}_b = -\frac{e}{m} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{e}{m} \nabla \delta \Phi \quad (6)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{E}}$  は高周波電場、 $\delta \Phi$  は低周波静電位、 $T_e$  は電子温度、 $m$  は電子質量、 $M$  はイオン質量、 $\pm e$  はイオンならびに電子の電荷である。ここで、イオンとビームの温度効果は無視されている。また、イオンに対する高周波場の影響も無視されている。

電場の高周波成分と低周波成分に対応して、物理量  $Q$  を、

$$Q = Q_0 + \tilde{Q} + \delta Q$$

のように表わす。 $Q_0$  は非摂動状態量、 $\tilde{Q}$  は高周波変動量、 $\delta Q$  は低周波変動量を示している。この記法を用いれば、

$$\nabla \tilde{\mathbf{E}} = -4\pi e (\tilde{n}_e + \tilde{n}_b) \quad (7)$$

$$\nabla^2 \delta \Phi = -4\pi e (\delta n_i - \delta n_e - \delta n_b) \quad (8)$$

が成立する。

長波長の波動を考えているので、高周波成分の非線形項は高次の補正を与える。このことを考慮に入れると、(1)~(6)の高周波成分は、 $\tilde{\mathbf{u}}_e$ 、 $\tilde{\mathbf{u}}_b$  を消去して

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{T_e}{m} \nabla^2 \right) \tilde{n}_e - \frac{e}{m} \nabla (n_{e,0} + \delta n_e) \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \nabla \right)^2 \tilde{n}_b - \frac{e}{m} \nabla (n_{b,0} + \delta n_b) \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (10)$$

となる。ここで  $\tilde{n}_e \nabla \Phi$  や  $\tilde{n}_b \nabla \Phi$  を含む項は、 $\delta n_e \tilde{\mathbf{E}}$  などに比べて  $\sim \lambda_D^2 \nabla^2$  のオーダーになっているので、無視してある。 $\mathbf{u}_0$  はビームの速度である。これらの式に(7)を考慮して、 $\tilde{n}_e$  を消去すると、

$$\nabla \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_0^2 \nabla^2 + \omega_e^2 \left( 1 + \frac{\delta n_e}{n_{e,0}} \right) \right] \tilde{\mathbf{E}} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{T_e}{m} \nabla^2 \right) 4\pi e \tilde{n}_b$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \nabla \right)^2 4\pi e \tilde{n}_b = \alpha \omega_e^2 \nabla \left( 1 + \frac{\delta n_b}{n_{b,0}} \right) \tilde{\mathbf{E}}$$

を得る。ここで  $\alpha$  はビーム定数とよばれ、

$$\alpha = n_{b,0} / n_{e,0} \quad (11)$$

で定義される。通常  $\alpha$  は小さいので、ビーム方程式の右辺で  $\delta n_b$  を含む項は落してもさしつかえない。また、 $\omega_e$  は電子プラズマ振動数である。

高周波場の振動数が  $\sim \pm \omega_e$  であることを用いて、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \quad 4\pi n_b = \frac{1}{2}(\rho + \rho^*) \quad (12)$$

とする。 $\mathbf{E}$ 、 $\rho$  は振動数  $\omega_e$  で振動しながらゆっくりと時間的に変動していると考え、すなわち、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_e^2\right)\mathbf{E} \cong -2\omega_e \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \omega_e\right)\mathbf{E}$$

とすることができる。これらをまとめて、

$$\nabla \left[ i\frac{\partial}{\partial t} - \omega_e + \frac{\omega_e}{2} \lambda_b^2 \nabla^2 - \frac{\omega_e}{2} \frac{\delta n_e}{n_{e,0}} \right] \mathbf{E} = -\frac{\omega_e}{2} \rho \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \nabla\right)^2 \rho = \alpha \omega_e^2 \nabla \mathbf{E} \quad (14)$$

が高周波振動を与える方程式である。Zakharov に従えば  $\delta n_e/n_{e,0}$  は高周波場のポンドロモティブ力を与えられるので、

$$\frac{\delta n_e}{n_{e,0}} = -\frac{|\mathbf{E}|^2}{16\pi n_{e,0} T_e} \quad (15)$$

となる。

方程式(13)~(15)は、電子ビームの影響によって高周波振動 ( $\sim \omega_e$ ) が励起され、ポンドロモティブ力の作用で低周波の時空構造が形成される全過程を記述している。以下では、これらのうちで1次元的なふるまいに焦点をあて、とくに不安定波の発展過程が調べられる。ビームの速度  $\mathbf{u}_0$  の方向に  $x$  軸をえらび、波も  $x$  方向にのみ伝播するものとする。われわれが考えているのは縦波であるので、 $\mathbf{E}$  は  $x$  成分以外は0になる。このとき(13)~(15)は

$$i\frac{\partial f}{\partial t} - f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + |f|^2 f = -\frac{4}{27} \kappa^3 g \quad (16)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + V\frac{\partial g}{\partial x} = h \quad (17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V\frac{\partial h}{\partial x} = f \quad (18)$$

の形に書くことができる。ここで、

$$x/\lambda_b \rightarrow x, \quad \omega_e t \rightarrow t \quad (19)$$

と無次元化し、

$$\mathbf{E}_x = \sqrt{32\pi n_{e,0} T_e} f, \quad \rho = \alpha \sqrt{32\pi n_{e,0} T_e} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (20)$$

とおいた。また、ビーム速度  $u_0$  は電子の熱速度  $u_T = \sqrt{T_e/m}$  で規格化し、 $\alpha$  の代りに  $\kappa$  を用いてある：

$$V = u_0/u_T, \quad x = 3a^{1/3}/2 \quad (21)$$

$h$  は補助的な変数で、物理的にはビーム速度の変調に関連した量である。

### 3. 不安定平面波の非線形発展

(16)~(18)式を線形化すると、分散式として

$$\omega - \frac{4}{27} x^3 \frac{1}{(\omega - kV)^2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \quad (22)$$

を得る。これは、 $V < \sqrt{2(1+x)}$  のときには、 $k$  の値によらず不安定である。 $V > \sqrt{2(1+x)}$  のときには

$$k < V(1 - \sqrt{1 - 2(1+x)/V^2}) \equiv k_c \quad (23)$$

で不安定となる。ビーム速度が熱速度にくらべて十分大きく  $V \gg 1$  であれば、臨界波数  $k_c$  は

$$k_c \approx (1+x)/V \quad (24)$$

と表わせる。(24)から  $k_c \ll 1$  となるので、励起される波の波長は十分長いことがわかる。 $0 < k_c - k \ll 1$  であれば(22)の根のうちで複素根は、

$$\omega_{\pm} \approx k_c V - \frac{2}{3} x \pm i \frac{2}{3} \sqrt{xV(k_c - k)} \quad (25)$$

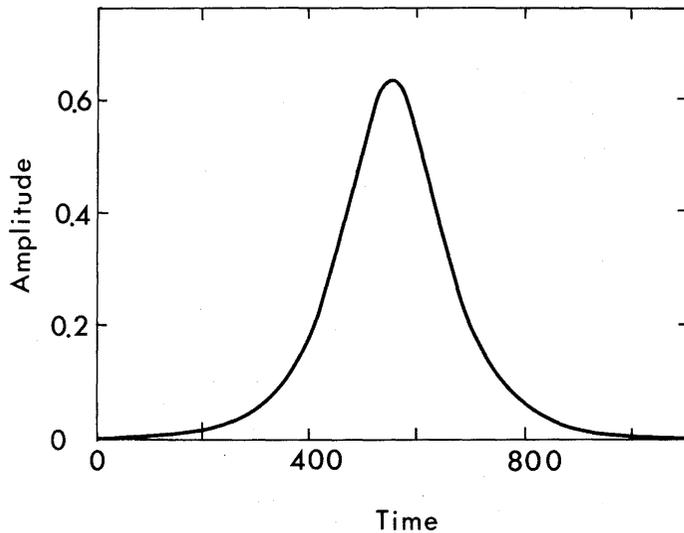
となって、不安定波の成長率は、

$$\gamma = \frac{2}{3} \sqrt{xV(k_c - k)} \quad (26)$$

であることが判る。

非線形項があると、このような不安定波はどのように発展するのであろうか。(16)~(18)式を、 $t=0$  で

$$f = A_0 e^{ikx}, \quad g = -f/(\omega_+ - kV)^2, \quad h = if/(\omega_+ - kV) \quad (27)$$



第1図 不安定波の振幅の時間変化

の初期条件を与えて、数値的に解いたものが第1図に示してある。平面波の振幅は、初めのうちは  $\exp(\gamma t)$  に比例して増加し、ある時刻で最大値に達した後は再び減衰して、 $\exp(-\gamma t)$  に比例して消滅する。このように、非線形波動における不安定過程は、通常不安定系の非線形緩和過程と異なって、可逆的にふるまう、このことは、方程式(16)~(18)が時間反転に対して不変であることと関係している。

#### 4. 臨界点近傍の不安定波動

第1図で示した不安定波動の傾向を近似的に求めてみよう。変数  $f, g, h$  を

$$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} e^{i(k_c x - \omega_r t)} \quad (28)$$

と書いておく。  $k_c$  は(23)で定義された臨界波数で

$$\frac{1}{2} k_c^2 - k_c V + (1+x) = 0 \quad (29)$$

を満たしている。  $\omega_r$  は  $k=k_c$  における(22)の根で、(25)で定義された  $\omega_+$  を用いて

$$\omega_r = \omega_+(k_c) = k_c V - \frac{2}{3} x \quad (30)$$

で与えられる。われわれは臨界点近傍のふるまいに関心があるので、  $\varphi_i (i=1, 2, 3)$  は  $x, t$  に弱く依存していると仮定する。

(17), (18)を考慮して、逐次近似を用いて  $\varphi_2$  を  $\varphi_1$  で表わす。すなわち、

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -\frac{9}{4x^2} \varphi_1 - \frac{27i}{4x^3} \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_1 \\ & + \frac{243}{16x^4} \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi_1 + O\left( \frac{\partial^3}{\partial t^3}, \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

これを(16)に代入して、

$$-iV \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{9}{4x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + |\varphi_1|^2 \varphi_1 = 0 \quad (31)$$

を得る。ここで、  $O(\partial/\partial x) = O(\partial^2/\partial t^2)$  として  $x$  についての高階微分の項を無視した。また、  $k_c/V \sim V^{-2}$  の項は1にくらべて省略している。

(31)式は線形化して、平面波解を求めると、

$$\varphi_1 = A_0 e^{iqx \pm \gamma t} \quad (32)$$

のタイプの不安定解が  $q < 0$  のときに存在し得る。このとき  $\gamma$  は(26)で

$$k_c - k = -q = |q|$$

としたものになっている。このことから、(31)は臨界点近傍の不安定モードの挙動を正しく把えていることがわかる。

(31)の解のうちで、振幅が小さいときに(32)につながるものを求めておこう。  $\varphi_1 = A(t) \exp(iqx)$  として(31)に代入すると、  $q < 0$  に対して

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \gamma^2 A - \frac{4x}{9} A^3 \tag{33}$$

を得る。この解は容易に求められて、

$$A = \frac{3}{\sqrt{2x}} \gamma \operatorname{sech}[\gamma(t-t_0)] \tag{34}$$

となる。ここで

$$\gamma t_0 = -\log(\sqrt{x} A_0 / 3\sqrt{2} \gamma) \tag{35}$$

とすれば、(34)は  $t_0 - t \gg 1$  で(32)の解につながる。したがって(34)は不安定モードの振幅を  $t$  の全域で与える大域解になっている。(34)で  $t \rightarrow \infty$  とすると  $A(t)$  は

$$A = \frac{18\gamma^2}{x A_0} e^{-\eta} \tag{36}$$

となり、指数関数的に減衰してゆく。これは第1図で得られた傾向に合致している。

第2図には、(16)~(18)の数値解と(34)とがくらべられている。初期値(27)の波数  $k$  をいろいろに変えて、異なる成長率に対して、不安定波の挙動に関する計算が行われた。どの解も第1図と同じふるまいを示した。振幅は、はじめのうちは指数関数的に増加するが、どこまでも成長するのではなく、途中で最大値に達し、再び減小しはじめて、最終的には指数関数的に消滅してしまう。(34)によれば、最大振幅は初期振幅  $A_0$  に無関係で  $\gamma$  だけで決って、

$$A_{max} = \frac{3}{\sqrt{2x}} \gamma = \sqrt{3} \alpha^{-\frac{1}{6}} \gamma \tag{37}$$

と表わされる。第2図はこの関係を調べている。 $\gamma$  の小さなおとこでは、(34)という近似理論と計算結果の一致は良好である。 $\gamma$  が大きいとおとこで考えた簡単化ではすまなくなる。不安定モードとラングミュア波のモードとの結合が無視できなくなる。

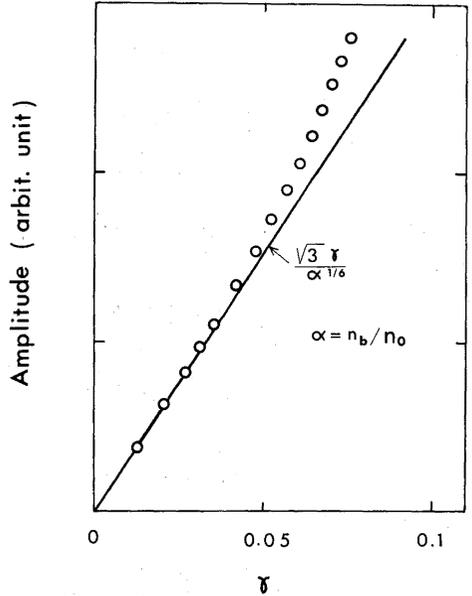
5. 不安定波とソリトン

(31)の解として(34)を求めたが、(31)には空間的にパルス構造を持った解も可能である。これは

$$\varphi_1 = \Phi e^{i(qx - \omega t)} \operatorname{sech}(Kx - \Omega t) \tag{38}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{3} \sqrt{2xKV} e^{-\theta}, \quad \Omega = \frac{1}{3} \sqrt{2xKV} e^{\theta} \\ \sinh 2\theta &= -q/K, \quad \Phi = 3\Omega/\sqrt{2x} \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

と与えられる。これは  $q < 0$ ,  $K \rightarrow 0$  の極限で(34)に一致する。

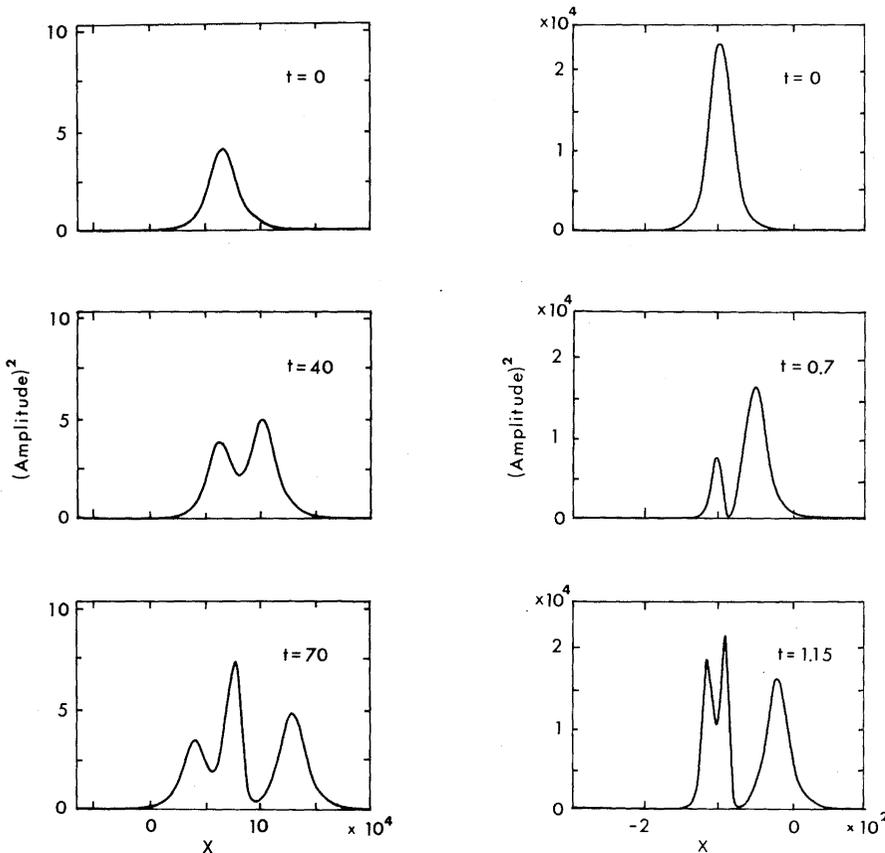


第2図 不安定波の成長率と到達最大振幅

このような空間構造を持ったパルス解が電子ビームを持ったプラズマのような不安定系で伝播可能であるというはおどろくべきことであるが、じっさいに(16)~(18)の方程式系でもそのようになっていくかを調べたものが第3図である。そこでは(38)の形のパルス解を初期値として(16)~(18)が数値的に解かれている。(38)は(16)~(18)の解そのものではないので、はじめのうちは時間の経過とともに変形するが、やがて新しいパルス波の分裂がみられる。この新しいパルス波は一定の振幅と速度で伝播してゆく。あとに残された波は、成長しながら、次のパルスをつくり出す。長時間の計算結果では、このようなことがくりかえされる。

前節の議論によれば、(31)式の解は不安定な平面波の挙動を良く近似した。それならば、なぜ(38)のソリトン解はそのまま(16)~(18)でも解としてふるまわないのであろうか。なぜ変形と分裂の過程を経た後でないと安定なパルスとして伝播し得ないのであろうか。じっさいに、最終的に得られるパルスは初期パルスとほぼ同じ振幅を持っている。このことは、系が不安定であることと深く関わっている。不安定であるゆえに、わずかな差は大きな変化をともなうのである。

じっさいに、不安定系ではわずかな差も大きな変動をともなうことを示しておこう。(38)で  $\phi$  だけ



第3図 不安定領域でのパルス波の発展 ((16)~(18)式の数値解)      第4図 不安定領域でのパルス波の発展 ((31)式の数値解)

を変えたものを初期値として(31)を解いた例が第4図に示されている。ここでは、見易くするために $\Phi$ を1.2倍にしたものを初期値としている。波形は第3図と似たような経過をたどって変形している。しかし、十分時間がたてば、(38)と全く同じパルスが発生している。このことは、パルス解は、それ自身としては安定であるが、小さなずれが不安定効果によって成長するために波形変動が著しくなることを意味している。たとえば(38)で $q>0$ とすると系は安定となるが、このときのパルス解はわずかな変化を与えても大きな変動をとまなわない。

## 6. おわりに

ここでは、電子ビームで励起された不安定波が非線形効果によってどのようにふるまうかが調べられた。その結果、多くの非線形波動現象と同じように、この場合にもソリトンのような構造を持った時空的パルスが重要な役割を果たしていることがわかった。このことは、不安定系でもソリトンの励起が非線形波動発展において基準モードとしての意味を持つことを示している。ただ、ここで得られたソリトンの励起は、電子ビームによって励起された不安定モードに対応するものであって、いわゆるZakharovの提唱したラングミュアソリトンそのものとは異なっている。したがって、ここで考察した過程とZakharovの過程とのちがいが、さらには3次元的なコラプスへの発展の可能性などは、今後くわしく調べる必要がある。

最後に、ここで採用した流体モデルの適用可能性について述べておこう。われわれが考えている系では、波の波数 $k$ は、

$$\omega_e \simeq ku_b$$

で決まる。すなわち、波の位相速度はビーム速度の程度になる。ビーム速度はプラズマ電子の熱速度にくらべて十分大きいとしているので、プラズマ電子の共鳴効果は無視してもよい。しかし、ビームは波の影響を強く受ける。したがって、振幅がある程度大きくなるとビームの運動を流体力学的にとりあつかうことは適当ではなくなる。ビームに対して流体近似が成立する条件は、

$$\frac{m}{2} \left( \frac{\omega}{k} - u_b \right)^2 \gg e\Phi$$

で与えられる。(ここで、 $\omega$ ,  $k$ ,  $\Phi$ は無次元量でないことに注意せよ)。 $\omega$ ,  $\Phi$ に(30)と(39)を考慮するとこの条件は

$$x^4 V/K \gg 1$$

と書くことができる。ビーム速度が十分大きく、波の変調の長さが十分大きければこの条件は満たされている。

## 参 考 文 献

- 1) V. E. Zakharov; Sov. Phys. JETP 35 (1972), 908-914.
- 2) P. Y. Cheung, A. Y. Wong, C. B. Darrow and S. J. Qian; Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1348-1351.  
A. Y. Wong and P. Y. Cheung; Proc. 1984 Int. Conf. Plasma Phys. (held at Lausanne, June 27-July 3, 1984) pp. 593-625.

(昭和61年5月31日 受理)