移動荷重を受けるはりの応答解析

橋本, 良夫
九州大学応用力学研究所 : 講師

https://doi.org/10.15017/4743755

出版情報：應用力學研究所所報. 63, pp.189-193, 1987-01. 九州大学応用力学研究所

移動荷重を受けるはりの応答解析*

橋　本　良　夫†

概　　要

移動荷重を受けるはりの動的応答を解析するための手法を提案するとともに，若干の計算例によってその有効性を検証した．

***Key words*:** moving load, dynamic response, beam, Laplace transform

1. はじめに

移動荷重を受けるはりの動的応答を解析する手法としてはモード法がよく用いられる[1)]．この方法は，通常の強制振動応答の解析と同様に，固有モードの重ね合わせとして応答を表すものであるから，まず最初にはりの固有値および固有モードを求める必要がある．

しかし，いろいろな境界条件のはりや連続はりなどの固有モードを解析的に求めることは一般に容易なことではない．このため，移動荷重問題の研究は，最も固有モードが求めやすい単純支持はりに関するものが多かった．

最近では，連続はりなどの固有値および固有モードを求める手法についてもいくつかの研究結果[2,3)]が発表されているが，これらの手法は計算の手続きが少々面倒なように思われる．

この報告は，任意の境界条件をもつはりに対して有効な解法を提案するとともに，若干の計算例を示したものである．なお，ここでは移動荷重は大きさ・速度ともに一定で，はりの断面も一様な場合を考えている．

2. 定式化

2.1. 基礎式の誘導

下の図に示すようなはりを考えると，はりの運動方程式はよく知られているように下式で与えられる．

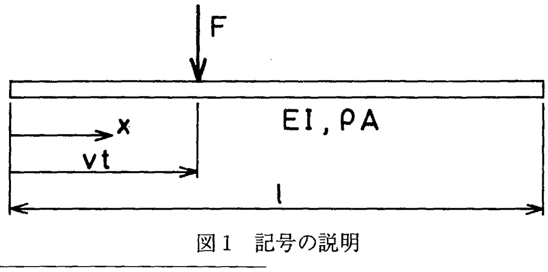

図１　記号の説明

* 日本機械学会九州支部第39期総会講演会にて発表．昭和61年３月18日
† 九州大学講師，応用力学研究所

$$EIw'''' + \rho A\ddot{w} + c\dot{w} - F\delta(x - vt) = 0 \tag{1}$$

ここで，EI，ρA，c，l，w は，それぞれ，はりの曲げ剛性，単位長さ当たりの質量，減衰係数，長さ，たわみであり，F，v は荷重の大きさ，移動速度，δ は Dirac のデルタ関数である．また，$'$ と ˙ は，それぞれ，座標 x につういの微分，時間 t についての微分を表している．

つぎに，式(1)を時間 t について Laplace 変換すると式(2)が得られる．

$$EI\tilde{w}'''' + (\rho As^2 + cs)\tilde{w} - \tilde{F}(x, s) = 0 \tag{2}$$

ここで，$\tilde{w}$ および $\tilde{F}$ は，それぞれ，

$$\tilde{w}(x, s) = \int_0^\infty w(x, t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\tilde{F}(x, s) = F\exp(-sx/v)/v + \rho A\{sw(x, 0) + \dot{w}(x, 0)\} + cw(x, 0)$$

で定義される関数である．また，s は Laplace 変換のパラメーターである．なお，以降の解析では簡単のため初期条件はすべて 0 として解析を行う．

このように Laplace 変換の結果，偏微分方程式(1)が常微分方程式(2)に変換されたのであるから，これを解くことは容易なことであろう．

しかし，式(2)を解くことは，境界条件が変るたびに解析的な計算をしなければならないので不便である．そこで，境界条件が変っても対応できるように，ここでは一次元の BEM 的な取扱を行うことにする．

そこでまず，式(2)に重み関数 G を乗じたのち区間 $[0,\ l]$ で x について積分を行う．部分積分の結果，式(3)が得られる．

$$EI[\tilde{w}'''G - \tilde{w}''G' + \tilde{w}'G'' - \tilde{w}G''']_0^l + \int_0^l\{EIG'''' + (\rho As^2 + cs)G\}\tilde{w}\,\mathrm{d}x - \int_0^l \tilde{F}(x, s)G\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

ここで，重み関数 G を基本解，つまり，式(4)を満足する関数にとれば，

$$EIG'''' + (\rho As^2 + cs)G = \delta(x - \xi) \tag{4}$$

式(3)は簡単化されて，結局，式(5)が得られ，また，これを ξ で微分して部分積分を行っていくと式(6)が得られる．

$$\int_0^l \tilde{w}\delta(x - \xi)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \tilde{F}(x, s)G\,\mathrm{d}x - EI[\tilde{w}'''G - \tilde{w}''G' + \tilde{w}'G'' - \tilde{w}G''']_0^l \tag{5}$$

$$\int_0^l \tilde{w}'\delta(x - \xi)\,\mathrm{d}x = -\int_0^l \tilde{F}(x, s)G'\mathrm{d}x + EI[\tilde{w}'''G' - \tilde{w}''G'' + \tilde{w}'G''']_0^l + (\rho As^2 + cs)[\tilde{w}G]_0^l \tag{6}$$

このようにして得られた式(5)，(6)が以降の数値計算の際の基礎式となる．

なお，基本解 G を具体的に示すと次のようになる．

$$G(x, \xi) = \{\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\alpha|x - \xi|) - \exp(-\alpha|x - \xi|)\}/(4\alpha^3 EI) \tag{7}$$

ここで，α は $\alpha^4 = -(\rho As^2 + cs)/EI$ の解で $\mathrm{Re}\alpha,\ \mathrm{Im}\alpha > 0$ となる値である．

2.2. 境界上での関係式

上記の式(5)，(6)を境界上 ($\xi = 0,\ l$) で考えると，それぞれ，下記の境界方程式(8)，(9)に帰着する．

$$0.5\tilde{w}(\xi) = \int_0^l \tilde{F}(x, s)G(x, \xi)\,\mathrm{d}x - EI[\tilde{w}'''G(x, \xi) - \tilde{w}''G'(x, \xi) + \tilde{w}'G'''(x, \xi) - \tilde{w}G'''(x, \xi)]_0^l \tag{8}$$

$$0.5\tilde{w}'(\xi) = -\int_0^l \tilde{F}(x, s)G'(x, \xi)\,\mathrm{d}x + EI[\tilde{w}'''G'(x, \xi) - \tilde{w}''G''(x, \xi) + \tilde{w}'G'''(x, \xi)]_0^l + (\rho As^2 + cs)[\tilde{w}G(x, \xi)]_0^l \quad (9)$$

この結果，一つのはりに対して4個の境界方程式が得られたのであるから，これに既知の境界条件を代入して未知境界値に対する連立一次方程式を解けば，すべての境界値が求まり，さらに，その境界値を式(5)，(6)に代入すると任意の位置での応答を求めることができる．また，上記の境界方程式は単一はりに関するものであったが，数個のはりについてそれぞれの境界方程式を求め，これを連続条件・釣り合い条件などを考慮して解けば，連続はりなども同様にして解析することができる．

3. 数値計算

いままでの議論はLaplace変換された式についてであったので，実際の時間応答を求めるためには逆Laplace変換が必要となってくる．しかし，一般に，解析的な逆変換は困難なので，ここでは数値逆Laplace変換を行うことにした．なお，本報告では数値逆Laplace変換には細野のFILT (Fast Inversion of Laplace Transform)[5] を採用した．

以下に若干の計算例を示す．

まず，厳密解との比較を行うために図2に示した単純支持はりの応答計算を行ってみた．表1がその計算結果であり，上段に今回提案した手法による解，下段に厳密解を示した．両者は，各時刻，各位置でよく一致しており，このことより今回の手法で十分精度の良い応答計算ができることが分かる．

つぎは，図3に示した一端単純支持・他端固定

表1　単純支持はりの応答計算結果の比較
($\times 10^{-1} m$)

t (sec) \ x (m)	0.25	0.5	0.75
0.25	0.0979	0.1141	0.0694
	0.0980	0.1141	0.0694
0.5	0.2080	0.3026	0.2113
	0.2080	0.3026	0.2113
0.75	0.0583	0.0940	0.0809
	0.0583	0.0940	0.0809
1.0	0.0199	0.0315	0.0240
	0.0200	0.0315	0.0241

上段…本手法
下段…厳密解[4]

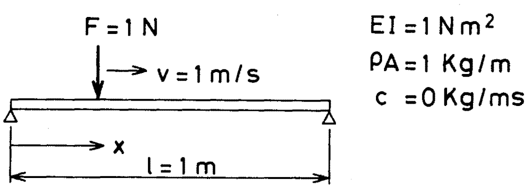

図2　移動荷重を受ける単純支持はり

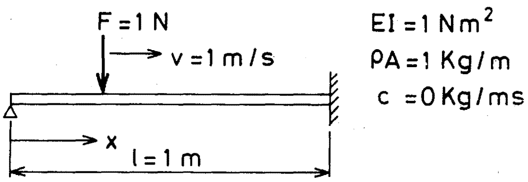

図3　移動荷重を受ける一端単純支持・他端固定はり

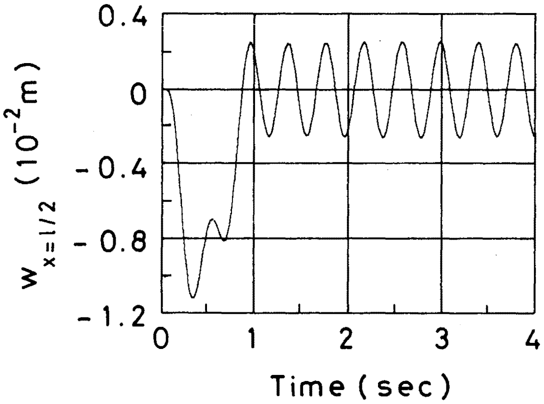

図4　一端単純支持・他端固定はりの応答計算結果（はりの中央点）

はりの応答計算例であり，図4にはりの中央点の時間応答を示した．この例では荷重は1秒ではり上を通過してしまうから，図4は荷重通過中から荷重通過後の自由振動状態までを示していることになる．なお，ここでは，図4の結果を得るために特に荷重通過中と通過後を区別して解析することは行っていない．このことは，今回の手法が荷重通過後の応答を解析するのにも有効であることを示している．これは，式(5)，(6)，(8)および(9)が荷重通過中および通過後の両方の情報を含んでいるから当然のことである．

以上の例は単一はりの場合のみであったので，最後に，図5の3スパン連続はりの応答計算例を示す．この例は参考文献2から引用したものであり，荷重の移動速度を推定した以外はまったく同じ数値を用いている．このような連続はりの計算も単一はりの場合と同様に，各スパンを一つのはりと考えて各はりに対して4個の境界方程式を導き，各はりが接する点での連続条件・釣り合い条件および連続はり両端の支持点での境界条件を考慮して境界方程式を解けばよい．ただし，この場合，荷重に関して若干の注意が必要である．というのは，上記のようにして単に12個の境界方程式を求めただけでは，各スパンのはりに作用する3個の荷重が時刻0に同時に移動を開始することになり，単一の荷重が移動するという状況をシミュレートできなくなるからである．したがって，これを避けるためには，第2および第3スパンの境界方程式において荷重に時間遅れを与える必要がある．つまり，最初の荷重が第1スパンを通過してしまって消滅すると同時に，第2スパンの左端に第2の荷重が出現して移動を開始するような処置をしなければならない．しかし，今回の手法では，Laplace変換を用いているため，時間遅れは移動定理を用いることにより簡単に導入できるのでなんら困難はない．

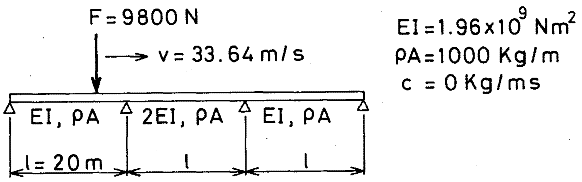

図5　移動荷重を受ける3スパン連続はり

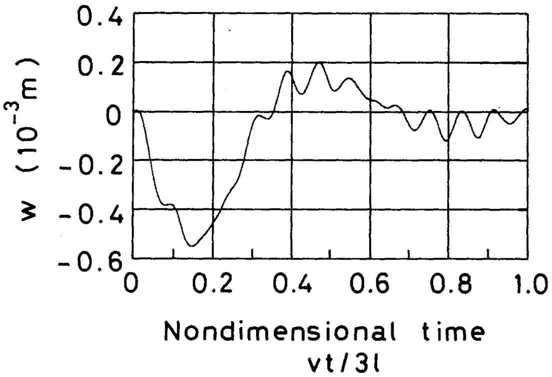

図6　3スパン連続はりの応答計算結果（第1スパン中央点）

このようにして計算した第1スパン中央点の応答を図6に示す．この結果は参考文献2の結果とおおむね一致しており，このことにより今回の手法が連続はりに対しても有効であることが確認された．

4. おわりに

計算例に示したように，この手法は厳密解とよく一致し，また，単一はりだけでなく連続はりに対しても有効であった．この手法では，荷重通過中および通過後の自由振動状態もまったく同じ式で表現されており，両者を区別して解析する必要はない．今回示した計算例は単一荷重の場合のみであったが，Laplace 変換の移動定理を用いれば，いくつかの荷重がある間隔を置いて通過するような荷重列の問題もほとんど同様にして解析できる．

謝　辞

本研究を行うにあたって，貴重な助言をくださった川建教授（九大応力研），角教授（九大工学部）にあつく感謝いたします．

参 考 文 献

1) Fryba, L.: *Vibration of solids and structures under moving loads,* (Noordhoff International Publishing, Groningen, 1971).
2) Hayasikawa, T. and Watanabe, N.: *Dynamic behavier of continuous beams with moving loads,* ASCE, EM1, Feb. 1981.
3) 小堀為雄，久保雅邦：弾性節点・弾性支点を有する連続桁橋の汎用的な動的解析法，土木学会論文集，第356号，1985年．
4) Wu, J. J.: *Vibration of a beam under moving loads by a finite element formulation consistent in time and spatial coordinates,* Shock and Vibration Bul., **51,** May 1981.
5) 細野敏夫：BASIC による高速ラプラス変換，（共立出版，東京，1984）．

（昭和61年5月31日　受理）