

Benjamin-Onoソリトンの弱い相互作用について

及川, 正行
九州大学応用力学研究所 : 助教授

<https://doi.org/10.15017/4743733>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 60, pp.467-472, 1984-09. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



寄 書

Benjamin-Ono ソリトンの弱い相互作用について

及 川 正 行*

概 要

2層流体系をモデルとして, Benjamin-Ono ソリトンの弱い相互作用を調べる. 2つのソリトンの相互作用による位相のずれはソリトンの振幅によらず一定である事を示す.

Key words: Nonlinear interaction, Benjamin-Ono soliton, Phase shift

図1のような2層流体系における界面波を考える. 流体は非粘性, 非圧縮, 運動は渦無しと仮定すると次式が成り立つ.

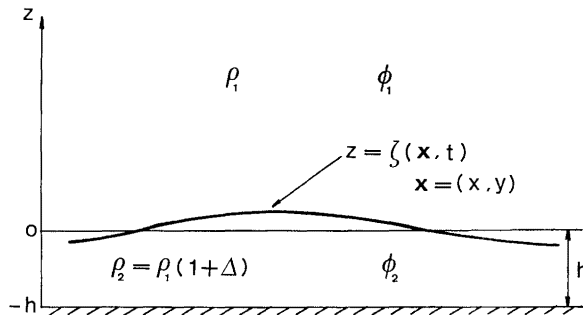


図 1. 2層流体系. ρ_1, ρ_2 はそれぞれ上層, 下層の流体の密度で, $\Delta > 0$ である. ϕ_1, ϕ_2 は速度ポテンシャルである.

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad z > \zeta \quad (1a)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = 0, \quad -h < z < \zeta \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_2 \zeta \cdot \nabla_2 \phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, \quad z = \zeta \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_2 \zeta \cdot \nabla_2 \phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad z = \zeta \quad (1d)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 + g\zeta = (1+\Delta) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 + g\zeta \right), \quad z = \zeta \quad (1e)$$

* 九州大学助教授, 応用力学研究所

$$\nabla \phi_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty \quad (1f)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (1g)$$

ただし, $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である.

これらを線形化すると分散関係

$$\omega^2 = \frac{dg|k|}{1+(1+d)\coth(|k|h)} \quad (2)$$

を得る. k は波数, ω は円振動数である. $|k|h \ll 1$ のとき, すなわち, 十分長波長の波に対して, (2) は

$$\omega^2 = V^2 |k|^2 \left(1 - \frac{|k|h}{1+d} + \dots \right) \quad (3)$$

となる. $V \equiv (dgh/(1+d))^{1/2}$ は長波の位相スピードである. また, このとき

$$\phi_1 \sim V\zeta, \quad \phi_2 \sim V\zeta L/h \quad (4)$$

である事がわかる. ただし, L は波の代表波長である. ϕ_1 の鉛直方向の変化のスケールは L , ϕ_2 の鉛直方向の変化のスケールは h と考えられるので, (4) を考慮して, 次のように無次元する:

$$\begin{aligned} \zeta &\rightarrow a\zeta^*, \quad \mathbf{x} = (x, y) \rightarrow L\mathbf{x}^* = (Lx^*, Ly^*), \quad z \rightarrow hz^*, \\ t &\rightarrow (L/V)t^*, \quad \phi_1 \rightarrow aV\phi_1^*, \quad \phi_2 \rightarrow (aVL/h)\phi_2^*, \end{aligned}$$

ここで, a は波の代表振幅である. さらに, ϕ_1^* は x^*, y^*, Z^*, t^* の函数, ϕ_2^* は x^*, y^*, z^*, t^* の函数と考える. ただし, $Z^* = \delta z^*$, ($\delta \equiv h/L \ll 1$) である.

パラメータ $\varepsilon \equiv a/h$ を導入し, $\varepsilon \sim \delta \ll 1$ の場合を考える. 以下では無次元化量の * 印を省略する.

下層については $z+1$ の中で展開し, 底での境界条件を考慮すると,

$$\phi_2 = f(\mathbf{x}, t) - \frac{\delta^2}{2} (d_2 f)(\mathbf{z}+1)^2 + \dots \quad (5)$$

と解ける. $f(\mathbf{x}, t)$ は底での速度ポテンシャルの値, d_2 は2次元のラプラシアンである. ε あるいは δ の1次の項まで考慮すると, 残りの方程式及び境界条件は

$$\nabla^2 \phi_1 + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial Z^2} = 0, \quad Z > 0 \quad (1a')$$

$$\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial Z} \right]_{Z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (1c')$$

$$\left(\nabla^2 \phi_1, \frac{\partial \phi_1}{\partial Z} \right) \rightarrow 0, \quad Z \rightarrow +\infty \quad (1f')$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \varepsilon \nabla^2 \zeta \cdot \nabla^2 f = -(d_2 f)(1 + \varepsilon \zeta) \quad (1d')$$

$$\delta \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right]_{z=0} = (1+D) \left[-\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla_2 f)^2 + \zeta \right] \quad (1e')$$

となる.

(1a') を (1c'), (1f') の条件のもとに解き, (1e') に代入すると,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + D_2 f + \varepsilon \nabla_2 \cdot (\zeta \nabla_2 f) = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla_2 f)^2 + \frac{\delta}{2\pi(1+D)} \int \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} (\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' = 0 \quad (6b)$$

あるいは

$$\zeta = -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla_2 f)^2 + \frac{\delta}{2\pi(1+D)} \int \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} (\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - D_2 f + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_2 f)^2 + \varepsilon \nabla_2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} \nabla_2 f \right) \\ - \frac{\delta}{2\pi(1+D)} \int \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} (\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

を得る.

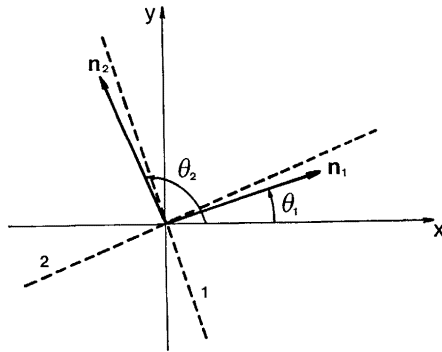


図 2. 2つの波の伝播方向. 破線は波の波面である (相互作用を無視した場合).

$\mathbf{n}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ ($i = 1, 2$) の2方向に伝播する2つの波の相互作用を調べるため, 次の座標を導入する.

$$\xi_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x} - t + \varepsilon \psi_i(\mathbf{x}, t) \quad (i = 1, 2)$$

$$\tau = \varepsilon t$$

ここで, 波の相互作用による位相のずれを考慮して位相変数 $\psi_i(\mathbf{x}, t)$ を導入した¹⁾. さらに ζ, f を

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \dots, \quad f = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots$$

と展開する.

$O(\varepsilon^0)$ では

$$\zeta_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f_0}{\partial \xi_2}, \quad 2(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0$$

を得る. $1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \neq 0$ なら

$$f_0 = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau), \quad \text{従って, } \zeta_0 = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} \quad (8)$$

と書ける.

$O(\varepsilon)$ の式から, 永年項を生じないための条件として, $F_i(\xi_i, \tau)$ を支配する方程式

$$\frac{\partial F_i}{\partial \tau} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + qH \left[\frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi_i^2} \right] = 0 \quad (i=1, 2) \quad (9)$$

を得る. ただし, $q = (\partial/\varepsilon)/2(1+d)$ であり, $H[f(\xi)] \equiv \pi^{-1}P \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi')/(\xi' - \xi)) d\xi'$ ($P \int$ は主値積分を示す.) は Hilbert 変換である. (9) を ξ_i で微分すると, Benjamin-Ono 方程式²⁾

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + \frac{3}{2} u_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} + qH \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_i^2} \right] = 0, \quad u_i = \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \quad (10)$$

が得られる. さらに

$$\psi_1 = \beta F_2, \quad \psi_2 = \beta F_1, \quad \beta = \frac{1 + 2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)} \quad (11)$$

と選べば, f_1 に対する方程式は f_0 に対する方程式と同じになるので,

$$f_1 = G_1(\xi_1, \tau) + G_2(\xi_2, \tau) \quad (12)$$

となる. $G_i (i=1, 2)$ は次のオーダーで決まる.

結局, $O(\varepsilon)$ までは

$$f = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau) + \varepsilon [G_1(\xi_1, \tau) + G_2(\xi_2, \tau)] \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} + \varepsilon \left[\left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} \right)^2 - qH \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_1^2} \right] + \frac{\partial G_1}{\partial \xi_1} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} \right)^2 - qH \left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi_2^2} \right] + \frac{\partial G_2}{\partial \xi_2} \right\} + r \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} \right] \end{aligned} \quad (13b)$$

となる. ただし, $r = \{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2\}/(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)$.

上の近似は $1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2 \sin^2 \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) \gg \varepsilon$ のときのみ成立する事に注意する³⁾. また, β, r は浅水波の場合と同じ値である³⁾. さらに, 2つの波の相互作用の結果として生ずるのは ψ_1, ψ_2 と (13b) の最後の項だけである事に注意しよう.

良く知られているように, (9), (10) は次のソリトン解をもつ²⁾:

$$F_i = a_i \delta_i \tan^{-1} \frac{1}{\delta_i} (\xi_i - \lambda_i \tau) = \frac{8}{3} q \tan^{-1} \frac{1}{\delta_i} (\xi_i - \lambda_i \tau)$$

$$u_i = \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} = \frac{a_i \delta_i^2}{(\xi_i - \lambda_i \tau)^2 + \delta_i^2} \quad (\delta_i > 0)$$

$$a_i = \frac{8q}{3\delta_i}, \quad \lambda_i = \frac{q}{\delta_i}.$$

これらの正面衝突を考えると, $n_1 \cdot n_2 = -1$ であるから, $\beta = -1/4$ となる. 従って,

$$\psi_1 = -\frac{2}{3} q \tan^{-1} \frac{1}{\delta_2} (\xi_2 - \lambda_2 \tau), \quad \psi_2 = -\frac{2}{3} q \tan^{-1} \frac{1}{\delta_1} (\xi_1 - \lambda_1 \tau)$$

となる. この事から, 右に伝播するソリトンは衝突後左へ, 左に伝播するソリトンは衝突後右へ, 相手のソリトンが存在しない場合に較べて, 最初の次元をもつ量で書くと, $L\varepsilon(2/3)\pi q = \pi h/3(1+4)$ だけずらされる事がわかる. この値はソリトンの振幅に無関係であり, KdV ソリトンにおいては相手のソリトンの振幅の平方根に比例する¹⁾ 事と対照的である.

2つのソリトンの2次元的な相互作用の場合には, 適当な座標系でみれば波のパターンは定常となる³⁾. $|\theta_2 - \theta_1| = 2\pi/3$ のとき, $\beta = 0$ であり, 2つのソリトンの位相は相互作用によって影響うけず, 波の峰は曲らない. $|\theta_2 - \theta_1| \geq 2\pi/3$ のとき, $\beta \leq 0$ であるから, 一方のソリトンは他方のソリトンの存在によって位相の変化をうけ, 峰が曲げられる. β の正負に応じて位相の変化の符号が逆転し, 従って, 峰の曲がり方も逆転する. この事は β が浅水波の場合と同じであるから, 浅水波の場合の KdV ソリトンの場合も全く同様である. 波の峰の交点の左右遠方での位相のずれが $|\theta_2 - \theta_1|$ にのみ依存し, ソリトンの振幅によらないという点で浅水波 KdV ソリトンの場合と異っている.

$|\theta_2 - \theta_1| \leq \varepsilon^{1/2}$ のときに Benjamin-Ono ソリトンの相互作用がどのようなになるかは大変興味があり, それは KP 方程式⁴⁾ に対応する方程式

$$2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial \xi^2} + 2q \frac{\partial}{\partial \xi} H \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \right] = 0$$

$$\xi = x - t, \quad \eta = \varepsilon^{1/2} y$$

によって近似的に記述される事は容易にわかるが, この方程式を解析的に解く事は非常にむずかしいようである.

謝 辞

岡部先生には公私にわたり一方ならずお世話になりました. ここで深く感謝致しますと同時に末永く御健康で御活躍されます事をお祈り致します.

参 考 文 献

- 1) Oikawa, M. and Yajima, N.: *Interactions of solitary waves—A perturbation approach to nonlinear systems—*, J. Phys. Soc. Japan **34** (1973) 1093.
- 2) Benjamin, T. B.: *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. **29** (1967) 559. Ono, H.: *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, J. Phys. Soc. Japan

- 39 (1975) 1082. Matsuno, Y.: *Interaction of the Benjamin-Ono solitons*, J. Phys. A: Math. Gen. **13** (1980) 1519.
- 3) Miles, J. W.: *Obliquely interacting solitary waves*, J. Fluid Mech. **79** (1977) 157.
- 4) Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I.: *On the stability of solitary waves in weakly dispersing media*, Soviet Physics—Doklady **15** (1970) 539. Satsuma, J.: *N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Japan **40** (1976) 286.
- Miles, J. W.: *Resonantly interacting solitary waves*, J. Fluid Mech. **79** (1977) 171.

(昭和 59 年 5 月 28 日 受理)