

## 海洋混合層からの慣性重力波の反射

蒲地, 政文  
九州大学大学院工学研究科水工土木学専攻 : 博士後期課程

<https://doi.org/10.15017/4743707>

---

出版情報 : 應用力學研究所所報. 59, pp.1-22, 1983-09. 九州大学応用力学研究所  
バージョン :  
権利関係 :



# 海洋混合層からの慣性重力波の反射

蒲 地 政 文\*

## 概 要

海洋混合層からの慣性重力波の反射特性が調べられている。反射係数を調べることにより、通常の反射の他に、過剰反射、波の発生、および波の吸収についての条件が求められている。発生する波の角振動数は慣性振動数に近く、波長は混合層の厚さよりも長い。混合層と成層海洋との界面での密度差があるときには、密度差のないときに発生する波に比べて、角振動数は高くなり、波長は長くなる。混合層内の全エネルギー方程式を考察することにより、主流および波によって誘起された平均流と全エネルギーフラックスとの間に関係が付き、過剰反射に対する判別式が得られた。鉛直方向の全エネルギーフラックスにより、過剰反射がおこるか否かが判別できる。

**Key words:** Over-reflection, Ocean mixed layer, Inertia gravity wave,  
Wave-mean flow interaction

## 1. 緒 言

角振動数が慣性振動数に近い慣性重力波が、海洋上層から深層へエネルギーを伝播することが、しばしば観測されている<sup>1)~3)</sup>。Pollard<sup>4)</sup>、Pollard and Milland<sup>5)</sup> は、風の応力を混合層内で働く体積力として運動方程式中に導入し、風の応力の非定常性が慣性振動に近い波動を誘起することを示した。また、これらの研究では、発生する波の水平スケールは、風の応力の水平スケールで決まることが示されている。

一方、Stern<sup>6)</sup> は、観測される慣性重力波の水平スケールは、風による強制力の代表的な水平スケールよりも小さいことを指摘している。このような観測結果を説明するため、Stern<sup>6)</sup> は、風の応力が水平方向に一樣、時間的に定常であるとし、風の応力によって混合層内に誘起された乱流を体積力として導入し、それが主流を維持するモデルを提出している。そして、慣性重力波が、主流の存在する混合層に入射してきた場合、角振動数と波数のある条件のもとで、過剰反射がおこることを示している。しかし、Stern<sup>6)</sup> の理論は、波と主流が直交し、しかも波が風上側に伝わる場合に限定されており、エネルギーの厳密な議論もなされていない。

Kamachi and Grimshaw<sup>7)</sup> は、Stern<sup>6)</sup> と同様な問題をラグランジュ的に取り扱っている。ラグランジュ的な方程式と境界条件から、反射係数に関する判別式を求めている。また、波の作用方程式を

\* 九州大学大学院工学研究科博士後期課程水工土木学専攻（金子新紹介）

調べることによって、混合層内の乱流が鉛直下向きの波の作用フラックスを誘起するとき、過剰反射がおこることを示している。

本論文では、オイラー的な観点の下で、海洋混合層からの慣性重力波の反射の問題を、反射係数、運動量、およびエネルギーを用いて調べる。そして、混合層内での波と主流の相互作用の機構に注目しながら、反射特性を明らかにすることを目的としている。まず、第2節では、微小振幅波の仮定を用いて、平均場と波動場に関する運動量、波のエネルギー、および全エネルギーを支配する方程式を導き、それらの一般的な特性を考察する。第3節では、波に関する運動方程式と平面波解を用いて、反射係数に関する判別式を求める。そして、主流の3つの代表的な流速分布に対して、反射係数を考察する。また、慣性重力波の伝播特性、混合層と下層海洋との界面での密度差の反射係数におよぼす影響、界面変位の特性についても調べる。第4節では、第2節で求めた平均流、波のエネルギー、および全エネルギーを支配する方程式を、平面波解を用いて単純化し、慣性重力波が発生するときのこれらの特理量の特性を調べる。特に、全エネルギー方程式は、全エネルギーフラックスの発散と平均流との関係を表わし、その式から過剰反射に対する1つの判別式が求まる。最後に、第5節に結論をまとめてある。

## 2. 基礎方程式

回転角速度  $f/2$  ( $f$  はコリオリパラメーター) で回転している、厚さ  $H$  で一様な密度  $\rho_0$  (すなわち  $N^2=0$ ,  $N$  はブルントヴァイサラ振動数) の混合層 (上層) と、その下の密度  $\rho^{(2)}$  の成層海洋 (下層) を考える。座標系は図1に示すように設定する。上層  $0 \leq z \leq H$  では、主流  $u_0(z)$  は、 $x, y$  方向にそれぞれ  $u_0^{(1)}(z)$ ,  $v_0^{(1)}(z)$  という成分をもち、下層では主流は存在しないとする。海洋表面に作用する

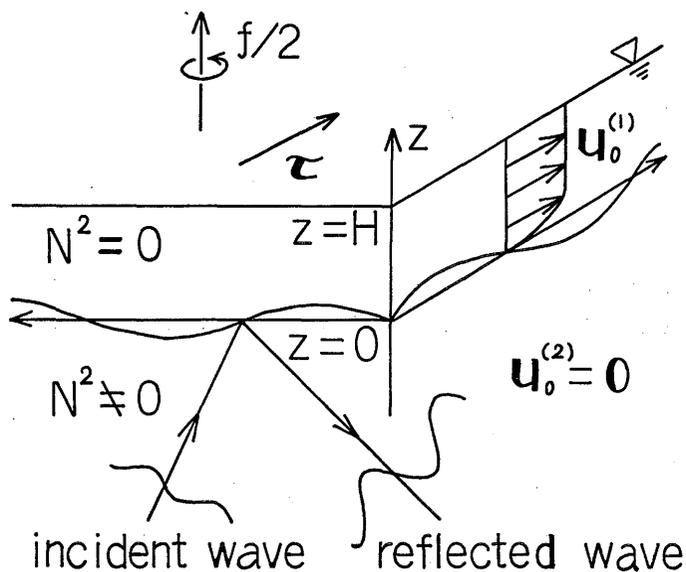


図1 座標系の設定

定常な風の応力を  $\tau = (\tau_x, \tau_y)$  とする。風によって上層に誘起された乱流の効果をも、Stern<sup>6)</sup> や Kamachi and Grimshaw<sup>7)</sup> と同様に、体積力  $dF^{(1)}/dz = (dF^{(1)}/dz, dG^{(1)}/dz, 0)$  として、基礎方程式中に導入する。上層で静水圧近似を、下層でブジネスク近似を用いると、運動方程式、浮力に関する式、連続の式は次式ようになる。

$$-\frac{\partial u^{(j)}}{\partial t} + u^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + v^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + w^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z} - f v^{(j)} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{(j)}}{\partial x} + \frac{dF^{(j)}}{dz}, \quad (2.1)$$

$$-\frac{\partial v^{(j)}}{\partial t} + u^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} + v^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} + w^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z} + f u^{(j)} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{(j)}}{\partial y} + \frac{dG^{(j)}}{dz}, \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial w^{(j)}}{\partial t} + u^{(j)} \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x} + v^{(j)} \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} + w^{(j)} \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} = \theta^{(j)} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{(j)}}{\partial z}, \quad (2.3)$$

$$-\frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} + u^{(2)} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} + v^{(2)} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial y} + w^{(2)} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

ここで、上付き添字  $j (= 1, 2)$  において、 $j = 1$  は上層中の、 $j = 2$  は下層中の物理量を表わし、 $\mathbf{u}^{(j)} = (u^{(j)}, v^{(j)}, w^{(j)})$  は  $(x, y, z)$  方向の流速、 $p^{(j)}$  は圧力である。上層では、静水圧近似を用いているため、式 (2.3) では、 $w^{(1)} = 0$  である。式 (2.3), (2.4) で、 $\theta^{(1)} = -g$ 、 $\theta^{(2)} = -\rho^{(2)}(\mathbf{x}, t) g / \rho_0$  ( $g$  は重力加速度) は、それぞれ上層と下層の浮力を表わす。

各物理量  $\mathbf{u}^{(j)}$ ,  $p^{(j)}$ ,  $\theta^{(j)}$  を以下のように、慣性重力波の振幅  $a$  で摂動展開する。

$$(\dots)^{(j)} = (\dots)_0^{(j)} + (\dots)_1^{(j)} + (\dots)_2^{(j)} + O(a^3). \quad (2.6)$$

ここに、下付き添字  $0, 1, 2$  はそれぞれ波の振幅の  $0, 1, 2$  次のオーダーを示す。波の振幅の  $0$  次のオーダーでは、主流は、乱流による体積力と以下のような関係にある。

$$-\rho_0 f v_0^{(1)} = \frac{dF^{(1)}}{dz}, \quad (2.7)$$

$$\rho_0 f u_0^{(1)} = \frac{dG^{(1)}}{dz}, \quad (2.8)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial z}, \quad (2.9)$$

ここで、海洋表面  $z = H$  で  $F^{(1)}$  は風の応力  $\tau$  に一致し、界面  $z = 0$  と下層では零である。式 (2.7), (2.8) と上述の  $F^{(j)}$  の境界条件から、エクマン輸送の関係、

$$\frac{\tau}{\rho_0} = \int_0^H f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_0^{(1)} dz, \quad (2.10)$$

が得られる。ここで  $\mathbf{k}$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。

次に、波の振幅の  $1$  次のオーダーの量を支配する式は、以下のように求まる。

$$-\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial t} + u_0^{(j)} \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} + v_0^{(j)} \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y} + w_0^{(j)} \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z} - f v_1^{(j)} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} + u_0^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x} + v_0^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial y} + w_1^{(1)} \frac{dv_0^{(1)}}{dz} + f u_1^{(1)} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial t} = \theta_1^{(1)} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial z}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \theta_1^{(2)}}{\partial t} + N^2 w_1^{(2)} = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad (2.15)$$

ここで、式(2.13)の中で  $w_1^{(1)} = \theta_1^{(1)} = 0$  であり、式(2.14)の中で  $N^2 = d\theta_0^{(2)}/dz = -(g/\rho_0)d\rho_0^{(2)}/dz$  である。式(2.11)、(2.12)の左辺は、波の流速の局所的時間変化、移流、コリオリ力の各項を表わし、右辺は圧力勾配を表わす。式(2.13)は、波の局所的時間変化と浮力および圧力勾配とがつりあっていることを示している。式(2.14)は、浮力の時間変化は、鉛直方向の移流で維持されていることを表わしている。

次に、波の振幅の2次のオーダーの平均流方程式は、次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_2^{(1)}}}{\partial t} + u_0^{(1)} \frac{\partial \overline{u_2^{(1)}}}{\partial x} + v_0^{(1)} \frac{\partial \overline{u_2^{(1)}}}{\partial y} + \overline{w_2^{(1)}} \frac{d\overline{u_0^{(1)}}}{dz} - \overline{f v_2^{(1)}} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p_2^{(1)}}}{\partial x} \\ = \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{u_1^{(1)} u_1^{(1)}}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u_1^{(1)} v_1^{(1)}}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{u_1^{(1)} w_1^{(1)}}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v_2^{(1)}}}{\partial t} + u_0^{(1)} \frac{\partial \overline{v_2^{(1)}}}{\partial x} + v_0^{(1)} \frac{\partial \overline{v_2^{(1)}}}{\partial y} + \overline{w_2^{(1)}} \frac{d\overline{v_0^{(1)}}}{dz} + \overline{f u_2^{(1)}} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p_2^{(1)}}}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{v_1^{(1)} u_1^{(1)}}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{v_1^{(1)} v_1^{(1)}}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{v_1^{(1)} w_1^{(1)}}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \overline{w_2^{(1)}}}{\partial t} - \overline{\theta_2^{(1)}} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p_2^{(1)}}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{w_1^{(1)} u_1^{(1)}}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{w_1^{(1)} v_1^{(1)}}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{w_1^{(1)} w_1^{(1)}}), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \overline{\theta_2^{(2)}}}{\partial t} + N^2 \overline{w_2^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{\theta_1^{(2)} u_1^{(2)}}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\theta_1^{(2)} v_1^{(2)}}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\theta_1^{(2)} w_1^{(2)}}), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \overline{u_2^{(2)}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_2^{(2)}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w_2^{(2)}}}{\partial z} = 0, \quad (2.20)$$

ここで、 $\overline{(\dots)}$  は平均量を表わし、平均操作は空間、時間、波の位相のいずれに関してなされてもよい。式(2.16)、(2.17)の右辺は、2次の平均流を駆動するレイノルズ応力の発散項である。上層では、静水圧近似を用いているため、式(2.18)の中で  $\overline{w_2^{(1)}} = \overline{\theta_2^{(1)}} = 0$  である。式(2.18)は、平均流の局所的時間変化、浮力の効果、圧力勾配、とレイノルズ応力の発散とがつりあっていることを示している。式(2.19)の左辺は、平均浮力の局所的時間変化と移流の効果を表わし、右辺は、二次の浮力変化を起こす浮力フラックスの発散項である。

次に、波のエネルギー方程式を導く。波の振幅の1次のオーダーの運動方程式(2.11)~(2.12)に  $u_1^{(1)}$  を、浮力方程式(2.14)に  $\theta_1^{(2)}/N^2$  を乗じて、それらの和をとり、平均操作をほどこすと、波の振幅の2次のオーダーの、波のエネルギー方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{(j)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0^{(j)} e^{(j)} + \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(j)} u_1^{(j)}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_0^{(j)} e^{(j)} + \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(j)} v_1^{(j)}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(j)} w_1^{(j)}} \right) \\ = - \overline{u_1^{(j)} w_1^{(j)}} \frac{du_0^{(j)}}{dz} - \overline{v_1^{(j)} w_1^{(j)}} \frac{dv_0^{(j)}}{dz}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

ここで、波のエネルギー密度  $e^{(j)}$  は、 $j=1, 2$  に対してそれぞれ次式で定義される。

$$e^{(1)} = \frac{1}{2} [\overline{(u_1^{(1)})^2} + \overline{(v_1^{(1)})^2}], \quad (2.22)$$

$$e^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \overline{(u_1^{(2)})^2} + \overline{(v_1^{(2)})^2} + \overline{(w_1^{(2)})^2} + \frac{1}{N^2} \overline{(\theta_1^{(2)})^2} \right]. \quad (2.23)$$

式 (2.21) の左辺は、波のエネルギー密度の局所的な時間変化、波のエネルギー密度の移流と波のエネルギーフラックスとの発散を表す。右辺は、主流のシアによる波のエネルギー生成を表す。

主流がある場合での、波の、エネルギーフラックスへの寄与に議論があるため<sup>8)-12)</sup>、次に、波と平均場を分離しない全エネルギー方程式についても定式化を行なう。式 (2.1)~(2.3) に  $u^{(j)}$ 、(2.4) に  $\theta^{(2)}/N^2$  を掛けて、和をとり、平均し、その後式 (2.6) を用いて展開すれば、全エネルギー方程式は次のように得られる。まず、上層で、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{E_2^{(1)}} + \overline{w_2^{(1)}} \frac{d}{dz} \overline{E_0^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0^{(1)} \overline{E_2^{(1)}} + u_0^{(1)} \overline{u_1^{(1)} u_1^{(1)}} + v_0^{(1)} \overline{u_1^{(1)} v_1^{(1)}} + \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(1)} u_1^{(1)}} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_0^{(1)} \overline{E_2^{(1)}} + u_0^{(1)} \overline{v_1^{(1)} u_1^{(1)}} + v_0^{(1)} \overline{v_1^{(1)} v_1^{(1)}} + \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(1)} v_1^{(1)}} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( u_0^{(1)} \overline{w_1^{(1)} u_1^{(1)}} + v_0^{(1)} \overline{w_1^{(1)} v_1^{(1)}} + \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(1)} w_1^{(1)}} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{p_0^{(1)} u_2^{(1)}} + \overline{p_2^{(1)} u_0^{(1)}}) \\ + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{p_0^{(1)} v_2^{(1)}} + \overline{p_2^{(1)} v_0^{(1)}}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{p_0^{(1)} w_2^{(1)}}) \\ = \overline{u_2^{(1)}} \frac{dF^{(1)}}{dz} + \overline{v_2^{(1)}} \frac{dG^{(1)}}{dz} - \overline{g w_2^{(1)}} + u_0^{(1)} \frac{dF^{(1)}}{dz} + v_0^{(1)} \frac{dG^{(1)}}{dz}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる。ここで、 $E_0^{(1)}$  と  $\overline{E_2^{(1)}}$  はそれぞれ 0 次と 2 次の全エネルギー密度で、次のように定義される。

$$E_0^{(1)} = \frac{1}{2} [(u_0^{(1)})^2 + (v_0^{(1)})^2], \quad (2.25)$$

$$E_2^{(1)} = \frac{1}{2} [\overline{(u_1^{(1)})^2} + \overline{(v_1^{(1)})^2}] + u_0^{(1)} \overline{u_2^{(1)}} + v_0^{(1)} \overline{v_2^{(1)}}. \quad (2.26)$$

また、下層では、全エネルギー方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{E_2^{(2)}} + \overline{w_2^{(2)}} \left( -\theta_0^{(2)} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p_0^{(2)} \right) + \frac{\theta_0^{(2)}}{N^2} \frac{\partial \overline{\theta_2^{(2)}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(2)} u_1^{(2)}} + \frac{\theta_0^{(2)}}{N^2} \overline{\theta_1^{(2)} u_1^{(2)}} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(2)} v_1^{(2)}} + \frac{\theta_0^{(2)}}{N^2} \overline{\theta_1^{(2)} v_1^{(2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(2)} w_1^{(2)}} + \frac{\theta_0^{(2)}}{N^2} \overline{\theta_1^{(2)} w_1^{(2)}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

と求まる。ここで、全エネルギー密度は、

$$\overline{E_2^{(2)}} = \frac{1}{2} \left[ \overline{(u_1^{(2)})^2} + \overline{(v_1^{(2)})^2} + \overline{(w_1^{(2)})^2} + \frac{1}{N^2} \overline{(\theta_1^{(2)})^2} \right] + \frac{\theta_0^{(2)}}{N^2} \overline{\theta_2^{(2)}}, \quad (2.28)$$

である。式 (2.24) の左辺は、全エネルギー密度の局所的時間変化と全エネルギーフラックスの発散とを表わしている。全エネルギーフラックスは、全エネルギー密度の移流の効果、平均流によるレイノルズ応力の輸送、波のエネルギーフラックスから成り立っている。式 (2.24) の右辺は、重力と体積力による強制項を表わしている。式 (2.27) も (2.24) と同様の物理的意味をもっているが、主流に依存する項と外力による強制項が消失し、かわりに、浮力による項があらわれている。

全エネルギーを波のエネルギーと関係づけるため、式 (2.24), (2.27) を変形すれば、次のことがわかる。主流がある系でたてられた全エネルギー方程式は、ガリレイ変換に対して不変な部分 (波のエネルギー方程式) と可変な部分 (平均場の運動量方程式) から成り立っていることがわかる。このことは、瓜生<sup>9)</sup>の結果と一致するが、より一般的な解釈を与えるものである。また、式 (2.21) と (2.24) を比較すると、波によって誘起されたエネルギーフラックスは、両式で異なっており、式 (2.21) には、(2.24) にあらわれる項の一部しか含まれていない。このことは、他の波動と主流の場で得られた結果<sup>9)~12)</sup>とも一致する。また、上述のようなエネルギー式の座標変換に対する問題点は、渦度とエントロピーの議論では現われないことが予想されるが、本論文ではふれない。

### 3. 波動場の特性

#### 3.1. 上層の解

前節で求めた波を記述する運動方程式 (2.11)~(2.15) を、以下のような平面波解を用いて解き、過剰反射の条件を求める。波の振幅の1次のオーダーの諸量を、次のように平面波解で表わす。

$$[u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, w_1^{(1)}, p_1^{(1)}] = [U_1^{(1)}(z), V_1^{(1)}(z), W_1^{(1)}(z), P_1^{(1)}(z)] \exp i(kx + ly - \sigma t) + c.c., \quad (3.1)$$

ここで、 $c.c.$  は複素共役量を表わす。また、 $k, l$  はそれぞれ  $x, y$  方向の波数を表わし、 $\sigma$  は角振動数を表わす。

式 (3.1) を式 (2.11)~(2.13), (2.15) に代入すると、

$$-i\omega U_1^{(1)} + W_1^{(1)} \frac{du_0^{(1)}}{dz} - fV_1^{(1)} = -\frac{ik}{\rho_0} P_1^{(1)}, \quad (3.2)$$

$$-i\omega V_1^{(1)} + W_1^{(1)} \frac{dv_0^{(1)}}{dz} + fU_1^{(1)} = -\frac{il}{\rho_0} P_1^{(1)}, \quad (3.3)$$

$$P_1^{(1)} \equiv P_i, \quad (3.4)$$

$$ikU_1^{(1)} + ilV_1^{(1)} + \frac{dW_1^{(1)}}{dz} = 0, \quad (3.5)$$

となる。ここで、

$$\omega(z) = \sigma - ku_0^{(1)}(z) - lv_0^{(1)}(z), \quad (3.6)$$

$P_i$  は定数である。上述の式から、 $U_1^{(1)}, V_1^{(1)}$  を消去すると、次式が得られる。

$$\left[ \frac{d}{dz} + P(z) \right] W_1^{(1)}(z) = Q(z), \quad (3.7)$$

ここで,

$$P(z) = \frac{1}{\omega^2 - f^2} \left[ (\omega k - i l f) \frac{du_0^{(1)}}{dz} + (\omega l + i k f) \frac{dv_0^{(1)}}{dz} \right], \quad (3.8)$$

$$Q(z) = -i \frac{\omega(k^2 + l^2)}{\omega^2 - f^2} \frac{P_t}{\rho_0}. \quad (3.9)$$

また, ここで簡単のため,  $\omega^2 - f^2 \neq 0$  とする. これは, 臨界層がない場合を取り扱うことに対応する. 上式は厳密に解けて, 解は

$$W_1^{(1)} = - \left\{ \exp \int_0^z [-P(\eta)] d\eta \right\} \left\{ \int_z^H Q(\zeta) \left[ \exp \int_0^\zeta P(\eta) d\eta \right] d\zeta \right\}, \quad (3.10)$$

と求まる. また後の計算のために, 他の量も以下のように求めておく.

$$P_t = \rho_0 W_1^{(1)}(0) T, \quad (3.11)$$

ここで,

$$T = - \left\{ \int_0^H -i \frac{\omega(k^2 + l^2)}{\omega^2 - f^2} \left[ \exp \int_0^\zeta P(\eta) d\eta \right] d\zeta \right\}^{-1}, \quad (3.12)$$

である. また,

$$U_1^{(1)} = \frac{\omega k + i l f}{\omega^2 - f^2} \frac{P_t}{\rho_0} + \frac{W_1^{(1)}}{\omega^2 - f^2} \left( f \frac{dv_0^{(1)}}{dz} - i \omega \frac{du_0^{(1)}}{dz} \right), \quad (3.13)$$

$$V_1^{(1)} = \frac{\omega l - i f k}{\omega^2 - f^2} \frac{P_t}{\rho_0} - \frac{W_1^{(1)}}{\omega^2 - f^2} \left( f \frac{du_0^{(1)}}{dz} + i \omega \frac{dv_0^{(1)}}{dz} \right), \quad (3.14)$$

である.

### 3.2. 下層の解

下層では, 主流がないために, 上層の運動方程式とは異なった基礎式が得られる. 式 (2.11), (2.12) より, 渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \right) = f \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial z}, \quad (3.15)$$

が求まる. また, 圧力方程式が

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{p_1^{(2)}}{\rho_0} = \frac{\partial^2 w_1^{(2)}}{\partial t \partial z} + f \left( \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \right), \quad (3.16)$$

と求まる. 式 (2.13) と (2.14) から, 圧力と鉛直速度に対する式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) w_1^{(2)} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p_1^{(2)}}{\partial t \partial z}, \quad (3.17)$$

が求まる. 式 (3.15)~(3.17) から,  $w_1^{(2)}$  のみに関する式が次のように得られる.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + f^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] w_1^{(2)} = 0. \quad (3.18)$$

各物理量を次のように入射波と反射波の成分に分解する.

$$[u_1^{(2)}, v_1^{(2)}, w_1^{(2)}, p_1^{(2)}, \theta_1^{(2)}] = [u_{1I}^{(2)}, v_{1I}^{(2)}, w_{1I}^{(2)}, p_{1I}^{(2)}, \theta_{1I}^{(2)}] + [u_{1R}^{(2)}, v_{1R}^{(2)}, w_{1R}^{(2)}, p_{1R}^{(2)}, \theta_{1R}^{(2)}]. \quad (3.19)$$

ここで, 添字  $I, R$  はそれぞれ, 入射波, 反射波を表わす. 平面波解を用いて,

$$[u_{1I}^{(2)}, v_{1I}^{(2)}, w_{1I}^{(2)}, p_{1I}^{(2)}, \theta_{1I}^{(2)}] = [U_{1I}^{(2)}, V_{1I}^{(2)}, W_{1I}^{(2)}, P_{1I}^{(2)}, \Theta_{1I}^{(2)}] \exp i(kx + ly + mz - \sigma t) + c.c., \quad (3.20)$$

$$[u_{1R}^{(2)}, v_{1R}^{(2)}, w_{1R}^{(2)}, p_{1R}^{(2)}, \theta_{1R}^{(2)}] = [U_{1R}^{(2)}, V_{1R}^{(2)}, W_{1R}^{(2)}, P_{1R}^{(2)}, \Theta_{1R}^{(2)}] \exp i(kx + ly - mz - \sigma t) + c.c., \quad (3.21)$$

とおく. ここに,  $m$  は鉛直方向の波数であり, 指数関数の前の係数は定数である. 式 (3.19)~(3.21) を式 (3.18) に代入すると, 分散関係

$$\sigma^2 = \frac{N^2(k^2 + l^2) + f^2 m^2}{k^2 + l^2 + m^2}, \quad (3.22)$$

が得られる. また, 鉛直方向の群速度は,

$$c_{gz} = -\frac{m}{\sigma} \frac{(N^2 - f^2)(k^2 + l^2)}{(k^2 + l^2 + m^2)^2}, \quad (3.23)$$

であり, 入射波に対して  $c_{gz}$  が鉛直上向き, 反射波に対して  $c_{gz}$  が鉛直下向きである条件として,

$$\sigma m < 0 \quad (3.24)$$

が求まる. また,  $W_{1I}^{(2)}, W_{1R}^{(2)}$  と他の諸量との関係は,

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{1I}^{(2)} \\ P_{1R}^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \frac{\rho_0(N^2 - \sigma^2)}{\sigma m} \begin{pmatrix} W_{1I}^{(2)} \\ W_{1R}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} U_{1I}^{(2)} \\ U_{1R}^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \frac{(\sigma k + i f l)(N^2 - \sigma^2)}{\sigma m(\sigma^2 - f^2)} \begin{pmatrix} W_{1I}^{(2)} \\ W_{1R}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} V_{1I}^{(2)} \\ V_{1R}^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \frac{(\sigma l - i f k)(N^2 - \sigma^2)}{\sigma m(\sigma^2 - f^2)} \begin{pmatrix} W_{1I}^{(2)} \\ W_{1R}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Theta_{1I}^{(2)} \\ \Theta_{1R}^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{i \rho_0 N^2}{\sigma g} \begin{pmatrix} W_{1I}^{(2)} \\ W_{1R}^{(2)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

と求まる.

### 3.3. 反射条件

節 3.1, 3.2 で求まった解を用いて, 界面での条件から反射条件を求める. 界面変位  $h$  を

$$h = \hat{H} \exp i(kx + ly - \sigma t) + c.c., \quad (3.26)$$

とおく. ここに  $\hat{H}$  は定数である. 界面で全圧力が等しいことから,

$$g'\hat{H} + TW_1^{(1)}(0) = -\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma m} (W_1^{(1)} - W_1^{(2)}), \quad (3.27)$$

が求まる。ここで、

$$g' = \frac{\rho_0^{(2)}(0) - \rho_0}{\rho_0} g, \quad (3.28)$$

である。さらに反射係数  $R$  を用いて、

$$W_1^{(2)} = RW_1^{(1)}, \quad (3.29)$$

とおくと、式 (3.27) は

$$g'\hat{H} + TW_1^{(1)}(0) - (R-1)\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma m} W_1^{(1)} = 0, \quad (3.30)$$

となる。さらに、あと2つの境界条件：鉛直速度の連続

$$W_1^{(1)}(0) = (1+R)W_1^{(2)}, \quad (3.31)$$

と、界面での運動学的条件

$$-i\sigma\hat{H} = (1+R)W_1^{(2)}, \quad (3.32)$$

を用いると、 $R$  が次のように求まる。

$$R = \frac{A+C+Bi}{-A+C-Bi}. \quad (3.33)$$

ここに、実数  $A, B, C$  はそれぞれ次式をみます。

$$\left. \begin{aligned} A+iB &= -T - i\frac{g'}{\sigma}, \\ C &= -\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma m} (> 0). \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

そして、反射係数を決める式として、

$$|R|^2 = \frac{(A+C)^2 + B^2}{(A-C)^2 + B^2}, \quad (3.35)$$

が求まる。上式から、 $A=0$  のとき通常反射 ( $|R|^2=1$ )、 $A>0$  のとき過剰反射がおこることがわかる。また、 $A=C, B=0$  のとき、入射波はなく反射波だけが存在することになり、その条件は波の発生を示している。また、 $A=-C, B=0$  は完全吸収 ( $|R|^2=0$ ) の条件である。

次に、式 (3.31)、(3.35) から、入射波の振幅  $W_1^{(1)}$  と界面変位  $\hat{H}$  との間に

$$\left| \frac{\sigma\hat{H}}{W_1^{(1)}} \right| = \frac{2C}{[(A-C)^2 + B^2]^{1/2}} \left( \text{または } \frac{2C|R|}{[(A+C)^2 + B^2]^{1/2}} \right), \quad (3.36)$$

という関係が得られる。波の発生条件 ( $A=C, B=0$ ) の下では、 $|\sigma\hat{H}/W_1^{(1)}| \rightarrow +\infty$  である。通常反射 ( $A=0, B=0$ ) の場合には、 $|\sigma\hat{H}/W_1^{(1)}| = 2$  となる。これは、入射波と反射波の振幅が同じであり、位相が一致しているため、界面変位が入射波の振幅の2倍になることを表わしたものである。ま

た、完全吸収 ( $A = -C, B = 0$ ) の場合,  $|\sigma \hat{H}/W_{12}| = 1$  となることがわかる.

以下, 臨界層をもたない例として  $k = 0, u_0^{(1)} = 0$  の場合を取り扱う. そのとき,  $A, B$  は, 式 (3.34) から, 次のように求まる.

$$A + iB = -\frac{i(\sigma^2 - f^2)}{\sigma l^2} \left\{ \int_0^H \exp \left[ -i \frac{f l u_0^{(1)}}{\sigma^2 - f^2} \right] d\zeta \right\}^{-1} - i \frac{g'}{\sigma}. \quad (3.37)$$

さらに,  $u_0^{(1)}$  に代表的な3つの流速分布を用いて, 反射係数を調べる.

### (1) 厚板模型

$u_0^{(1)}$  を  $0 < z \leq H$  では一定の値  $U_0$  であり,  $z = 0$  の近傍でシア一流になっており,  $u_0^{(1)}(0) = 0$  を満たすものとする. これは, 実際の海洋でよく観測されている流速分布である<sup>13)</sup>. このとき,  $A, B$  は次のように求まる.

$$A = -\frac{(\sigma^2 - f^2)}{\sigma l^2 H} \sin \left( \frac{f l U_0}{\sigma^2 f^2} \right), \quad (3.38)$$

$$B = \frac{(\sigma^2 - f^2)}{\sigma l^2 H} \cos \left( \frac{f l U_0}{\sigma^2 f^2} \right) - \frac{g'}{\sigma}. \quad (3.39)$$

また, 波の発生条件 ( $A = C, B = 0$ ) は,

$$\sin \psi = mH, \quad (3.40)$$

$$\cos \psi = \frac{l^2 H}{\sigma^2 f^2} g', \quad (3.41)$$

となり, ここで  $\psi$  は

$$\psi = \frac{f l U_0}{\sigma^2 - f^2}, \quad (3.42)$$

を表わす. 上式 (3.40), (3.41) を満たす  $(\sigma, l)$  をもった波が発生する. さらに  $g' = 0$  とおくと,

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots, \quad (3.43)$$

かつ

$$mH = \pm 1 \quad (\text{複号同順}), \quad (3.44)$$

が求まり, ラグランジュ的に導いた Kamachi and Grimshaw<sup>7)</sup> の結果と一致する. また  $l < 0$  の場合のみ考えると, Stern<sup>9)</sup> の結果とも一致する. また, 上述の結果から, 発生する波の角振動数は慣性振動に近く, 波長は混合層の厚さに比べて長い (たとえば,  $\sigma/f = 1.013, lH = 0.0053$ ) ことがわかり, 観測の結果<sup>13)</sup>とも一致する.

### (2) 一様流および線型シア一流

次に  $u_0^{(1)}$  として,

$$u_0^{(1)} = \begin{cases} U_2 & (\delta \leq z \leq H), \\ A_2 z & (0 \leq z \leq \delta), \end{cases} \quad (3.45)$$

を用いる.  $U_2, A_2$  は定数で, その値はエクマン輸送の関係から

$$A_2 = \frac{U_2}{\delta} = \frac{2\tau_y}{f\delta(2H-\delta)}, \quad (3.46)$$

と決められる。また、 $\delta$  は  $0 \leq \delta \leq H$  を満たす任意の定数である。式 (3.37) と (3.45) を用いると、 $A, B$  は次のように求まる。

$$A = -\frac{Z_R}{Z_R^2 + Z_I^2}, \quad (3.47)$$

$$B = \frac{Z_I}{Z_R^2 + Z_I^2} - \frac{g'}{\sigma}, \quad (3.48)$$

ここで、

$$Z_R = \left[ (H-\delta) \sin \psi_2 - \frac{\delta}{\psi_2} \cos \psi_2 + \frac{\delta}{\psi_2} \right] C_1, \quad (3.49)$$

$$Z_I = \left[ (H-\delta) \cos \psi_2 + \frac{\delta}{\psi_2} \sin \psi_2 \right] C_1, \quad (3.50)$$

$$C_1 = -\frac{\sigma l^2}{\sigma^2 - f^2}, \quad (3.51)$$

である。また  $\psi_2$  は  $fU_2/(\sigma^2 - f^2)$  である。この場合についても、 $g' = 0$  のとき波の発生条件を求めると、

$$\tan \psi_2 = -\frac{H-\delta}{\delta} \psi_2, \quad (3.52)$$

$$\frac{m\delta}{\psi_2} \left\{ 1 - \frac{[\delta^2 + \psi_2^2 (H-\delta)^2]^{1/2}}{\delta} \right\} = 1, \quad (3.53)$$

が得られ、Kamachi and Grimshaw<sup>7)</sup> の結果と一致する。また、 $\delta \rightarrow 0$  のときには、(1) の厚板模型と一致し、 $\delta \rightarrow H$  のときには Kamachi and Grimshaw<sup>7)</sup> の線型シアー流の場合と一致することも確かめられる。

### (3) 対数分布則

最後に、乱流中に形成される主流の例として、対数則

$$U_0^{(1)} = A_3 \ln \left( B_3 \frac{z}{H} + 1 \right), \quad (3.54)$$

を用いる。ここで、係数  $A_3$  はエクマン輸送の関係から決められ、

$$A_3 = \frac{\tau_y}{fH \left[ \frac{B_3+1}{B_3} \ln(B_3+1) - 1 \right]}, \quad (3.55)$$

であり、また  $B_3$  は正の任意の定数である。この  $u_0^{(1)}$  を用いると、 $A, B$  は次のように求まる。

$$A = C_3 \frac{Y_R}{Y_0}, \quad (3.56)$$

$$B = -C_3 \frac{Y_I}{Y_0} - \frac{g'}{\sigma}, \quad (3.57)$$

ここで,

$$Y_0 = (B_3+1)^2 + 1 - 2(B_3+1) \cos [\psi_3 \ln (B_3+1)], \quad (3.58)$$

$$Y_R = (B_3+1) \sin [\psi_3 \ln (B_3+1)] - \psi_3 (B_3+1) \cos [\psi_3 \ln (B_3+1)] + \psi_3, \quad (3.59)$$

$$Y_I = \psi (B_3+1) \cos [\psi_3 \ln (B_3+1)] + (B_3+1) \sin [\psi_3 \ln (B_3+1)] - 1, \quad (3.60)$$

$$C_3 = -\frac{\sigma^2 - f^2}{\sigma l^2 H} B_3, \quad (3.61)$$

$$\psi_3 = \frac{f A_3}{\sigma - f^2}, \quad (3.62)$$

である。この場合、結果は  $B_3 \rightarrow +\infty$  で (1) の厚板模型の場合に一致する。

次に、式 (3.35) を用いて、界面での密度差の反射係数への影響を調べる。そのため、図 2, 3 に、それぞれ  $g' = 0, 0.5 \text{ cm s}^{-2}$  の場合の反射係数の値の等高線が、 $(lH, \sigma/f)$  平面上に描かれている。図 2, すなわち  $g' = 0$  の場合には、ラグランジュ的に求めた Kamachi and Grimshaw<sup>7)</sup> の結果と一致している。図 2 と 3 を比較すると、 $g' \neq 0$  の場合には、発生する波の角振動数は高くなり、波数は減少することがわかる。これは、界面での密度差が存在することにより、界面を伝わる重力波が誘起

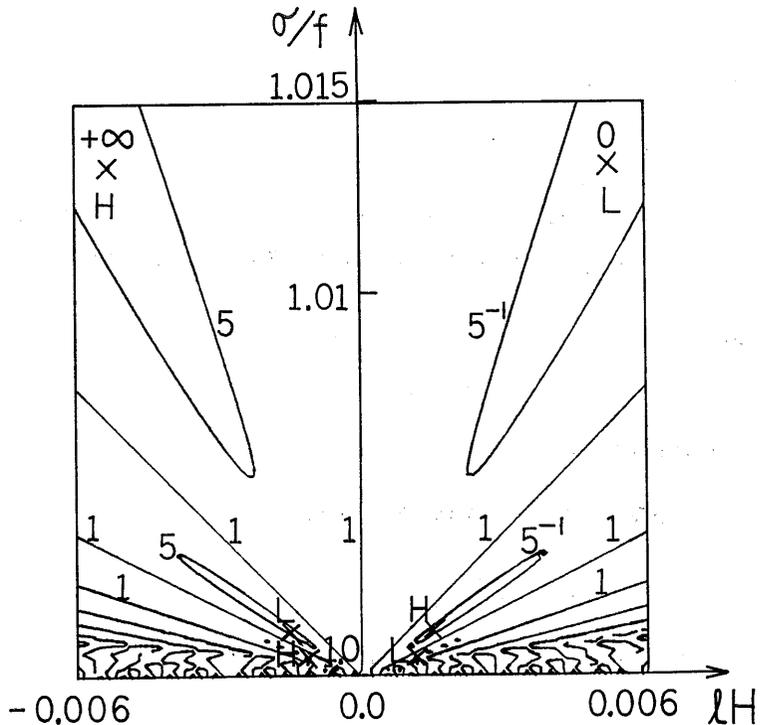


図 2 反射係数の値の分布。ここで、 $k=0, v_0^{(3)}=0, g'=0, u_0^{(3)}$  として厚板模型を用いてある。図中の点 H, L では、それぞれ波の発生と完全吸収がおこることを示している。

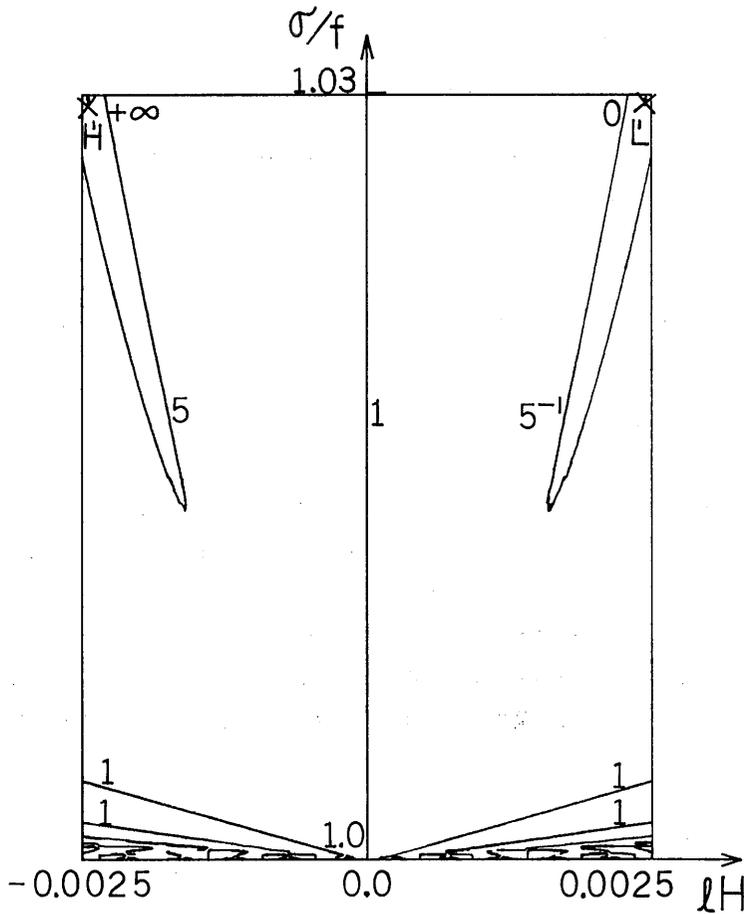


図3 反射係数の値の分布. 図中パラメーターの値には  $g' = 0.5 \text{ cms}^{-2}$  を用いた以外は, 図2の場合と同じである.

され, その影響により, 発生する波の振動数が高くなったものと思われる. また,  $g' \neq 0$  の場合にも, 式 (3.42) と同様に,  $fU_0/(\sigma^2 - f^2)$  の値はほとんど一定になるため, 波数は減少することになる.

### 3.4. 波の伝播特性

次に, 前節での厚板模型を用いて, 慣性重力波の伝播特性を調べる. 特に発生と通常反射の場合を議論する. 波の1つの特性量である  $w_1^{(j)}$  は, (i) 波の発生と (ii) 通常反射の場合について, それぞれ次のように表わせる.

$$(i) \begin{cases} w_1^{(1)} \propto 2 \left( \frac{z}{H} - 1 \right) \cos(ly - \sigma t), \\ w_1^{(2)} \propto -2 \cos\left(\frac{z}{H} + ly - \sigma t\right), \end{cases} \quad (3.63)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} w_1^{(1)} \propto 2 \left( \frac{z}{H} - 1 \right) \cos (ly - \sigma t), \\ w_1^{(2)} \propto -2 \cos \left( \frac{z}{H} \right) \cos (ly - \sigma t). \end{cases} \quad (3.64)$$

上式から、上層では、波は界面から海洋表面にむかって単調に減衰する鉛直構造をもっている。また、 $w_1^{(1)}$  中の量  $(z/H - 1)$  は、

$$\sinh \left( \frac{z}{H} - 1 \right); \quad z \rightarrow H, \quad (3.65)$$

の漸近的表現とも考えられ、上層内の攪乱の鉛直スケール  $\lambda_z^{(1)}$  は、次式のように評価される。

$$\lambda_z^{(1)} \approx 2\pi H. \quad (3.66)$$

すなわち、上層では、混合層厚さの6倍程度の鉛直スケールをもった攪乱が存在していることになる。特に、慣性重力波の鉛直方向の伝播特性を調べるため、図4に (a): 発生, (b): 通常反射の場合の、 $w_1^{(1)}$  の値の等高線が描かれている。図4(a)から、下層では、位相の伝播は鉛直上方に向っているが、エネルギーの伝播はそれに直交し鉛直下方に向っており、波が発生することを示している。図4(b)から、通常反射の場合、下層では、鉛直波長が混合層厚さの6倍程度の定在波が存在していることがわかる。また上層でも、混合層厚さの6倍程度の鉛直スケールをもつ攪乱が誘起されていることがわかる。

最後に、厚板模型を用いて通常反射がおこる場合の、界面変位の水平方向の伝播特性を調べる。通常反射の条件は  $A = 0$  であり、また簡単の為に  $B = 0$  も用いる。式 (3.37) から次式を得る。

$$\sin \psi = 0, \quad (3.67)$$

$$\frac{\sigma^2 - f^2}{l^2 H^2} \cos \psi + \frac{g'}{H} = 0. \quad (3.68)$$

これらの式から

$$\psi = \pm(2m+1)\pi, \quad (3.69)$$

が求まる。ここで、 $m$  は自然数であり、 $\psi$  の定義から符号 (+, -) は、それぞれ  $l$  が (正, 負) の場合に対応する。式 (3.69) を用いると、式 (3.68) は

$$\frac{g'}{H} - \frac{\sigma^2 - f^2}{l^2 H^2} = 0, \quad (3.70)$$

となる。上式から、

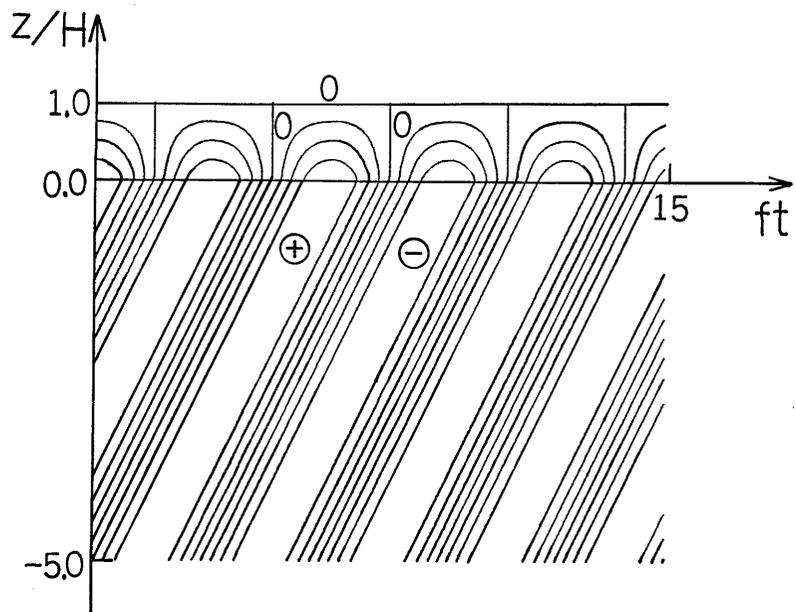
$$\sigma^2 = f^2 + g' H l^2, \quad (3.71)$$

が得られ、通常反射の場合、界面変位は慣性振動より  $g' H l^2$  だけ大きい振動数の波であることがわかる。また、式 (3.71) を変形して、

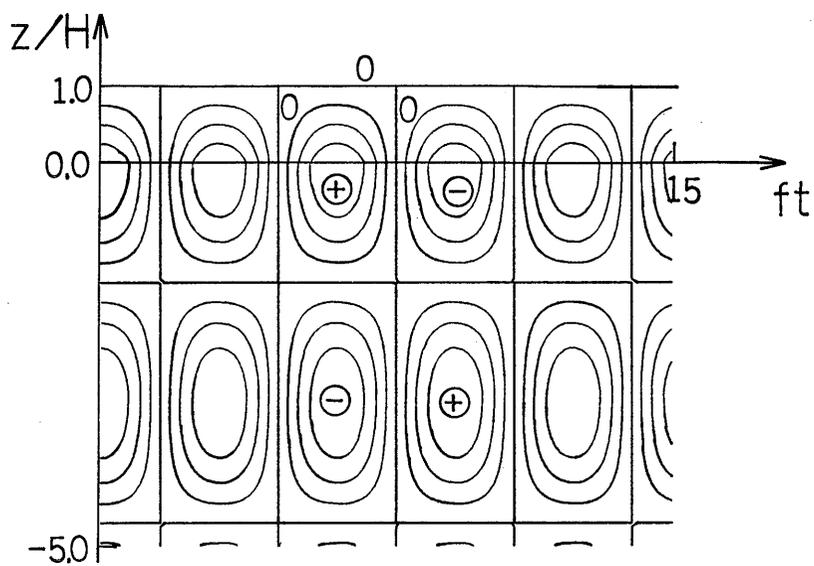
$$\left( \frac{\sigma}{l} \right)^2 = g' H + \left( \frac{f}{l} \right)^2, \quad (3.72)$$

を得る。これは、界面変位の水平位相速度が、 $\sqrt{g' H}$  よりも  $(f/l)$  だけ速いことを示している。また、

$\sqrt{g/H} \gg f$  の場合には、界面変位がほとんど重力波の長波として伝わることになり、逆の場合には慣性振動として伝わることをわかる。



(a): 波の発生



(b): 通常反射

図4 慣性重力波の鉛直方向の伝播特性.

## 4. 波によって誘起された平均場の特性

本節では、第2節で求めた2次の平均流とエネルギーを支配する基礎方程式を、第3節で求めた平面波解を用いて調べる。式(3.1), (3.20), (3.21)の平面波解を用いるとき、第2節でのべた平均化の操作は、時間、空間( $x, y$ 方向)、波の位相のどれで平均化しても同じ結果になり、平均量は $z$ のみの関数となる。

まず、平面波解を用いるとき、2次のオーダーの平均流と平均浮力に対する基礎式、および連続の式、(2.16)~(2.20)は、以下のように書き表わせる。

$$-f\overline{v_2^{(n)}} = \frac{d}{dz}(-\overline{u_1^{(n)}w_1^{(n)}}), \quad (4.1)$$

$$f\overline{u_2^{(n)}} = \frac{d}{dz}(-\overline{v_1^{(n)}w_1^{(n)}}), \quad (4.2)$$

$$-\overline{\theta_2^{(n)}} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\overline{p_2^{(n)}}}{dz} = \frac{d}{dz}(-\overline{w_1^{(n)}w_1^{(n)}}), \quad (4.3)$$

$$N^2\overline{w_2^{(2)}} = -\frac{d}{dz}(-\overline{\theta_1^{(2)}w_1^{(2)}}), \quad (4.4)$$

$$\frac{d\overline{w_2^{(n)}}}{dz} = 0. \quad (4.5)$$

ここで、式(4.3)の中の $\overline{\theta_2^{(n)}}$ と $\overline{w_2^{(n)}}$ は零である。式(4.5)と境界条件 $\overline{w_2^{(n)}}(H) = 0$ ,  $\overline{w_2^{(n)}}(0) = \overline{w_2^{(2)}}(0)$ , により、全層を通じて鉛直平均流は存在しない、すなわち

$$\overline{w_2^{(n)}}(z) = 0, \quad (4.6)$$

となる。このことは、式(4.3)から、上層では、波の振幅の2次の平均圧力勾配が零であることからわかる。また、式(4.6)を(4.4)に代入すると、慣性重力波による浮力フラックスが一定であることがわかる。これは、下層では、慣性重力波と主流との相互作用がないことから明らかである。図5に、主流、レイノルズ応力、平均流の上層での鉛直分布を示す。図中では、 $u_0^{(n)}$ として第3節での対数分布則と、波の発生の条件に対応する $(\sigma, l)$ の値を用いてある。図から、2次の平均流は、主流のシアーの強い界面付近で急激に変化していることがわかる。

次に、波のエネルギー方程式について考察する。式(3.1), (3.20), (3.21)を用いると、式(2.21)は上層で

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(n)}w_1^{(n)}} \right) = -\overline{u_1^{(n)}w_1^{(n)}} \frac{du_0^{(n)}}{dz} - \overline{v_1^{(n)}w_1^{(n)}} \frac{dv_0^{(n)}}{dz}, \quad (4.7)$$

となり、下層では、

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(2)}w_1^{(2)}} \right) = 0, \quad (4.8)$$

となる。式(4.7)は、波が主流からエネルギーを得て、そのエネルギーを鉛直下方へ伝えているとき

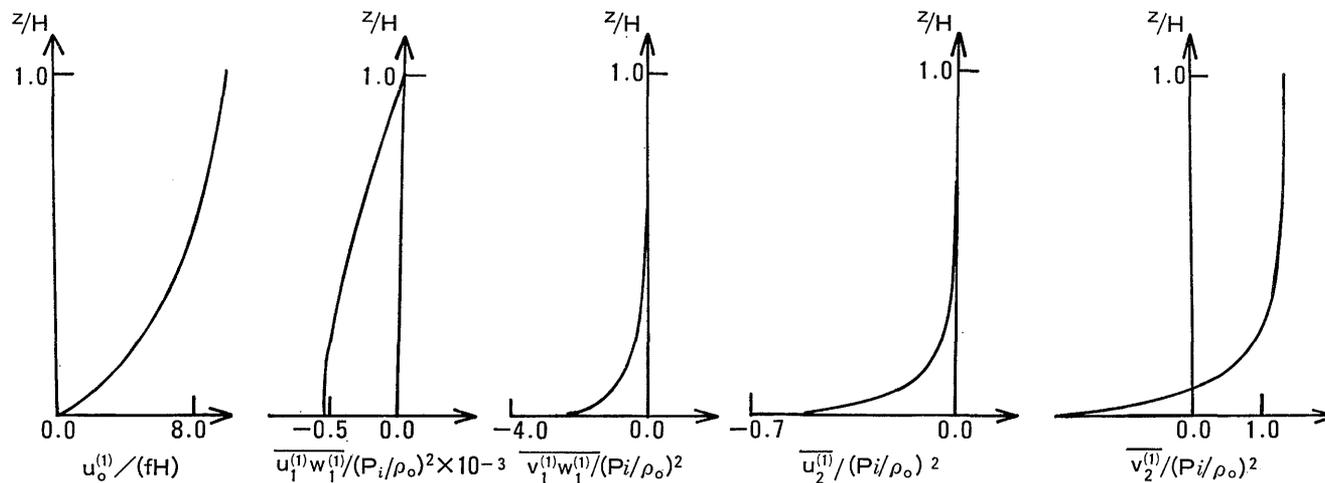


図5 主流，レイノルズ応力，波によって誘起された平均流の，混合層内での鉛直分布．パラメーター $\sigma$ と $l$ には波の発生条件を満たす値 ( $\sigma/f = 1.03$ ,  $lH = -0.005$ ) を用いてある．主流は対数分布則 ( $B_3 = 10$ ) である．

には、過剰反射が occurring していることを示唆している。また、式 (4.8) から、下層では、波のエネルギーフラックスが一定であることを示している。以上のことは、界面でエネルギーフラックスの値が連続であることから、上層で主流から得たエネルギーは、下層で慣性重力波によって、鉛直下方に伝えられることを示している。

次に、上層での全エネルギー方程式 (2.24) は、平面波解を用いれば、

$$\frac{d}{dz} F_{\text{total}}^{(1)} = \overline{\mathbf{u}_2^{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{F}^{(1)}}{dz}, \quad (4.9)$$

と書き表わせる。ここで、全エネルギーフラックス  $F_{\text{total}}^{(1)}$  は

$$F_{\text{total}}^{(1)} = u_0^{(1)} \overline{u_1^{(1)} w_1^{(1)}} + v_0^{(1)} \overline{v_1^{(1)} w_1^{(1)}} + \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(1)} w_1^{(1)}}, \quad (4.10)$$

と書ける。式 (4.9) は、混合層からの波の発生が、体積力として導入された乱流と関係づけられることを示した式である。このような体積力による波の発生の議論は、乱流応力による音波の発生についての Lighthill<sup>14)・15)</sup>、二層界面での不安定波の応力による内部波の発生についての McIntyre and Weissman<sup>11)</sup>、によってもなされている。式 (4.9) の右辺を、式 (2.7), (2.8) を用いて書き直すと、式 (4.9) は

$$\frac{d}{dz} F_{\text{total}}^{(1)} = f \mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_0^{(1)} \times \overline{\mathbf{u}_2^{(1)}}), \quad (4.11)$$

となる。また、海洋表面で

$$F_{\text{total}}^{(1)}(H) = 0, \quad (4.12)$$

である。式 (4.11) から、過剰反射のときには、全エネルギーフラックスは鉛直下向きになり、それと式 (4.12) を考慮すると、全エネルギーフラックスの発散は正になる。また、式 (4.11) の右辺から、全エネルギーフラックスの発散は、 $\overline{\mathbf{u}_2^{(1)}}$  が  $\mathbf{u}_0^{(1)}$  と  $\pi/2$  の角度をなすときに、最大値をもつことがわかる。例として、第3節での厚板模型を用いると、右辺は

$$f \overline{v_2^{(1)}} u_0^{(1)} \propto -\sigma l, \quad (4.13)$$

となる。このことから、 $\sigma l < 0$  のとき、すなわち慣性重力波が風上に伝わる時、過剰反射が起ることがわかる。この結果は、全エネルギーの解釈から得られたものであるが、運動方程式を用いた議論にもとづく Stern<sup>6)</sup> の結果とも一致する。図6に、式 (4.11) の右辺の値と  $F_{\text{total}}^{(1)}$  の値の混合層内での鉛直分布が示されている。図中では、 $k=0$ ,  $v_0^{(1)}=0$ ,  $u_0^{(1)}$  として第3節での一様流および線型シアー流モデルを用いている。パラメーター ( $\sigma$ ,  $l$ ) として波の発生の条件をみたす値を用いるときには、全エネルギーフラックスは鉛直下向きになる。また、 $k \neq 0$  で、 $\mathbf{u}_0^{(1)}$  が  $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)}| \ll |f|$  ( $\mathbf{k}$  は波数ベクトル) の場合には、式 (4.11) の右辺は、次のように近似できる。

$$f \mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_0^{(1)} \times \overline{\mathbf{u}_2^{(1)}}) \sim -\frac{1}{2} \left( \frac{P_t}{\rho_0} \right)^2 \frac{f l^2}{(\omega^2 - f^2)^2} u_0^{(1)}(z) \omega(z) l. \quad (4.14)$$

この式より、過剰反射の為には、

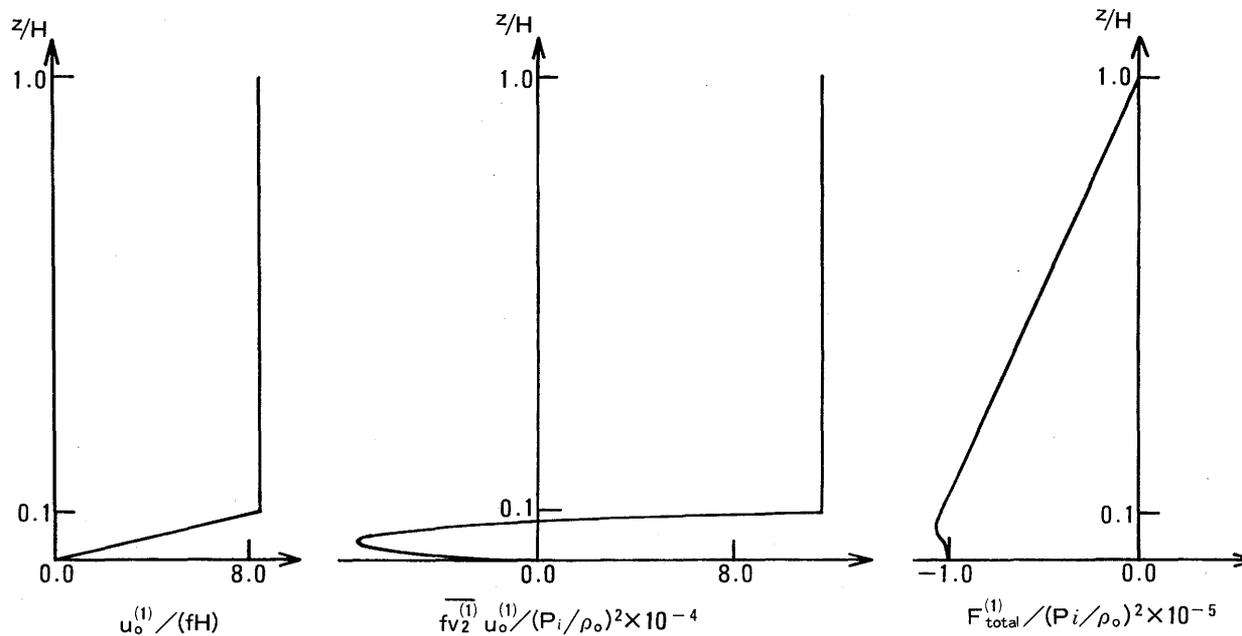


図6 主流,  $\overline{fv_2^{(1)} u_0^{(1)}}$ ,  $F_{total}^{(1)}$  の混合層内での値の鉛直分布. パラメーター  $\sigma$  と  $l$  には, 波の発生条件から決められた値 ( $\sigma/f = 1.03$ ,  $lH = -0.005$ ) を用いてある. 主流は一樣流および線型シア一流 ( $\delta = 0.1$ ) である.

$$-u_0^{(1)}(z)\omega(z)l > 0, \quad (4.15)$$

である必要がある。  $u_0^{(1)}(z) > 0$  の場合、式 (4.15) は

$$-\omega(z)l > 0, \quad (4.16)$$

となり、式 (4.13) と同様な条件を得る。

下層での全エネルギー方程式 (2.27) は

$$\frac{d}{dz} F_{\text{total}}^{(2)} = 0, \quad (4.17)$$

ここで

$$F_{\text{total}}^{(2)} = \frac{1}{\rho_0} \overline{p_1^{(2)} w_1^{(2)}} + \frac{\theta_0^{(2)}}{N^2} \overline{\theta_1^{(2)} w_1^{(2)}}, \quad (4.18)$$

となり、全エネルギーフラックスは一定となる。第3節で求めた平面波解を用いると、浮力フラックスは

$$\overline{\theta_1^{(2)} w_1^{(2)}} = 0, \quad (4.19)$$

を満たすことが示される。式 (4.18), (4.19) より、全エネルギーフラックスは、波のエネルギーフラックスと一致する。さらに、式 (4.18) に、第3節での平面波解を用いると、

$$F_{\text{total}}^{(2)} = \frac{2\rho_0\sigma(N^2 - \sigma^2)}{m} (|W_{1R}^{(2)}|^2 - |W_{1I}^{(2)}|^2), \quad (4.20)$$

となる。式 (3.24) から  $\sigma > 0$  のとき  $m < 0$  であり、過剰反射のとき

$$F_{\text{total}}^{(2)} < 0, \quad (4.21)$$

が示せる。すなわち、過剰反射の時には、全エネルギーフラックスは鉛直下向きになることがわかる。

以上の議論より、過剰反射がおこるときには、上層で主流  $u_0^{(1)}$  (あるいは乱流効果  $F^{(1)}$ ) の作用によって生じた全エネルギーフラックスは、界面で下層の全エネルギーフラックスと値が同じになり、主流の存在しない下層では、慣性重力波のエネルギーフラックスとして輸送されることが示された。

## 5. 結 論

本研究では、静水圧近似と微小振幅波の仮定を用いて、海洋混合層からの慣性重力波の反射、およびその時の波と主流との相互作用について調べた。明らかとなったことは、次の通りである。

- (1) 本研究では、通常反射の他に、過剰反射、波の発生、入射波の完全吸収もおこりうる。発生する慣性重力波は、角振動数が慣性振動数に近く、水平波長は混合層の厚さに比べて長く、鉛直波長は混合層厚さの6倍程度、という特性をもっている。
- (2) 上層と下層の界面での密度差は、発生する慣性重力波の振動数を大きくし、波数を小さくする。
- (3) 上層と下層での波の伝播特性を調べることにより、上層では、混合層厚さの6倍程度の鉛直スケールをもった攪乱が存在し、そのスケールは、下層の慣性重力波の鉛直波長とほぼ同じであることがわかった。

(4) 入射波の振幅と界面変位の関係が導かれ、通常反射の場合は、界面変位は、少くとも入射波の振幅の2倍である。

(5) 通常反射の場合、界面の  $y$  方向の位相速度は、重力波の位相速度  $\sqrt{g'H}$  よりも  $f/l$  だけ大きい。

(6) 波のエネルギー方程式の議論から、過剰反射の時には、上層で波は主流のシアアからエネルギーを得る。下層ではそのエネルギーを、一定のエネルギーフラックスとして鉛直下方に伝える。

(7) 平面波解を用いるとき、混合層内での全エネルギー方程式から、全エネルギーフラックスの発散は、主流と波によって誘起された平均流とが直交しているときに最大になる。

(8) 平面波解および厚板模型を用いると、全エネルギー方程式から、

$$\frac{d}{dz} F_{\text{total}}^{(1)} \propto -\sigma l$$

という、過剰反射の判別式を得る。慣性重力波が主流に直交して、風上側に伝わる時に過剰反射がおこる。

(9) 下層では、全エネルギーフラックスから

$$F_{\text{total}}^{(2)} = \frac{2\rho_0\sigma(N^2 - \sigma^2)}{m} (|W_{1R}^{(2)}|^2 - |W_{1I}^{(2)}|^2)$$

という、過剰反射に対するもう一つの判別式が得られた。過剰反射がおこるときには、全エネルギーフラックスは、鉛直下向きである。

## 謝 辞

本研究を行なうにあたり、有益な御助言と指導をいただきましたメルボン大学の Grimshaw 博士に、感謝致します。また、応用力学研究所の金子助教授および増田助手との議論が有益であったことをここに付記して、感謝致します。

## 参 考 文 献

- 1) Leaman, K. and Sanford, T. : Vertical energy propagation of inertial waves, J. Geophys. Res. 80 (1975) 1975.
- 2) Rossby, H. T. and Sanford, T. B. : A study of time dependent currents observed in the velocity profiles through the main thermocline, J. Phys. Oceanogr. 6 (1976) 766.
- 3) Fu, L. L. : Observations and models of inertial waves in the deep ocean, Rev. Geophys. and Space Phys. 19 (1981)141.
- 4) Pollard, R. T. : On the generation by winds of inertial waves in the ocean, Deep-Sea Res. 17 (1970) 795.
- 5) Pollard, R. T. and Millard, R. C. : Comparison between observed and simulated Wind-generated inertial oscillations, Deep-Sea Res. 17 (1970) 813.
- 6) Stern, M. E. : Interaction of inertia-gravity waves with the wind, J. Mar. Res.

- 35 (1977) 479.
- 7) Kamachi, M. and Grimshaw, R. H. J. : Over-reflection of internal-inertial waves from the mixed layer, *J. Fluid Mech.* (to appear).
  - 8) 瓜生道也: 波とそのまわりの平均運動, *天気* **23** (1976) 3.
  - 9) Bretherton, F. P. : The general linearised theory of wave propagation, in *Mathematical problems in the Geophysical Sciences*, 1. *Geophysical Fluid Dynamics*, ed. Reid, W. H., *Lectures in Appl. Math.* **13** (1971) 61.
  - 10) Acheson, D. J. : On over-reflection, *J. Fluid Mech.* **77** (1976) 433.
  - 11) McIntyre, M. E. and Weissman, M. A. : On radiating instabilities and resonant overreflection, *J. Atmos. Sci.* **35** (1978) 1190.
  - 12) Grimshaw, R. H. J. : wave action and wave-mean flow interaction, with application to stratified shear flows, *Univ. Melb. Math. Res. Rep.* **3** (1983) 1.
  - 13) Pollard, R. T., Rhines, P. B., and Thompson, R. O. : The deepening of the wind mixed layer, *Geophys. Fluid Dyn.* **3** (1973) 381.
  - 14) Lighthill, M. J. : Sound generated aerodynamically, *Proc. Roy. Soc. London*, **A267** (1962) 147.
  - 15) Lighthill, M. J. : *Waves in Fluids* (Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1978) Chap. 1.

(昭和58年5月27日 受理)