

振動平板上の粘性流体層の不安定解析

蒲地, 政文
九州大学大学院工学研究科水工土木学専攻 : 博士後期課程

<https://doi.org/10.15017/4743703>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 59, pp.89-94, 1983-09. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



寄 書

振動平板上の粘性流体層の不安定解析

蒲 地 政 文*

概 要

振動する平板上におかれた、自由表面をもつ流体層の不安定問題が、運動方程式とエネルギー式を用いて調べられている。微小攪乱の成長率の議論から、主流が不安定化する条件が決定され、同時に、自由表面の微小変位が、主流を不安定化する原因であることが示されている。

Key words: Oscillatory viscous flow, Stability theory

1. 緒 言

振動流の不安定問題については、すでにいくつかの研究がなされている^{1)~7)}。その結果、平板上の無限水深の粘性振動流や、二平行平板間の粘性振動流は、微小な攪乱に対して、常に安定であることが示されている^{3)~5)}。Kelly¹⁾ は、上下層で密度の異なる非粘性二層振動流の不安定性を議論し、主流がパラメーター励振の機構によって不安定になりうることを示しているが、粘性の効果については調べていない。Kamachi and Honji⁶⁾ は、粘性二層振動流の実験と、界面に形成される波動についての簡単な解析を行なっている。彼らは、上下層の粘度差が大きい時に界面波動が形成されることを実験で示し、また界面波動の形成条件を解析によって求めている。実験値との比較から、解析結果は界面波動の形成の必要条件を与えるものと考えられているが、界面の不安定機構については明らかにされていない。Yih²⁾ は、振動平板上の自由表面をもった流体層の不安定問題を論じ、水深に比べて長い波長をもつ微小攪乱に対して、主流が不安定になることを示した。しかしながら、Yih²⁾ は微小攪乱の成長率を求めただけであり、主流が不安定になるパラメーター値の範囲や物理機構については議論していない。本論文では、Yih²⁾ が取り扱った問題を、運動方程式とエネルギー式を用いて議論し、主流の不安定機構を物理的に明らかにすることを目的としている。内部境界面をもった粘性二層振動流の不安定問題については、Kamachi and Honji⁷⁾ によって、すでに報告されているが、より簡単なモデルにもとづく本研究によって、その不安定の物理的意味が明確になる。

2. 解析結果および議論

振動平板上におかれた、自由表面をもつ粘性流体層の不安定問題を運動方程式とエネルギー式を用いて調べる。解析に用いた座標系を図 1 に示す。ここで用いられる解析手法は、自由表面をもつ振動流の

* 九州大学大学院工学研究科博士後期課程水工土木学専攻（金子新紹介）

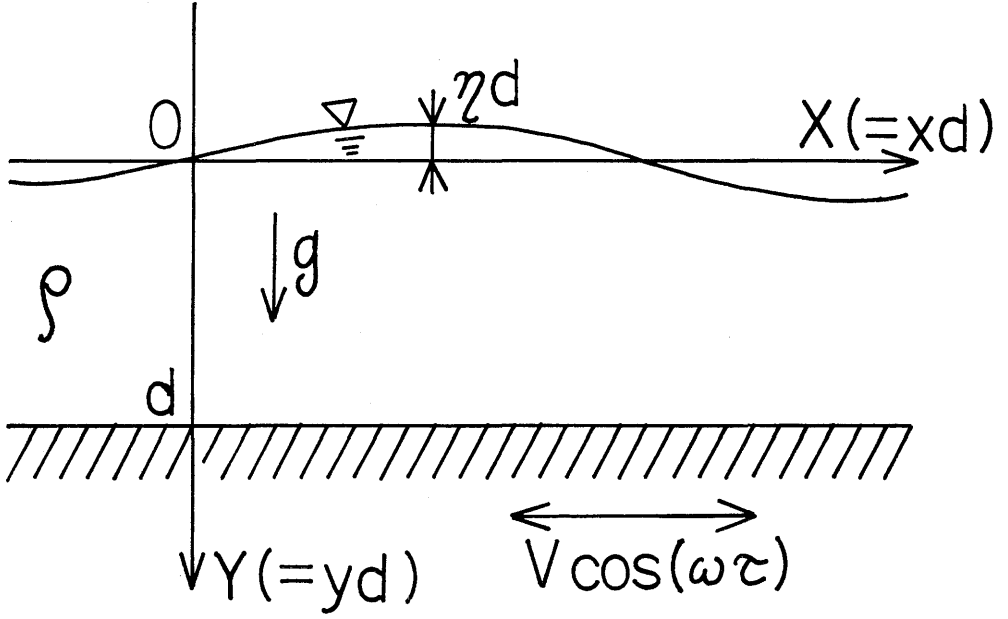


図 1 座標軸の設定. 図中, ρ は密度, g は重力加速度, η は無次元化された表面変位, V は振動板の振動振幅, ω は無次元化された角振動数, τ は無次元化された時間, そして (x, y) は無次元化された空間座標を表す.

場合には Yih²⁾, 内部境界面をもつ二層粘性振動流の場合には Kamachi and Honji³⁾, によってすでに詳細に記述されているので, ここでは概略を述べる. そのため, 解析の詳細については上記論文を参照されたい. 本論文の微小攪乱は, 次式のような, 時間変動の項を含むオア・ゾンマーフェルト方程式に従う.

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + i\alpha U\right) \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right) \phi - i\alpha \phi \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha^4\right) \phi, \quad (2.1)$$

ここで, $U(y, \tau)$ と $\phi(y, \tau)$ はそれぞれ無次元化された主流と攪乱の流れ関数を表す. $R(=Vd/\nu)$ はレイノルズ数, α は攪乱の無次元波数である. 振動平板上 ($y=1$) で, 攪乱の流速が零である境界条件は次式ようになる.

$$\frac{\partial \phi(1, \tau)}{\partial y} = 0, \quad \phi(1, \tau) = 0. \quad (2.2)$$

自由表面では, 接線応力と法線応力がともに零となる条件から次式を得る.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \alpha^2 \phi + h \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (2.3)$$

$$i\alpha(F^{-2} + S\alpha^2)h + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial y} - i\alpha U \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (2.4)$$

ここで, $F(=V/\sqrt{gd})$ はフルード数であり, $S(=T/\rho d V^2)$ は表面張力 T の効果を表わす無次元量である. また, h は, 自由表面変位 η を

$$\eta = h(\tau) \exp(i \alpha x), \quad (2.5)$$

とおいたときの振幅であり, τ に関して周期的である. Floquet の定理^{2), 8)} を適用すれば, $\phi(y, \tau)$ と $h(\tau)$ は実定数 μ_1 を用いて, 次式のように表現できる.

$$\left. \begin{aligned} \phi(y, \tau) &= \exp(\mu_1 \tau) \chi(y, \tau), \\ h(\tau) &= \exp(\mu_1 \tau) H(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ここで, χ と H は τ の周期関数である. 長波の攪乱 (すなわち $O(\alpha) < O(1)$ である) の場合に議論を限定し, μ_1, χ, H を次式のように波数 α で摂動展開する.

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \theta_0 + \alpha \theta_1 + \alpha^2 \theta_2 + \cdots, \\ \chi &= \phi_0 + \alpha \phi_1 + \alpha^2 \phi_2 + \cdots, \\ H &= h_0 + \alpha h_1 + \alpha^2 h_2 + \cdots. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

式 (2.7) を用いて式 (2.1) を解き, 自由表面の運動学的条件から, α の 0 次と 1 次で成長率が $\theta_0 = \theta_1 = 0$ と求まる. そして, α の 2 次のオーダーでは, 自由表面の運動学的条件が

$$\frac{dh_2}{d\tau} = -\theta_2 + A + B(\tau), \quad (2.8)$$

と求まる. ここで, $A, B(\tau)$ はそれぞれ $-i[U(0, \tau) h_1(\tau) + \phi_1(0, \tau)]$ 中の定常成分と τ の周期関数でできた成分である. $B(\tau)$ と h_2 が τ に関して周期的, θ_2 と A が τ に独立な定数であることを考慮すると, 成長率 θ_2 が,

$$\theta_2 = A, \quad (2.9)$$

と求まる. 式 (2.9) の導き方からわかるように, 本論文の不安定は, いわゆる永年不安定である (永年不安定については, たとえば文献 8 を参照の事). このことは, 成長率が α^2 のオーダーと小さいことから明らかである.

次に, 不安定の発生する機構を明確にするため, 式 (2.8) 中の A について議論する. A の値は, ϕ_1 の定常成分と $h_1 U$ の定常成分の和として表わされる. まず, ϕ_1 には, 自由表面における接線応力と法線応力について次式のような境界条件が課される.

$$h_1 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (2.10)$$

$$iF^{-2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau \partial y} - iU \frac{\partial \phi_0}{\partial y} = 0. \quad (2.11)$$

上式中の 2 つの項 $h_1 \partial^2 U / \partial y^2$ と $-iU \partial \phi_0 / \partial y$ が定常成分をもつために, ϕ_1 も定常成分を有するこ

となる。上式の2つの項は、自由表面に $O(\alpha^0)$ の表面変位を仮定したことによって生じた項である。また、 $O(\alpha^0)$ の表面変位が存在しないときには、運動学的条件を考察することにより、 $h_1=0$ が導け、 $A=0$ となる。以上のことを考慮すると、自由表面変位の存在が本論文における不安定の発生原因と結論される。

式 (2.9) の右辺を実際に計算して、 F と $\beta(=d/\delta)$ をパラメーターとして不安定領域を求める。ここで、 δ は振動流境界層の厚さを表わす。図2に (β, F) 空間での不安定領域を示す。図中斜線をほどこした部分が不安定領域である。図より、 β が増加するにつれて不安定がおこる最小のフルード数の値は増加している。このことは、粘性の効果が大きくなるにつれ、不安定領域が増加することと対応している。図中3本の曲線 (a), (b), (c) は、Kamachi and Honji⁶⁾ によって得られた解析結果を示す。Kamachi and Honji⁶⁾ は、粘性流体層表面に波動が発生する条件として、次式を与えている。

$$\frac{\sqrt{gL^3}}{\nu} \leq R_c(\alpha), \quad (2.12)$$

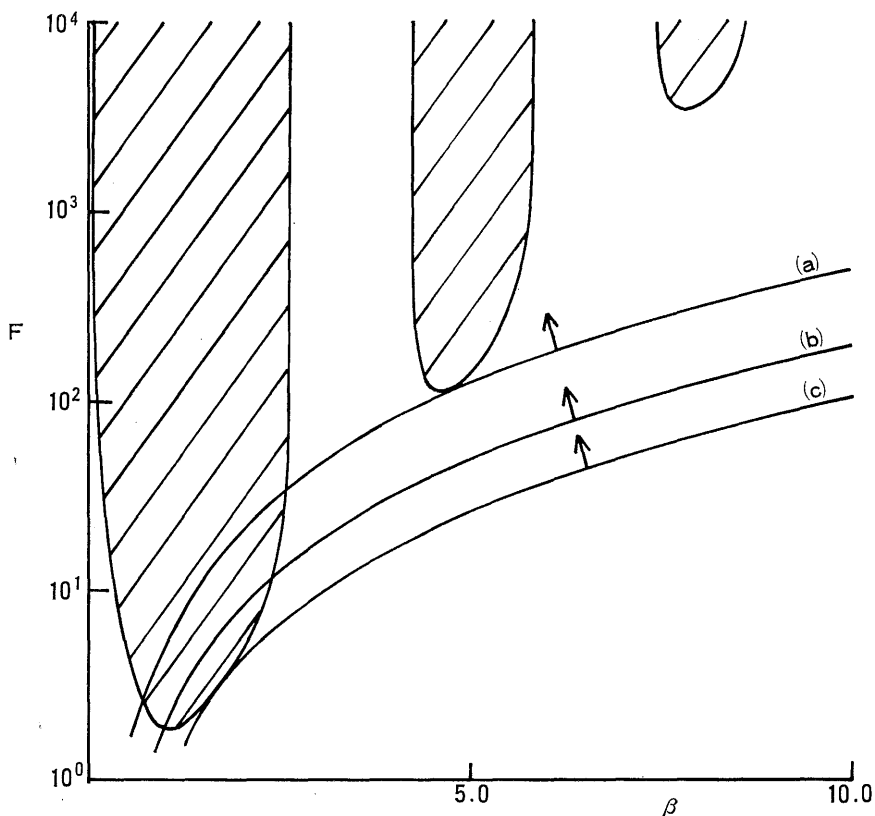


図2 不安定特性。斜線部分が不安定領域を示す。曲線 (a), (b), (c) は、Kamachi and Honji⁶⁾ の結果であり、計算条件はそれぞれ、(a): $\omega=1.0$, $\alpha=0.1$, $R_c=200$; (b): $\omega=1.0$, $\alpha=0.2$, $R_c=180$; (c): $\omega=1.0$, $\alpha=1.0$, $R_c=30.0$ である。

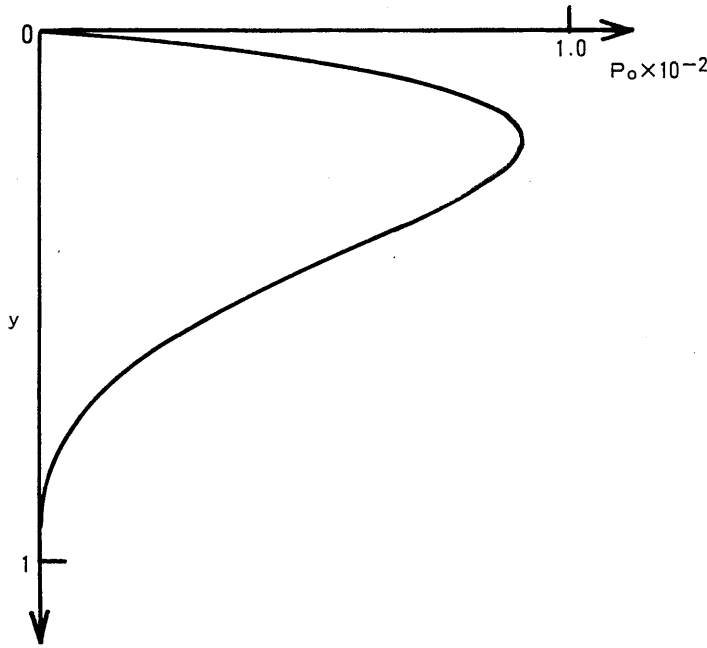


図 3 エネルギー生成項の値の鉛直分布. $F=3.0$, $\beta=1.0$.

ここで, L は表面波の波長, $\alpha = 2\pi d/L$ は無次元波数, R_c は表面波が発生する臨界レイノルズ数で α の関数である. 式 (2.12) を F と β を用いて書き換えると,

$$F \geq \frac{2(2\pi)^{3/2}}{\omega R_c(\alpha) \alpha^{3/2}} \beta^2, \quad (2.13)$$

となる. ここで ω は無次元化された主流の角振動数である. 図 2 には, 式 (2.13) の条件を, $\omega = 1.0$ の値のもとで, $R_c(0.1)=200$, $R_c(0.2)=180$, $R_c(1.0)=30.0$ の各値に対して描いてある.

図中表面波の発生領域は矢印で示されている. Kamachi and Honji⁶⁾ の解析は, 主流のない場合の理論であるが, $R_c \approx 100$ の時の臨界曲線から彼らの理論は本論文の不安定領域の限界を示していることがわかる.

次に, これまで述べてきた議論をエネルギーの観点から考察する. 攪乱のエネルギー式は,

$$\frac{De}{Dt} = P + Tr - \varepsilon, \quad (2.14)$$

となる. 攪乱のエネルギー密度 e は $(u^2 + v^2)/2$ である. ここで, (u, v) は攪乱の流速成分である. D/Dt は $\partial/\partial\tau + U\partial/\partial x$ である. P は主流からのエネルギー生成項

$$P = -uv \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2.15)$$

を表す. Tr は圧力と粘性応力による輸送項, ε は粘性散逸項を表す. P を主流の振動周期にわた

って平均し、その値を P_0 とおく。前述の結果を用いて計算された不安定がおこる条件下で、 P_0 の値の鉛直分布の 1 例が図 3 に示されている。図から、エネルギー生成は、流体層の上半分で顕著であり、特に自由表面直下で最大になっていることがわかる。このことから、エネルギーは、主として自由表面変位に起因して生成されていることがわかる。前述の運動方程式と境界条件を用いた議論と同様に、エネルギーの観点からも、自由表面変位が不安定の原因であることが示せた。以上、本節で述べたことは、二層粘性振動流の不安定に関する結果⁷⁾とも一致している。

謝 辞

本研究にあたり、応用力学研究所金子助教授との議論が有益であったことをここに記して、感謝します。

参 考 文 献

- 1) Kelly, R. E.: The stability of an unsteady Kelvin-Helmholtz flow, J. Fluid Mech. **22** (1965) 547.
- 2) Yih, C. S.: Instability of unsteady flows or configurations. Part 1. Instability of a horizontal liquid layer on an oscillating plane, J. Fluid Mech. **31** (1968) 737.
- 3) Kerczek, C. V. and Davis, S. H.: Linear stability theory of oscillatory Stokes layers, J. Fluid Mech. **64** (1974) 753.
- 4) Davis, S. H.: The stability of time-periodic flows, Ann. Rev. Fluid Mech. **8** (1976) 57.
- 5) Hall, P.: The instability of flat Stokes layers, Proc. Roy. Soc. London **A359** (1978) 151.
- 6) Kamachi, M. and Honji, H.: Oscillation ripple marks of highly viscous fluids, Rep. Res. Inst. Appl. Mech. **28** (1981) 1.
- 7) Kamachi, M. and Honji, H.: The instability of viscous two-layer oscillatory flows, J. Oceanogr. Soc. Jpn. **38** (1983) 346.
- 8) Yih, C. S.: Fluid Mechanics (McGraw-Hill, New York, 1969) Chap. 9.

(昭和 58 年 5 月 27 日 受理)