

イオンビーム・プラズマにおけるソリトンレゾナンス

矢嶋, 信男
九州大学応用力学研究所 : 教授

河野, 光雄
九州大学応用力学研究所 : 助教授

上田, 正二
九州大学大学院工学研究科 : 専攻課程

<https://doi.org/10.15017/4743674>

出版情報 : 応用力学研究所所報. 57, pp.489-498, 1982-10. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



イオンビーム・プラズマにおけるソリトンレゾナンス

矢 嶋 信 男* 河 野 光 雄†
上 田 正 二‡

概 要

イオンビームの存在するプラズマの非線形波動現象を記述する方程式が導かれ、その線形安定性と定常解が調べられる。定常解としては3種類のソリトンモードが存在し、それらの間に共鳴条件が満たされることが、見出された。

Key words: Soliton, Soliton resonance, Ion-beam plasma, Instability, Turbulence

1. ま え が き

プラズマ波動現象においても、浅水波の場合と同様に孤立波解（その挙動が粒子的であるため、しばしばソリトンと呼ばれている）が安定な非線形モードとして存在し得ることはよく知られている。イオン音波のモードについては、その有限小振幅波動は Korteweg-de Vries (KdV) 方程式で記述されることが Washimi-Taniuti によって示され¹⁾、その後、Ikezi 等²⁾ によってソリトンモードの存在が実験的に確認されている。

このイオン音波ソリトンが二次元的に相互作用する場合には、その波面の交差角がある値になれば、共鳴現象が出現する。このことは、理論的に予想されるのみではなく、実験的にも観測されている^{3)~7)}。従って、非線形イオン音波の系は、空間的に多次元の時には、一次元系にくらべれば、複雑さを増す。このソリトンの共鳴相互作用は、多次元空間の場合に限らず、一次元系でも可能な場合がある⁸⁾。しかし、それはごく特殊な人為的な例にすぎず、およそ実在し得るものとは思えない。

ここでは、共鳴的にソリトンが相互作用し得るような一次元系の実例を与えよう。プラズマ中にイオンビームが存在すると、一般に4個の波動モードが可能となる。このうち、2個は左右に伝播するイオン音波に対応し、2個はビーム内音波がビーム速度でドップラーシフトしたものに对应している。これらの4個のモードに対応してソリトンが4種類存在すれば、これらの間で共鳴的な相互作用が可能となる。共鳴現象はほとんど同じ速度で走るソリトン間で可能であるので、4種類のソリトンすべてが共鳴に関与するわけではない。すなわち、ビーム速度とイオン音波の音速とがほとんど等しい場合に限って、ビームと同じ方向に走るイオン音波ソリトンと2つのビームモードソリトンの間で共鳴相互作用が可能

* 九州大学教授，応用力学研究所

† 九州大学助教授，応用力学研究所

‡ 九州大学大学院工学研究科専攻課程

になる。また、後で示されるように、ビームモードに関しては非線形分散が強くあらわれるので、このモードに対応したソリトン間だけでも共鳴がおこり得る。

次の章では、長波長近似を用いて、イオンビームが存在するときの低周波プラズマ波動の非線形共鳴現象を記述する方程式を導く。これは、Ostrovsky 等⁹⁾ が導いたものと本質的には同じであるが、われわれのものは空間的に多次元化されている点で一般的である。すなわち、Ostrovsky 等の仕事では、ビームモードをあらわす線形波動方程式と結合した KdV 方程式が得られているが、われわれの場合には KdV 方程式は2次元化されていて Kadomtsev-Petviashvili (KP)¹⁰⁾ 方程式になっている。この方程式の線形安定性は §3 でしらべられている。その結果、この系は長波長領域で不安定になる場合があることが示される。さらに §4 では、定常解としてのソリトン解が調べられる。ソリトン分散式の解析から、共鳴相互作用の可能性が議論される。§5 では、今後の研究の方向がのべられる。

2. 基礎方程式の導出

ここでは、イオンビーム（ビーム速度を V とする）が存在している無衝突プラズマを考える。プラズマを構成するイオン（ビームではない）の運動は次の流体力学方程式で記述されるものとする。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mu^{-2} \nabla \Phi = 0 \quad (2)$$

ここで、 n はイオン密度の平均値 $n_0^{(i)}$ からのゆらぎ成分で、 $n_0^{(i)}$ で規格化してある。 $\mathbf{u}$ はイオンの流れの速度でビーム速度 V で規格化した。 Φ は T/e (T は電子温度、 $-e$ は電子素電荷) で規格化された静電ポテンシャル、 $\mu = V/\sqrt{T/M}$ (M はイオン質量) は V のイオン音波の音速に対する比である。 L を系の特徴的な長さとして、 $\mathbf{x}$ を L で、 t を L/V で規格化している。電子はボルツマン分布に従うものとすれば、静電ポテンシャル Φ は

$$\lambda^2 \nabla^2 \Phi = e^0 - (1-b)(1+n) - b(1+\rho) \quad (3)$$

で与えられる。 $\lambda = \lambda_D/L$ (λ_D は電子のデバイ長) は系の分散パラメータと呼ばれる。また、 $b = n_0^{(b)}/n_0$ 、 $n_0^{(b)}$ はイオンビームの平均密度、 ρ は $n_0^{(b)}$ で規格化されたビーム密度のゆらぎ成分、 n_0 は電子の平均密度で、平衡状態における電気的中性 $n_0 = n_0^{(i)} + n_0^{(b)}$ が仮定されている。

ここでは、小振幅近似を用いよう。すなわち、 $|n|, |\rho|, |\Phi|, |u| \ll 1$ とする。また、波長が十分長い場合を考えて、 $\lambda \ll 1$ とする。さらに、ビーム密度は小さく、 $b \ll 1$ が仮定される。このような近似の下に、方程式 (1)~(3) をとり扱い易い形に変形する。その場合、ビームが x 軸に沿って流れているとして、ビームとともに走る座標系で考えるのが便利である：すなわち、変数 (x, y, z, t) から

$$\xi = x - t, \quad t = \tau, \quad \eta = (y, z) \quad (4)$$

で (ξ, η, τ) に移る。 η は x 軸に垂直な方向の座標ベクトルである。流れ速度 $\mathbf{u}$ の x 成分を u 、それに垂直な成分を $\mathbf{v}$ と書いておくと (1), (2) は、成分にわけて

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}(n-u)+\left[\frac{\partial n}{\partial \tau}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \xi}(nu)+\frac{\partial}{\partial \eta}(nv)\right]=0 \quad (5a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}(u-\phi)+\left[\frac{\partial u}{\partial \tau}+(\mu^{-2}-1)\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+u\frac{\partial u}{\partial \xi}+\left(v\frac{\partial}{\partial \eta}\right)u\right]=0 \quad (5b)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}v+\frac{\partial \phi}{\partial \eta}+\left[\frac{\partial v}{\partial \tau}+(\mu^{-2}-1)\frac{\partial \phi}{\partial \eta}+u\frac{\partial v}{\partial \xi}+\left(v\frac{\partial}{\partial \eta}\right)v\right]=0 \quad (5c)$$

となる。(3) を ϕ について展開して、2 次までとると、

$$\lambda^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\phi=\phi-n+\frac{1}{2}\phi^2+b(n-\rho) \quad (5d)$$

を得る。 $\mu \simeq 1$ で、且つビームと垂直方向の系の変化がゆるやかであれば、ビーム系での変化は小さくなるので、(5a)~(5c) で [] でくくられた部分の寄与は小さい。したがって、最低次では、

$$n \simeq u \simeq \phi \quad (6)$$

が成立する。(5c) からは

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (7)$$

が得られる。(7) を考慮すれば、(5a)、(5b) において v を含む非線形項は、他の非線形項にくらべて、 $0(\partial^2/\partial \eta^2)$ のオーダーだけ小さいので無視してもよい。そこで、(5a) と (5b) を加えて、

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\phi-n)+2\frac{\partial \phi}{\partial \tau}+(\mu^{-2}-1)\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+3\phi\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}=0 \quad (8)$$

が得られる。(8) に (5d) を用いて $\partial(\phi-n)/\partial \xi$ を消去すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}+\frac{1}{2}(\mu^{-2}-1-b)\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3}+\phi\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{b}{2}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}=0 \quad (9)$$

を得る。ここで、(5d) 左辺の $\partial^2 \phi/\partial \eta^2$ は高次効果として無視した。

(9) にあらわれるビーム密度 ρ は、微小パラメータ b があるので、最低次で評価しておけば十分である。 u_b をビーム速度のゆらぎの x 成分とすれば、ビーム座標系で ρ の変化は

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+\frac{\partial u_b}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial u_b}{\partial \tau}+\frac{\partial \phi}{\partial \xi}=0$$

で与えられる。 u_b を消去して、

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad (10)$$

が導かれる。

(7)、(9)、(10) は ϕ, ρ, v に対する閉じた方程式を与えている。(9) を ξ で微分して (7) を用いれば、

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau}+\frac{1}{2}(\mu^{-2}-1-b)\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3}+\phi\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2}=0 \quad (11)$$

となる。したがって、イオンビームの変調効果を含む非線形イオン波は、K-P 方程式とビーム変調の式との結合したものであらわされる。ここで、 η -依存性を無視すると、(11) は簡単になって、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(\mu^{-2} - 1 - b) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} = 0 \quad (12)$$

と書ける。これは Ostrovsky 等が導いた式と一致する⁹⁾。

3. 一次元線形安定性

以下では、(10) と (12) から成る系を考える。簡単のために、適当な変数変換を行って

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad (13a)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (13b)$$

の形にしておく、(10)、(12) とくらべれば、 $f \propto \Phi$ 、 $g \propto \rho$ となっている。 $\beta = b/2$ はビームパラメータであり、 $\alpha = (1 + b - \mu^{-2})/2$ は、 $V = c$ ($c^2 = T/M$ はイオン波の音速)であれば、 $\alpha = ((1 + b/2) - c)/V$ である。

f 、 $g \propto e^{i(kx - \omega t)}$ において、(13a、b) で記述される系の線形安定性をしらべる。分散式は、

$$\omega - \frac{\beta k^3}{\omega^2} = -k(\alpha + k^2) \quad (14)$$

と書ける。これは、 ω につき 3 次式を与えるので標準的な手法で解ける。

$\alpha > 3(\beta/4)^{1/3}$ のときには、(14) はつねに 3 個の実根を与えている。 $\alpha < 3(\beta/4)^{1/3}$ のときには、

$$k^2 > 3(\beta/4)^{1/3} - \alpha \equiv k_c^2 \quad (15)$$

のときに 3 個の実根を、さもなければ 1 個の実根と 2 個の共役複素根を与える。したがって、線形波動の安定条件は

$$k^2 + \alpha > 3(\beta/4)^{1/3} \quad (16)$$

である。この事情を第 1 図に示す。

安定領域における 3 個の実根 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は

$$\omega_1 = -\frac{1}{3}k(k^2 + \alpha)(1 + 2\cos(\theta/3)) \quad (17a)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{3}k(k^2 + \alpha)(1 + 2\cos(\theta/3 + 2\pi/3)) \quad (17b)$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{3}k(k^2 + \alpha)(1 + 2\cos(\theta/3 - 2\pi/3)) \quad (17c)$$

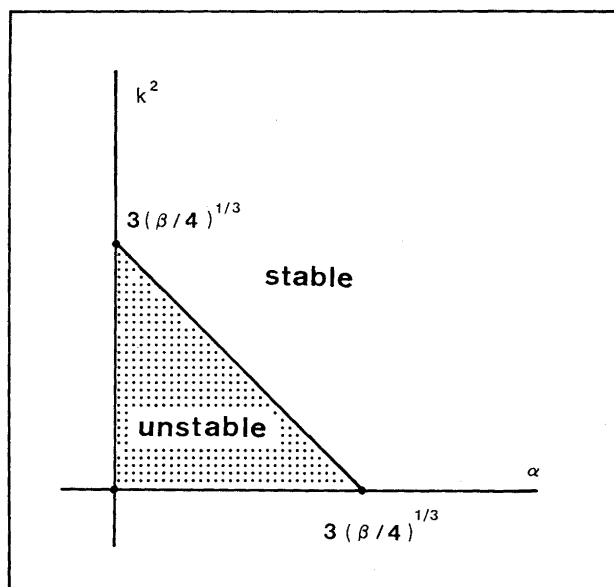
で与えられる、ここで θ は

$$\tan \theta = \sqrt{z^3 - 1} / (z^3/2 - 1), \quad 3\pi \geq \theta \geq 2\pi \quad (18a)$$

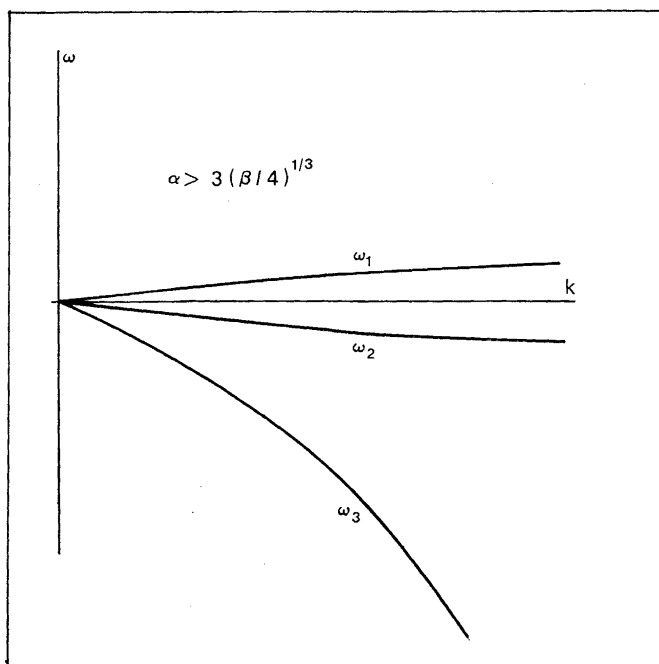
$$z = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{\beta} \right)^{1/3} (k^2 + \alpha) > 1 \quad (18b)$$

で与えられている。

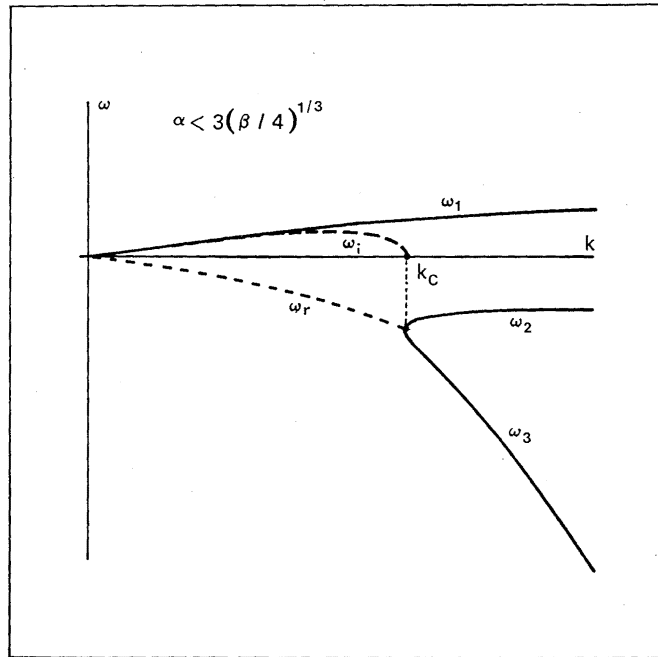
一方、不安定領域における根は、



第1図 線形波動の安定領域



第2図 線形分散関係 (安定な場合)



第3図 線形分散関係 (不安定な場合)

$$\omega_1 = -\frac{1}{3}k(k^2 + \alpha)\{1 - 2\text{ch}(\xi/3)\} \quad (19a)$$

$$\omega_{2,3} = \frac{1}{3}k(k^2 + \alpha)\{1 + \text{ch}(\xi/3) \mp \sqrt{3} \text{ish}(\xi/3)\} \quad (19b)$$

である。ここで、

$$\xi = \ln \left[2z^{-3} \left\{ 1 - \frac{1}{2}z^3 - \sqrt{1-z^2} \right\} \right] \quad (20)$$

である。 z は(18b)で定義されているが、(16)は満たされないで $z > 1$ となっている。このとき、 ξ はつねに負である。

$\alpha \geq 3(\beta/4)^{1/3}$ の場合の ω と k の関係が、第2図、第3図に与えられる。第2図では実線で3個の実根が示されている。 ω_1 , ω_2 はビームモードであって $k \rightarrow \infty$ で一定値 $\sqrt{\beta}$ に接近する。 ω_3 はイオン音波のモードに対応していて、 $k \rightarrow \infty$ では $\omega_3 \sim -k(\alpha + k^2)$ に近づく。 $\alpha < 3(\beta/4)^{1/3}$ では、 $\omega_{2,3}$ のモードは $k < k_c (= \sqrt{3(\beta/4)^{1/3} - \alpha})$ で不安定となっている。これは第3図に於て、点線(ω の実部)と鎖線(ω の虚部)で示される。 ω の虚部の最大値は $\sqrt{\beta}$ のオーダーになっている。 $k > k_c$ では3実根が存在する。これらは、それぞれビームモード、イオン音波に対応している。

4. 定常ソリトン解

方程式(13)の定常解を $f=f(\theta)$, $g=g(\theta)$,

$$\theta = Kx - \Omega t \quad (21)$$

の形で求める。ここでは、パルスのなソリトン解を問題にしているのであるから、 $\theta \rightarrow \pm\infty$ で $f=f'=f''=g=g'=g''=0$ という境界条件をおく。(13) はただちに積分できて

$$f = 12K^2 \operatorname{sech}^2 \theta \quad (22a)$$

$$g = 12(K^4/\Omega^2) \operatorname{sech}^2 \theta \quad (22b)$$

を得る。ただし、 Ω は

$$\Omega - \beta \frac{K^3}{\Omega^2} = -K(\alpha - 4K^2) \quad (23)$$

で与えられる。 K^{-1} はソリトンの幅を与え、振幅は K^2 に比例している。ソリトンの速度 Ω/K は K に依存していて、(23) で決定される。そこで、(23) をソリトン分散式と呼ぶ。

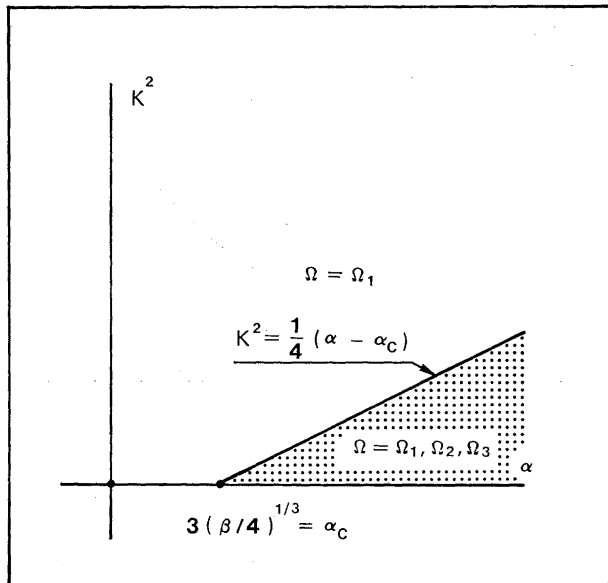
(23) を線形分散式 (14) とくらべると、違いは右辺の k^2 を $-4K^2$ で置きかえただけである。したがって、(23) の根は、前節の議論を読みかえるだけで求められる。第4図には、 Ω の実根が存在する範囲が $\alpha-K^2$ 面で示されている。

$$K^2 < \frac{1}{4}(\alpha - 3(\beta/4)^{1/3}) \quad (24)$$

がみたされれば、(23) は3個の実根、 $\Omega = \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ を与える。それらは、(17) にならって、

$$\Omega_1 = -\frac{1}{3} K(\alpha - 4K^2)(1 + 2\cos(\theta/3)) \quad (25a)$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{3} K(\alpha - 4K^2)(1 + 2\cos(\theta/3 + 2\pi/3)) \quad (25b)$$



第4図 ソリトンの分類

$$\Omega_3 = -\frac{1}{3}K(\alpha - 4K^2)(1 + 2\cos(\theta/3 - 2\pi/3)) \quad (25c)$$

と書ける. θ は (18a) で定義されているが, z は

$$z = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{\beta} \right)^{1/3} (\alpha - 4K^2) \quad (26)$$

となっている. K^2 は (24) で上限が与えられているので, z は

$$\frac{1}{3} \left(\frac{4}{\beta} \right)^{1/3} \alpha \geq z \geq 1$$

の範囲にある. このとき, $3\pi \geq \theta > 2\pi$ となる. また,

$$K^2 > \frac{1}{4}(\alpha - 3(\beta/4)^{1/3}) \quad (27)$$

のときには, ただ1個の実根

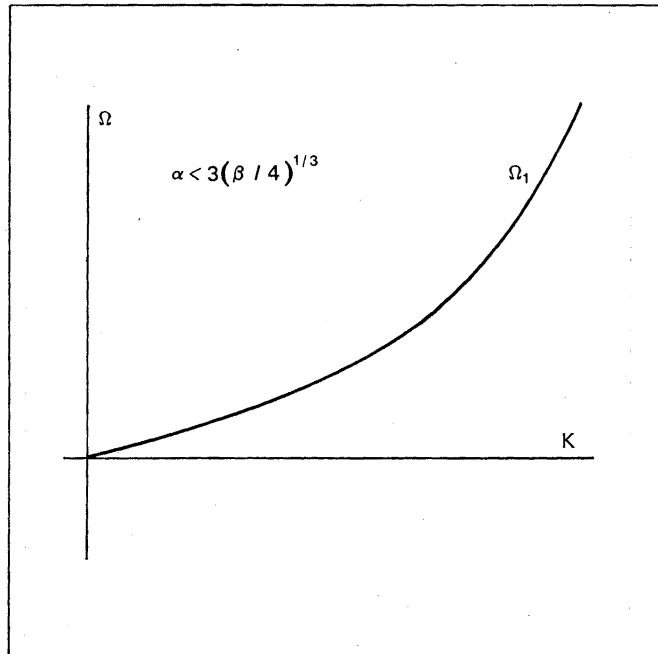
$$\Omega_1 = -\frac{1}{3}K(\alpha - 4K^2) \left\{ 1 - 2 \frac{|z|}{z} \operatorname{ch} \left(\frac{\xi}{3} \right) \right\} \quad (28)$$

が求まる. ξ は

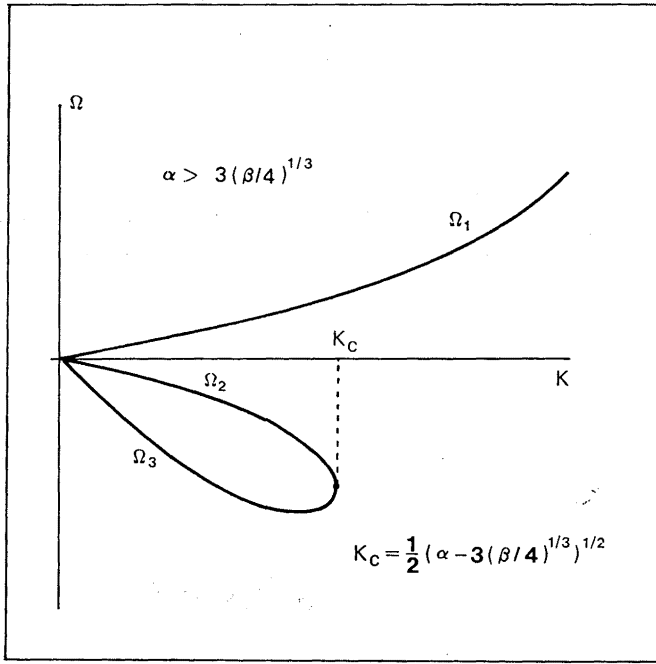
$$\xi = \ln \left[2|z|^{-3} \left\{ 1 - \frac{1}{2}z^3 - \sqrt{1-z^3} \right\} \right] \quad (29)$$

で定義され, z は (26) で与えられる. (27) がみたされているので, $z \leq 1$ である.

この結果を, $\alpha \geq 3(\beta/4)^{1/3}$ に従って図示したものが第5図, 第6図で与えられている. Ω_1 は K を大



第5図 ソリトン分散関係 ($\alpha < 3(\beta/4)^{1/3}$)

第6図 ソリトン分敏関係 ($\alpha > 3(\beta/4)^{1/3}$)

きくすると通常のイオン音波ソリトンに対応しているので、Iソリトンと呼ぶ。 Ω_2, Ω_3 はビーム系固有のソリトンモードであって、それぞれ fast, slow モードに対応しているという意味でFソリトン、Sソリトンと呼ぶ。

$\alpha > 3(\beta/4)^{1/3}$ のときには、前節で示したように3個の線形安定モードがある。3個の線形モードには

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 \pm k_2 = k_3 \quad (30)$$

の条件が成立して得るので、共鳴相互作用が可能である。これは、これまでイオン音波、fast モード、slow モードの間の3波共鳴現象として知られているものである。これに相当して、3個のソリトンモードの間にも

$$\Omega_1 \pm \Omega_2 = \Omega_3, \quad K_1 \pm K_2 = K_3 \quad (31)$$

という条件をつくることは可能である。このとき、2個のソリトンは衝突することによって異なるモードのソリトンに変換される。

一方、 $\alpha < 3(\beta/4)^{1/3}$ のときには、ソリトンモードはイオン音波モードのソリトンに限られる。

5. 結 論

イオンビームが存在する無衝突プラズマにおける低周波非線形波動を長波長近似のもとで調べ、基礎方程式としてビーム効果を含む Kadomtsev-Petviashvili 方程式を得た。この方程式を1次元化し、

線形安定性をしらべ、安定条件を得た。また、定常ソリトン解を求め、ソリトンレゾナンスの可能性を論じた。以下、これに関連した今後の問題点につきのべる。

この系は、ビームパラメータが大きいと長波長領域で不安定となる。この不安定モードは、非線形効果のために、高調波をつぎつぎにつくり出す。この高調波は、その波長がある臨界値をこえると安定になるので、短波長のところでは分散効果とバランスするようになって、ソリトンを形成する。このソリトンは、長波長領域の波と衝突することによって、その位相がランダムに分布するようになる。ここでは考慮しなかったが、ソリトンは電子のランダウ減衰効果によって次第にエネルギーを失うので、このソリトン系は巨視的に見れば定常状態に落ちつくであろう。このことは、この不安定系はソリトンガスによって記述される可能性があることを意味している。したがって、イオンビーム・プラズマ系における乱流現象をこのような角度からとらえることは、理論的にみてきわめて興味ある問題と言える。

ビームパラメータがある臨界値をこえなければ、系は安定であるが、このとき、3個のソリトンモードが存在する。この3個のソリトンモードの存在は、未だ実験的には調べられていないので、その検証は重要である。さらに、これらの3個のモードの間には共鳴条件が成立し得るので、ソリトンレゾナンスの可能性が存在する。これについても実験的な研究を行うことは興味深い。また、波の非線形発展過程において、これらの3個のソリトンモードが如何に出現し得るものかを調べることは、非線形波動現象の解明について重要であると思われる。

参 考 文 献

- 1) H. Washimi and T. Taniuti, Propagation of Ion-Acoustic Solitary Waves of Small Amplitude, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 996-998.
- 2) H. Ikezi, R. J. Taylor and D. R. Baker; Formation and Interaction of Ion-Acoustic Solitons, *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970) 11-14.
- 3) N. Yajima, M. Oikawa and J. Satsuma; Interaction of Ion-Acoustic Solitons in Three-Dimensional Space, *J. Phys. Jpn.* **44** (1978) 1711-1714.
- 4) F. Kako and N. Yajima; Interaction of Ion-Acoustic Solitons in Multi-Dimensional Space. I and II, *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** (1980) 2063-2071, **51** (1982) 311-322.
- 5) P. A. Folkes, H. Ikezi and R. Davis; Two-Dimensional Interaction of Ion-Acoustic Solitons, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 902-904.
- 6) Y. Nishida and T. Nagasawa; Oblique Collision of Plane Ion-Acoustic Solitons. *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1626-1629.
- 7) I. Tsukabayashi and Y. Nakamura; Resonant Interaction of Cylindrical Ion-Acoustic Solitons, *Phys. Lett.* **85** (1981) 151-154.
- 8) R. Hirota and M. Ito; Private Communication.
- 9) L. A. Ostrovsky, V. I. Petrukhina and S. M. Fainshtein; Amplification of Ion-Acoustic Solitons by a Beam of Charged Particles, *Sov. Phys. -JETP* **42** (1976) 1041-1043.
- 10) B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili; On the Stability of Solitary waves in Weakly Dispersing Media, *Sov. Phys. -Doklady* **15** (1970) 539-541.

(昭和57年5月31日 受理)