

定在型バックウォッシュ・ボルテックス

松永, 信博

本地, 弘之
九州大学応用力学研究所 : 教授

<https://doi.org/10.15017/4743650>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 57, pp.89-106, 1982-10. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



定在型バックウォッシュ・ボルテックス

松 永 信 博* 本 地 弘 之†

概 要

比較的粘度の高い流体を作業流体として用い、波を斜面上に入射させたとき汀線付近には、汀線運動の位相にかかわらず定常的に存在する「定在型バックウォッシュ・ボルテックス」が形成される。この流れは、流体の粘度が小さくなると非定常的に形成される「剥離型バックウォッシュ・ボルテックス」に遷移する。定在型および剥離型バックウォッシュ・ボルテックスの流れの向きは同じであり、流れの特性を表わす代表長さ (a) は、遡上長さ (l)、汀線の運動の角振動数 (ω) および流体の動粘性係数 (ν) によって規定される。流れの無次元特性量 (a/l) は、定在型の場合 $Re_1^{1/2}$ に比例し、剥離型の場合は一定値となることを次元解析によって示し、実験結果と一致することを確かめている。ここで、 $Re_1 = \omega l^2 / \nu$ である。斜面の勾配 (θ) の異なる場合の流れの特性を統一的に議論するために、 θ を考慮した無次元量 $Re_2 (= \omega l^2 \theta^2 / \nu)$ に対して a/l をプロットすると、 $Re_2 \leq 30$ で定在型バックウォッシュ・ボルテックスが、 $Re_2 \geq 200$ で剥離型バックウォッシュ・ボルテックスが形成され、 $30 \leq Re_2 \leq 200$ は遷移領域である。流れの可視化実験により、パターンが変化する臨界値は $Re_2 \doteq 90$ である。特性量 a/l の値を定在型から剥離型まで近似的に求める経験式が提案されている。さらに、水面変位を考慮せず、流体を出し入れするモデルに基づく計算によって定在型バックウォッシュ・ボルテックスの特性をシミュレートできることから、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの形成は、斜面上での汀線の運動に起因していることを確かめている。

Key words: Backwash vortex, Flow visualization, Dimensional analysis, Numerical analysis

1. 緒 言

磯波帯と打ち上げ波帯の境界付近には、戻り流によって非定常な剥離渦が形成されることを著者等¹⁾は見出し、それをバックウォッシュ・ボルテックス (backwash vortex) と名付けた。本研究は、波が碎けない単純化された条件のもとで、バックウォッシュ・ボルテックスの特性を明らかにすることを目的としている。

* 九州大学院工学研究科博士後期課程水工土木専攻

† 九州大学教授応用力学研究所

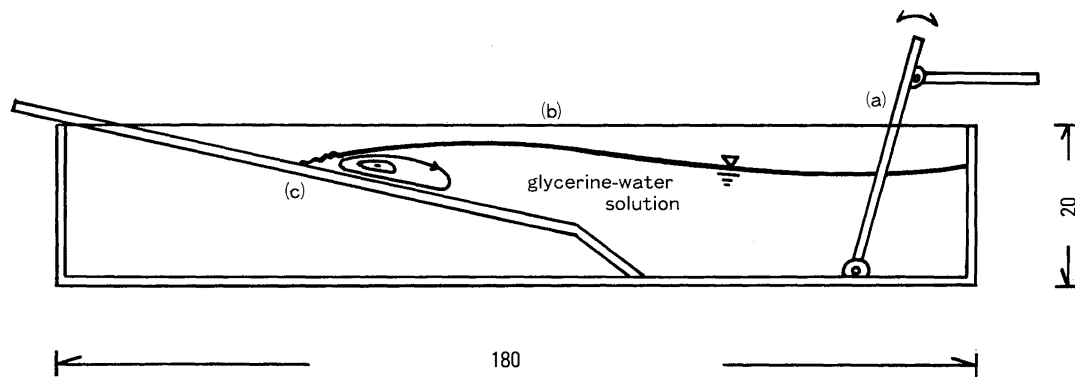


図1 実験装置 (単位 cm)
[(a) 造波機, (b) 水槽, (c) 斜板]

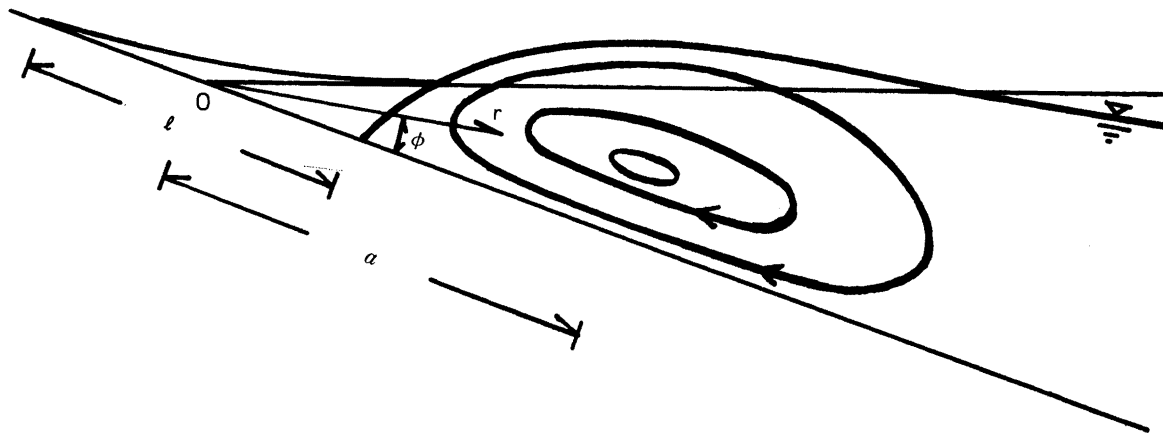


図2 特性量の定義と座標の設定

2. 実験および実験結果

実験装置を図1に示す。水槽は、流れをどの方向からも可視化できるように、全面透明なアクリル板で作られている。水槽の大きさは幅 15 cm、深さ 20 cm、長さ 180 cm である。長さ 170、110 および 50 cm の 3 種類の斜板を用いることにより、斜面とのなす角 (θ) を 8° 、 12° および 32° と変えた。造波にはフラップ・タイプの造波機を用い、振動数 (f) を 0.4 から 1.0 Hz の間で変えた。作業流体として、動粘性係数 (ν) が 0.1 から 4.7 cm²/s の範囲のグリセリン・水混合液を用いた。流れの可視化手法として直接投影法²⁾を用い、流れのパターンを水槽に対して静止した 35 mm カメラで撮影した。

ここで、流れの特性を知るために選ばれた特性量を、図2であらかじめ定義しておく。また、極座標系 (r, ϕ) を静止状態における汀線の位置を極0とするように導入する。 r は動径、 ϕ は斜面から自由水面に向かって測った偏角である。流れの特性量を表わす代表長さ a は、汀線が最下点に達した時の渦流れの中心位置を点0から r 方向に測ったものである。波の特性量としては、入射波の波長、波高を直接的に考慮せず、遡上長さ l と波の遡上流下運動の角振動数 ω を用いる。流れの特性量は、次式で関係づけられる。

$$a = f(l, \omega, \nu) \quad (1)$$

ここで、 f は任意の関数である。次元的考察から、

$$\frac{a}{l} = g(R_{e1}) \quad (2)$$

ここに、 $R_{e1} = \omega l^2 / \nu$,

g は任意の関数、

が得られ、流れの無次元特性量 a/l は、 R_{e1} のみに依存することがわかる。以下では、可視化実験に基づいて流れのパターンの変化の様子や a/l が、 R_{e1} にどのように依存するかを定性的に述べる。

図3(a)~(f) は、碎波することなく入射してきた波が、斜面上を遡上し戻り流となる過程を繰り返すことによって誘起される流れの発達過程を、直接投影法によって可視化したものである。記号 T は、造波開始後の経過時間を表わす。図3(a) は造波開始前のパターンで、流体内に見られる模様はグリセリンと水との不均一な混合によるものである。図3(b), (c), (d) および (f) は、汀線が最下点に達した状態における流れのパターンを撮影したもので、(e) は汀線が最上点に達した時のものである。図3(b) は、 $T=0.5$ min における流れのパターンであり、汀線付近のくさび状領域に反時計回りの流れが誘起されている。図3(c) は、 $T=2$ min における流れのパターンで、図3(b) で示した流れの沖側にそれと反対方向つまり時計回りに回転する流れが形成され始めている。この流れの向きは、著者等によってすでに見出されている非定常なバックウォッシュ・ボルテックスの流れの向きと同じである。しかしながら、図3(b) および (c) で示した流れは、波による流体の最大振動速度に比べ小さな速度をもっていることから、二次的な流れであることがわかる。図3(d) および (e) は、誘起された流れのパターンがほぼ定常状態に達した時のものである。水面変化の任意の位相において二次的な流れが可視

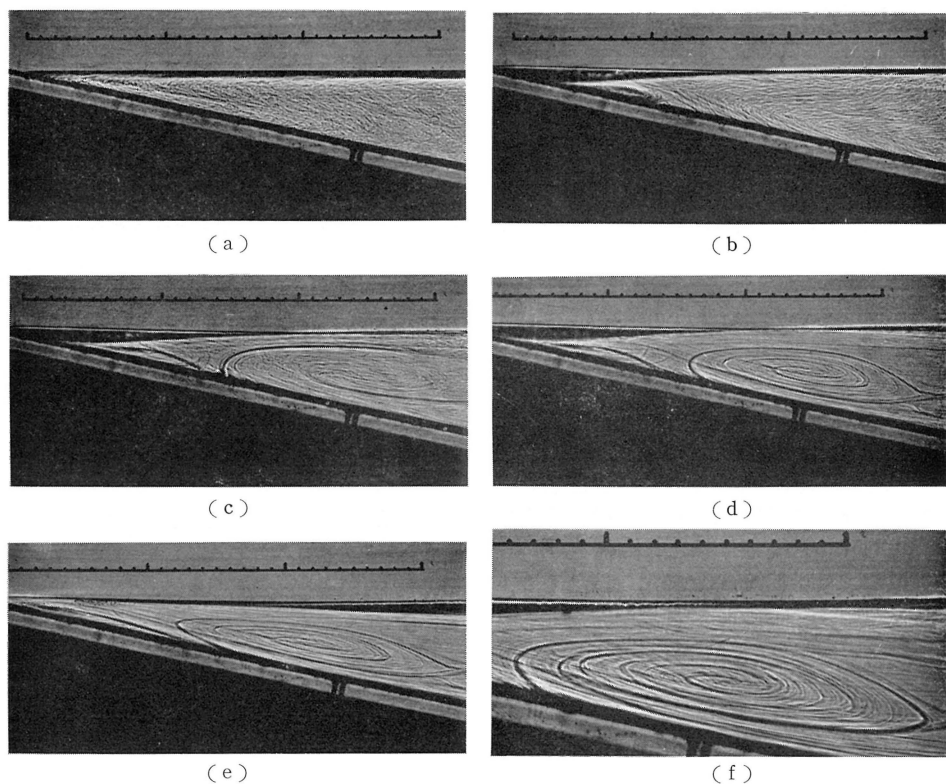


図3 定在型バックウォッシュ・ボルテックスの発達過程
(スケールの目盛 1.0 cm)

$$\left[\begin{array}{l} l=4.5 \text{ cm}, \quad \omega=4.22 \text{ s}^{-1}, \quad \nu=3.07 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \quad \theta=12^\circ, \\ a=24.7 \text{ cm}, \quad a/l=5.49, \quad R_{e1}=27.8 \end{array} \right]$$

(a) $T=0 \text{ s}$, (b) $T=0.5 \text{ min}$, (c) $T=2 \text{ min}$,
(d) $T=6 \text{ min}$, (e) $T=7.5 \text{ min}$, (f) $T=925 \text{ min}$

化されることから、特に沖側に見られる時計回りの流れを「定在型バックウォッシュ・ボルテックス (standing backwash vortex)」と呼ぶことにする。ここで、非定常的に剝離するバックウォッシュ・ボルテックスを新たに「剝離型バックウォッシュ・ボルテックス (separated backwash vortex)」と呼ぶことを提案する。図3(f)は、定在型バックウォッシュ・ボルテックスを拡大して示したものである。汀線付近に見られる反時計回りの渦流れは、くさび領域に形成されるモファット渦³⁾に類似したものと考えられる。この渦流れは R_{e1} の値が増すにつれ、汀線に向かって縮退していく傾向がある。以下では、この流れよりむしろ、その沖側に形成される定在型バックウォッシュ・ボルテックスに着目して議論する。

図4(a), (b) および (c) は、 $\theta=12^\circ$ で R_{e1} がそれぞれ 1.0×10^2 , 1.0×10^3 および 3.4×10^3 における流れのパターンを、汀線が最下点に達したとき撮影したものである。 R_{e1} の値が大きくなるにつれ a/l の値は小さくなることがわかる。前述したように、汀線付近に誘起される反時計回りの渦流れは

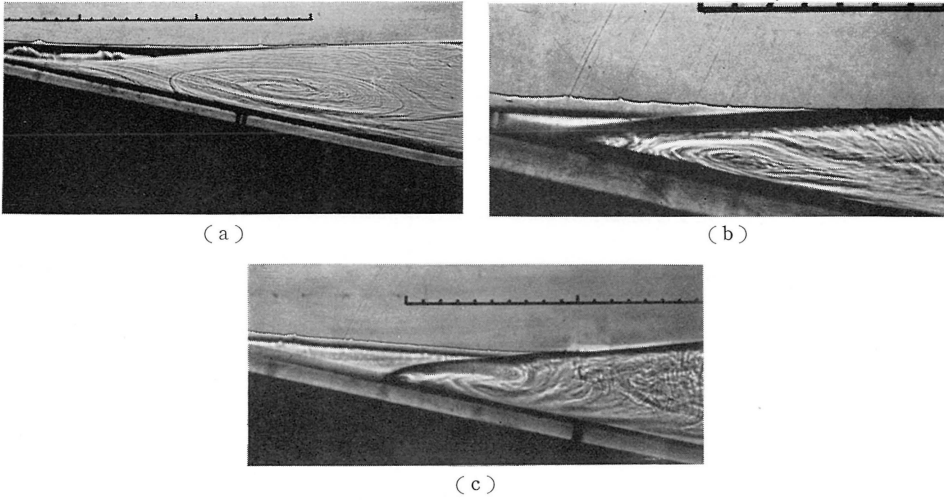


図4 Re_1 の値の変化に対する流れのパターンの変化
(スケールの目盛 1.0 cm)

- (a) $[l=8.5 \text{ cm}, \omega=4.22 \text{ s}^{-1}, \nu=3.00 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \theta=12^\circ]$
 $[a=27.6 \text{ cm}, a/l=3.25, Re_1=1.0 \times 10^2]$
- (b) $[l=8.0 \text{ cm}, \omega=4.19 \text{ s}^{-1}, \nu=0.266 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \theta=12^\circ]$
 $[a=7.7 \text{ cm}, a/l=0.963, Re_1=1.0 \times 10^3]$
- (c) $[l=14.9 \text{ cm}, \omega=3.71 \text{ s}^{-1}, \nu=0.242 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \theta=12^\circ]$
 $[a=11.2 \text{ cm}, a/l=0.752, Re_1=3.4 \times 10^3]$

Re_1 の値が大きくなるにつれ縮退し、図4(c)ではすでに消滅している。図4(a)および(b)で示した流れは、定在型バックウォッシュ・ボルテックスであるが、図4(c)で示した流れのパターンは波が遡上する過程においては観察されず、従って流れは剥離型バックウォッシュ・ボルテックスであると考えられる。 $\theta=12^\circ$ で $Re_1=2.0 \times 10^3$ 付近において直接投影法や鋸ぐず法によって詳しく可視化した流れのパターンから、定在型バックウォッシュ・ボルテックスは、急激なパターン変化を示すことなく剥離型バックウォッシュ・ボルテックスに遷移することがわかった。

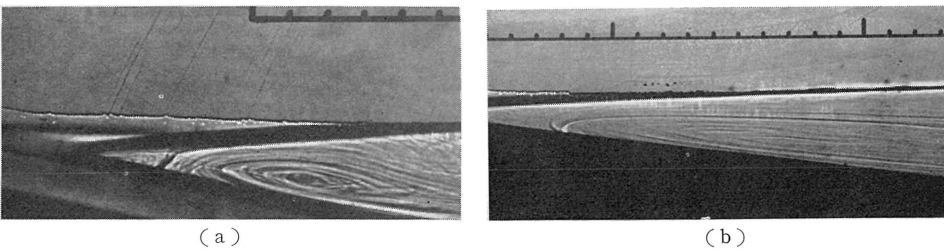


図5 θ の変化に伴う a/l の変化 (スケールの目盛 1.0 cm)

- (a) $[l=6.5 \text{ cm}, \omega=4.19 \text{ s}^{-1}, \nu=0.344 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \theta=12^\circ]$
 $[a=7.5 \text{ cm}, a/l=1.15, Re_1=520]$
- (b) $[l=8.2 \text{ cm}, \omega=3.14 \text{ s}^{-1}, \nu=0.388 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \theta=8^\circ]$
 $[a=21.0 \text{ cm}, a/l=2.56, Re_1=540]$

図5(a) および (b) では、それぞれ $R_{e1}=520$, $\theta=12^\circ$ と $R_{e1}=540$, $\theta=8^\circ$ の条件下で形成された定在型バックウォッシュ・ボルテックスを示している。 R_{e1} がほぼ同じ値においては、 θ の値が小さい方が a/l の値は大きくなることわかる。

3. a/l の測定結果とその次元解析的考察

汀線付近の流れの場を規定する基礎方程式として、非圧縮粘性流体に対する渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (3)$$

を考える。ここで、 $\mathbf{u}$ は速度ベクトルで、 $\boldsymbol{\Omega}$ は $\text{rot } \mathbf{u}$ で定義される渦度ベクトルである。もし流体の運動が非常に遅く、定在型バックウォッシュ・ボルテックスが形成されているような場合、流れの場は

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \sim \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (4)$$

で示されるように非定常項と粘性項とのつり合いで記述できるであろう。時間スケールとして $1/\omega$ を用いると渦のスケール a は、

$$a \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (5)$$

で表わされる。ただし、 $\nabla^2 \sim 1/a^2$ と評価している。結局、非線形性に比べ粘性が支配的である流れの場では、(5) 式の両辺を代表長さ l で割って一つの関係式

$$\frac{a}{l} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega l^2}} = R_{e1}^{-1/2} \quad (6)$$

を得る。

次に、流速が非常に大きくなって剥離型バックウォッシュ・ボルテックスが形成されるような場合、粘性項は無視できて

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \sim \text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (7)$$

で示されるように流れの場は、非定常項と非線形項のつり合いで記述できるであろう。そのときの速度スケールとして $l\omega$ を用いると、渦のスケール a は

$$a \sim l \quad (8)$$

となり、遡上長さの程度となるであろう。結局、粘性に比べ非線形性が支配的である流れの場では、

$$\frac{a}{l} \sim 1 = R_{e1}^0 \quad (9)$$

となる。

図6は、 $\theta=8^\circ$, 12° および 32° において得た a/l の測定結果を R_{e1} に対してプロットしたものである。各 θ ごとに、 R_{e1} の値が小さい所では a/l は(6)式で示すように $R_{e1}^{-1/2}$ に比例しており、 R_{e1} が大きい所では(9)式で示すように一定値をとる。実験結果から、その一定値はおよそ0.7であること

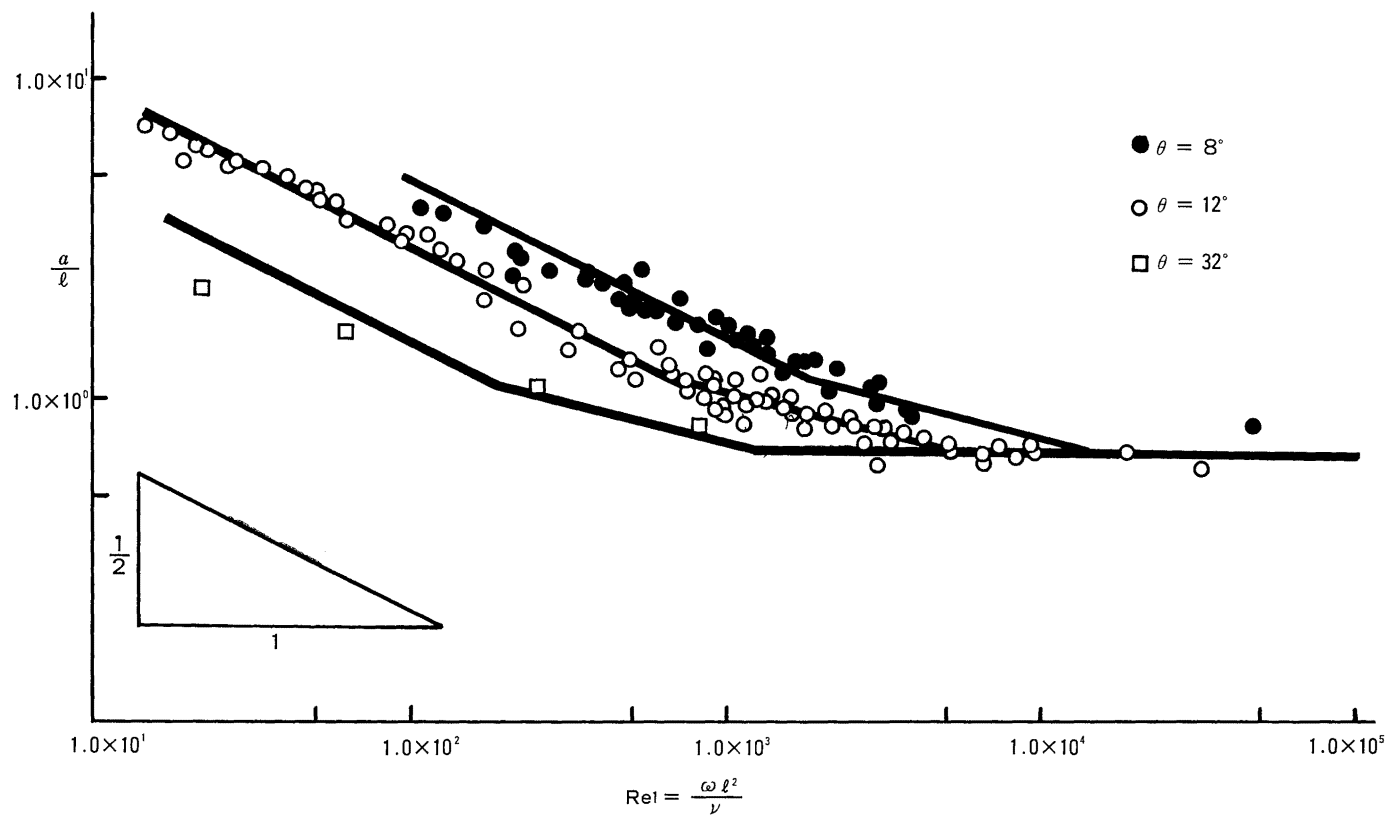


図6 a/l と Re_1 と の 関 係

がわかる．特に， $\theta=12^\circ$ における実験結果によると $700 \leq R_{e1} \leq 6000$ の範囲は，渦のスケールが流れの非定常性，非線形性および粘性のつり合いから決定される領域で，定在型バックウォッシュ・ボルテックスへの遷移領域と考えられる．この遷移領域では， a/l はほぼ $R_{e1}^{1/4}$ に比例することがわかる，

定在型バックウォッシュ・ボルテックスが形成されている範囲では，ある R_{e1} の値に対して θ が小さい程 a/l の値は大きくなる傾向がある．そこで種々の θ における実験結果を統一的に議論するために， θ を考慮した無次元パラメータを導入する．(4) 式を二次元極座標系 (r, ϕ) で書き下すと

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} \sim \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2} \right\} \quad (10)$$

となる．上式を代表スケールで書き表わすと

$$\omega \sim \nu \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2 \theta^2} \right\} \quad (11)$$

となり， $\theta \ll 1$ であるとき無次元化された流れの特性量 a/l は

$$\frac{a}{l} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega l^2 \theta^2}} = R_{e2}^{-1/2} \quad (12)$$

と評価できる．ここで， $R_{e2} = \omega l^2 \theta^2 / \nu$ で， θ の単位はラジアンである．

図6で示した実験結果を，横軸に R_{e2} をとってプロットしなおしたものが図7である．グラフから $\theta \ll 1$ の場合，種々の θ の値における実験のデータは， a/l の値を R_{e2} に対してプロットすることによって流れのスケールをほぼ統一的に記述できることがわかる．これによると， $R_{e2} \leq 30$ では非定常性と粘性のつり合いで記述できる定在型バックウォッシュ・ボルテックスが形成され， $R_{e2} \geq 200$ では非定常性と非線形性のつり合いで記述される剝離型バックウォッシュ・ボルテックスが形成されることがわかる．また，可視化の実験結果によると定在型から剝離型へ遷移する臨界値は， $\theta=12^\circ$ において $R_{e1} \doteq 2.0 \times 10^3$ であることから種々の θ の値における流れに対して，臨界値は $R_{e2} \doteq 90$ であると考えられる．

以上のように，流れの特性量 a/l は R_{e2} が小さい時 $R_{e2}^{-1/2}$ に比例し， R_{e2} が大きい時一定値をとることから，その形を

$$\frac{a}{l} = A + B \cdot R_{e2}^{-1/2} \quad (13)$$

ここに， A, B は任意定数，

と仮定し，2点 $\left(\frac{a}{l}=6.0, R_{e2}=1.0\right)$ と $\left(\frac{a}{l}=0.7, R_{e2}=1.0 \times 10^3\right)$ を通るように A と B を決めると，

$$\frac{a}{l} = 0.53 + 5.47 \cdot R_{e2}^{-1/2} \quad (14)$$

となる．この式は，定在型および剝離型バックウォッシュ・ボルテックスの中心位置を経験的に定めるものである．図8は，(14) 式に基づいて描いた曲線と実験結果を示したものである．

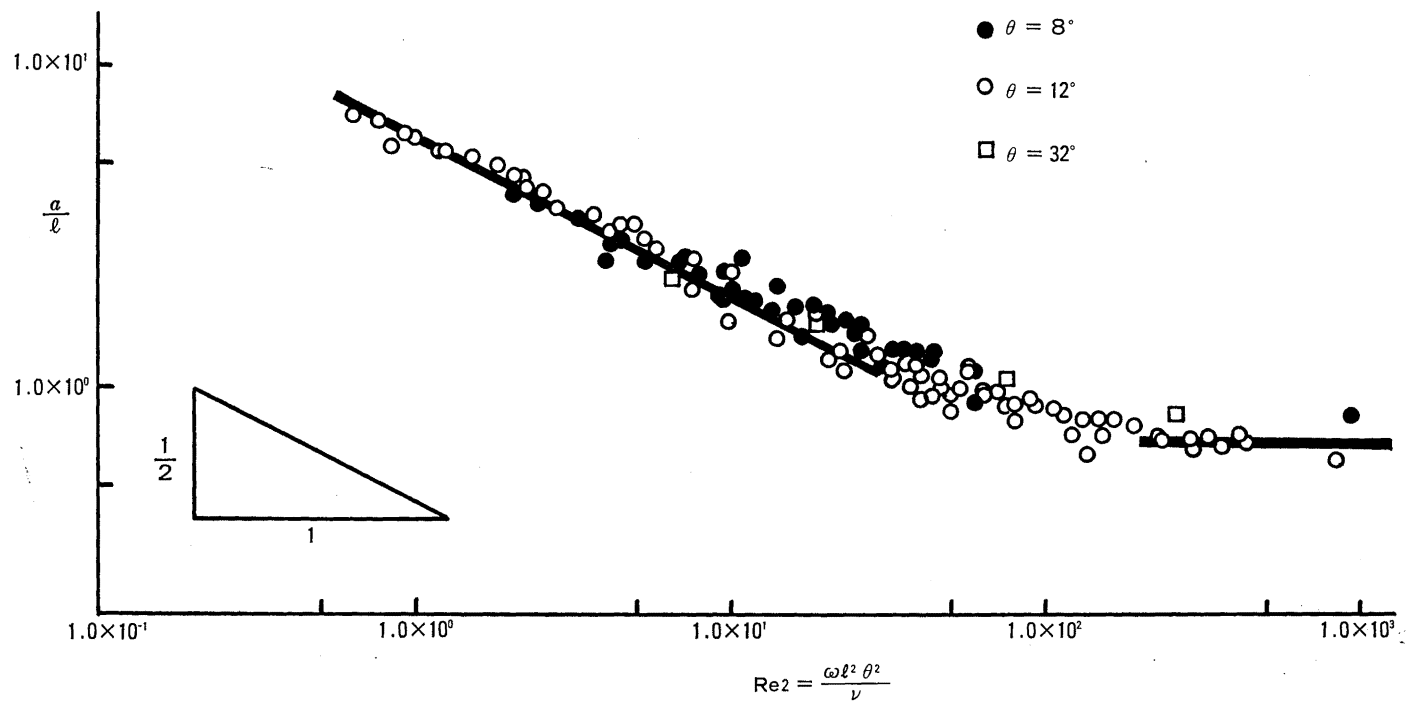


図7 a/l と Re_2 と の 関 係

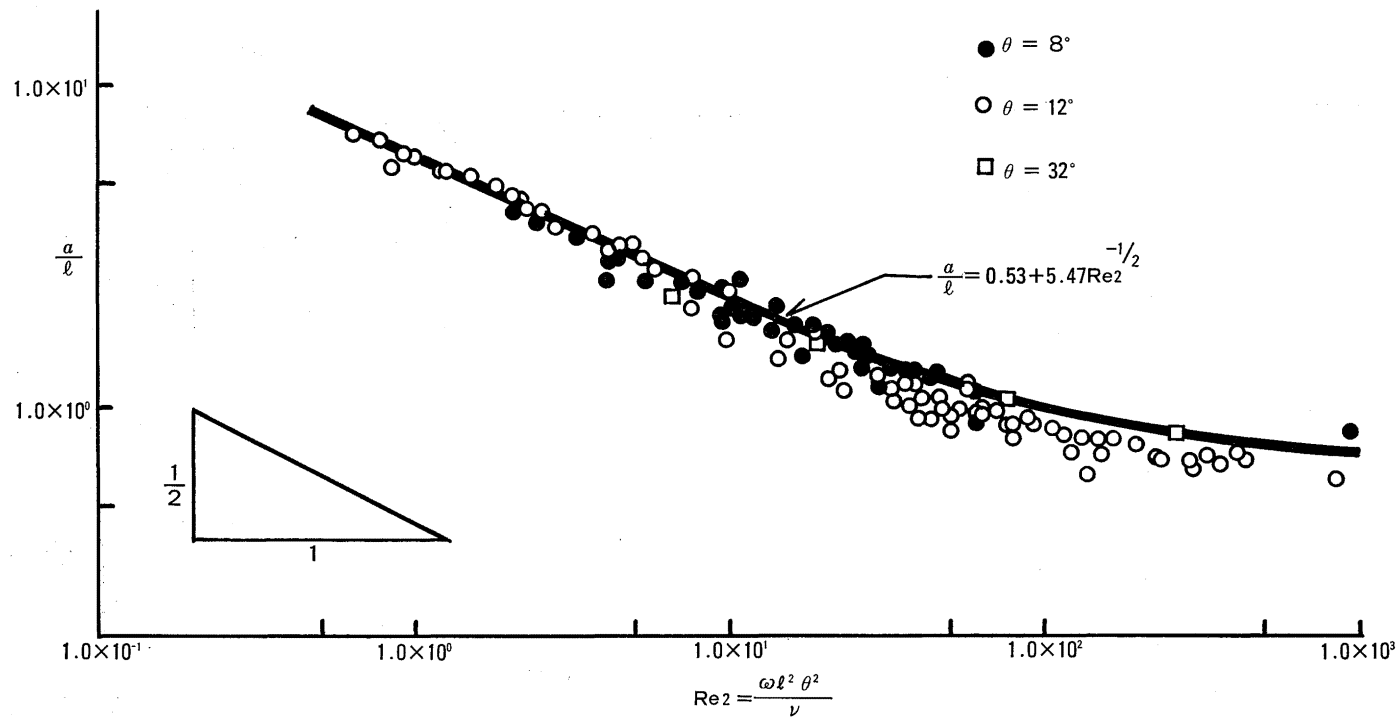


図8 (14)式と実験結果との比較

4. 計算モデルと計算結果

バックウォッシュ・ボルテックスの特性量 a は、波の波長や波高を直接的に導入することなく、 L , ω , ν および θ を用いて統一的に説明することができた。これは、波の諸特性が L に繰り込まれているからである。ここでは、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの特性をシュミレートすることのできる一つの計算モデルを提案し、バックウォッシュ・ボルテックスの形成に本質的な役割を果すものが何であるかを明らかにする。

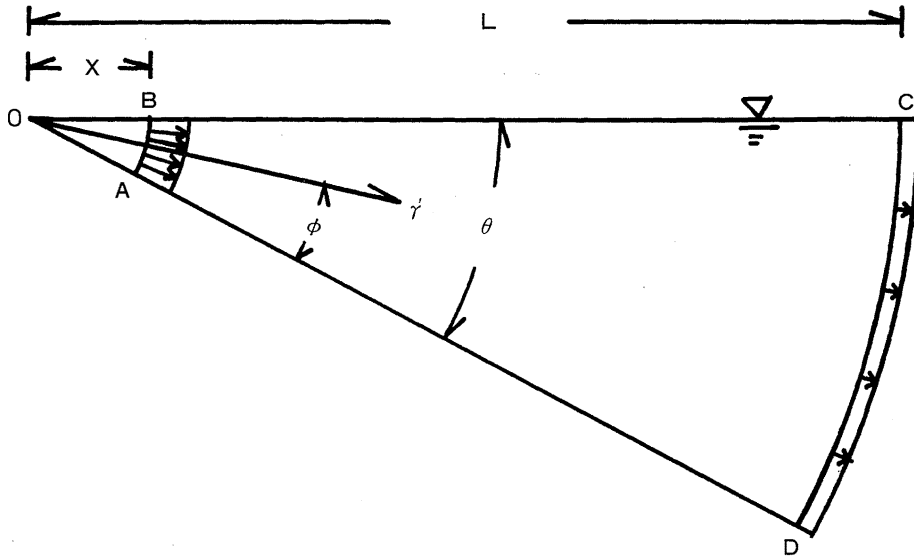


図9 計算モデルにおける流れの場と座標系

図9で示される半径 L , 中心角 θ の扇形 OCD を考える。座標系は、図2で示したように点 O を極とし、座標軸 r' を動径、 ϕ を OD から測られる偏角とする。 $r' = x$ における弧を AB とする。流れの場として $ABCD$ を考える。いま、弧 AB から流量 $q(t')$ の流体を ϕ 方向に一様な流速で r' 方向に調和振動的に出し入れすると考える。ここで t' は時間を表わす。弧 AB から流体が流入すれば、当然弧 CD から同じ流量の流体が流出しなければならない。そこで弧 CD においても、弧 AB における流体運動の位相と同じ位相で、 ϕ 方向に一様な流速で r' 方向に流体が流出入すると考える。 AD は固体壁面で、 BC は水面変位を考慮しない自由水面とする。流量 $q(t')$ は

$$q(t') = q_0 \cos \omega t' \quad (15)$$

で表わされるとする。ここで、 q_0 は一定流量、 ω は角振動数である。

r' 方向の流速を $\hat{v}_{r'}$ 、として ϕ 方向の流速を $\hat{v}_{\phi}$ 、として、流れ関数 $\hat{\psi}$ を

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_{r'} &= \frac{1}{r'} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \phi} \\ \hat{v}_{\phi} &= -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r'} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

のように定義する．基礎方程式として極座標系における二次元の渦度方程式をこの $\hat{\psi}$ を用いて表わすと，

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\hat{r}^2 \hat{\psi}) + \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial r'}(\hat{r}^2 \hat{\psi}) - \frac{1}{r'} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r'} \frac{\partial}{\partial \phi}(\hat{r}^2 \hat{\psi}) \right] = \nu \hat{r}^4 \hat{\psi} \quad (17)$$

となる．ここで， $\hat{r}^2$ は $\hat{r}^2 = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ で表わされる微分作用素である．

境界条件は，

$$\left. \begin{aligned} r' = x : & \begin{cases} \hat{v}_{r'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \phi} = -\frac{q_0}{\theta x} \cos \omega t' \\ \hat{v}_\phi = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r'} = 0 \end{cases} \\ r' = L : & \begin{cases} \hat{v}_{r'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \phi} = -\frac{q_0}{\theta L} \cos \omega t' \\ \hat{v}_\phi = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r'} = 0 \end{cases} \\ \phi = 0 : & \begin{cases} \hat{v}_{r'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \phi} = 0 \\ \hat{v}_\phi = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r'} = 0 \end{cases} \\ \phi = \theta : & \begin{cases} \hat{v}_\phi = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r'} = 0 \\ \hat{\tau} = \mu \left\{ \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r'} \right\} = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

で与えられる．ここで， $\hat{\tau}$ はせん断応力， μ は分子粘性係数である．

無次元の諸量

$$t = \omega t', \quad r = \frac{r'}{l_m}, \quad \psi = \frac{\hat{\psi}}{q_0}, \quad \tau = \frac{\hat{\tau}}{\mu q_0}, \quad \varepsilon = \frac{q_0}{\omega l_m^2}, \quad Re_{lm} = \frac{\omega l_m^2}{\nu} \quad (19)$$

を導入する． l_m は逆上長さに対応する長さスケールである．

(19) 式を用いて (17), (18) 式を無次元化し，さらに数値計算を行う上で，流れの場の弧 AB 付近は十分小さなメッシュで区切り，密に計算する必要があるため，座標変換

$$\phi = \phi, \quad \xi = \ln r \quad (20)$$

を行う．ここで，渦度 Ω を

$$\Omega = -e^{-2\xi} \Delta \psi \quad (21)$$

ここに， $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ ，

で定義し，(17)，および (18) 式を書きかえると

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \varepsilon e^{-2\varepsilon} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \right] = \frac{1}{R_{e1m}} e^{-2\varepsilon} \Delta \Omega, \quad (22)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \xi = \ln \frac{x}{l_m} : & \begin{cases} \psi = \frac{\phi}{\theta} \cos t \\ \Omega = -e^{-2\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \end{cases} \\ \xi = \ln \frac{L}{l_m} : & \begin{cases} \psi = \frac{\phi}{\theta} \cos t \\ \Omega = 0 \end{cases} \\ \phi = 0 : & \begin{cases} \psi = 0 \\ \Omega = -e^{-2\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \end{cases} \\ \phi = \theta : & \begin{cases} \psi = \cos t \\ \Omega = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる。数値計算における手法は、付録に詳しく示されている。無次元量 ε および x/l_m は、それぞれ 0.1 と 2.0 に固定して計算を行った。また、無次元パラメータ R_{e1m} の値は 1 から 100 の間において

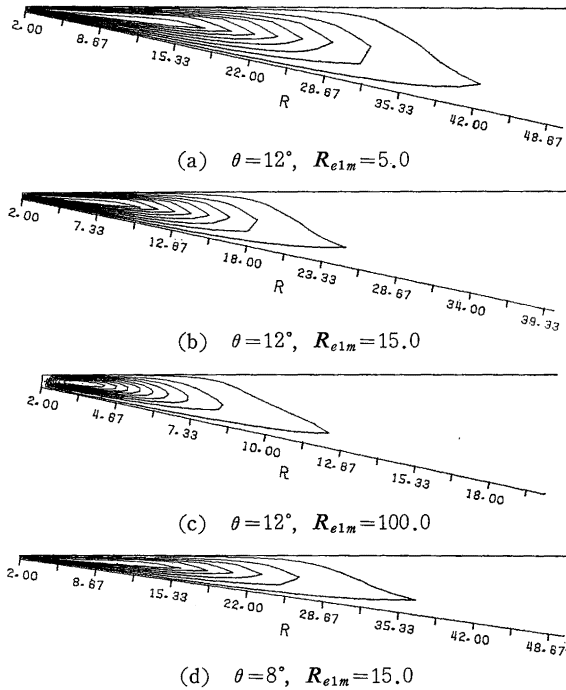


図 10 モデル計算において得られた定常二次流れ

計算を行った。

次に計算結果について述べる。流線模様で表わされた定常二次流れの代表的なパターンを図 10 (a) ~ (d) に示す。図 10 (a), (b) および (c) は、それぞれ $\theta=12^\circ$ における $Re_{1m}=5.0, 15.0$ および 100 の流れのパターンを示している。流れの向きは時計回りで、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの向きと同じである。 θ の値が一定の時、 Re_{1m} の値が増すにつれて極から流れの中心までの距離は短くなっている。図 10 (d) は、 $\theta=8^\circ$, $Re_{1m}=15.0$ における計算結果である。図 10 (b) と (d) との比較から、 Re_{1m} の値が同じ時 θ の値が大きい方が流れの動径方向の大きさは小さいことがわかる。

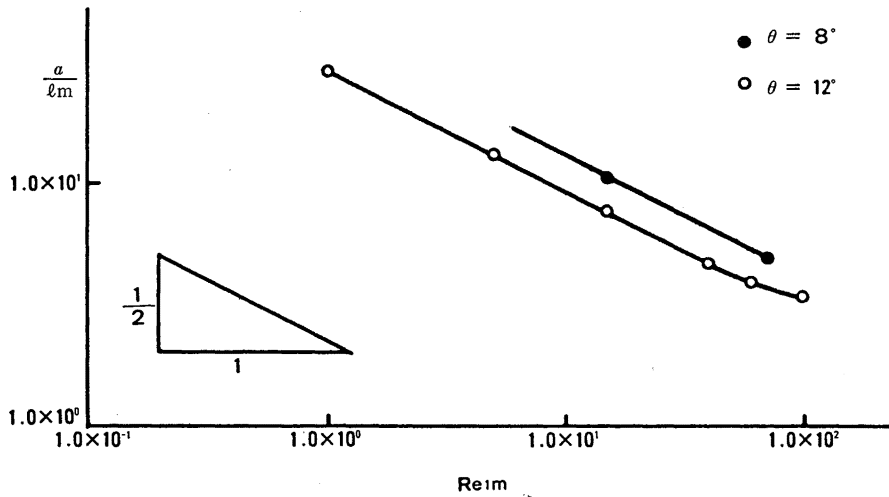


図 11 モデル計算によって得られた a/l_m と Re_{1m} との関係

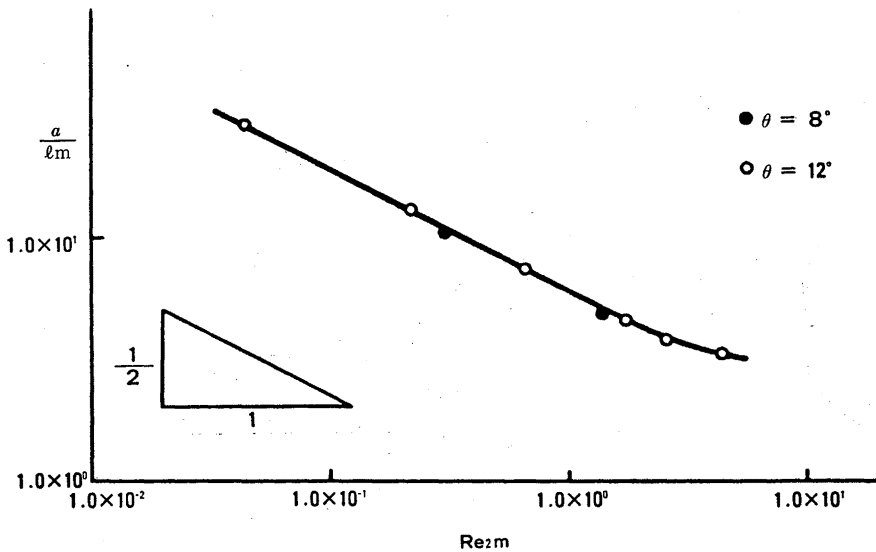


図 12 モデル計算によって得られた a/l_m と Re_{2m} との関係

このような二次流れの性質は、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの性質と類似している。 $1 \leq a/l_m \leq 100$ で行った計算によって得た a/l_m と R_{e1m} との関係を図 11 に示す。 $\theta=12^\circ$ の場合、 $R_{e1m} > 50$ では a/l_m は $R_{e1m}^{-1/2}$ に比例することがわかる。さらに、 $R_{e2m}(=R_{e1m} \cdot \theta^2)$ の値に対して a/l_m の値をプロットしたものを図 12 に示す。 $\theta=8^\circ$ と 12° における a/l_m の値を R_{e2m} に対してプロットすることによって、 a/l_m の特性を同じ曲線で議論することができる。

以上の結果から、この計算モデルによって定在型バックウォッシュ・ボルテックスの特性をシュミレートできることが明らかである。このモデルにおいて、BC は自由水面としているが、水面変位を考慮しておらず、弧 AB と CD から流体が調和振動的に流出入するだけである。それにもかかわらず、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの特性をシュミレートできることから、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの形成は、波の遡上、流下運動に起因していることを示唆している。

5. 結 言

本研究では、波を斜面上に入射させた時、汀線付近に形成される渦流れの特性を調べた。明らかとなったことは、次の通りである。

(1) 高粘性流体を作業流体として用いた実験において、定常的に存在する「定在型バックウォッシュ・ボルテックス」と呼ばれる流れが生ずることを見出した。定在型バックウォッシュ・ボルテックスと剝離型バックウォッシュ・ボルテックスの流れの向きは同じであり、前者から後者へのパターンの遷移は、ゆるやかに連続的に起る。

(2) バックウォッシュ・ボルテックスの特性量 a/l は、定在型の場合 $R_{e1}^{-1/2}$ に比例し、剝離型の場合一定値となることが次元解析によって示され、その解析結果は、種々の θ における実験結果を説明することができる。

(3) $\theta \ll 1$ の場合、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの特性量 a/l を、 θ を考慮した無次元量 R_{e2} に対してプロットすることによって、統一的に議論することができる。 $R_{e2} \leq 30$ では定在型バックウォッシュ・ボルテックスが、 $R_{e2} \geq 200$ では剝離型バックウォッシュ・ボルテックスが形成される。 $30 \leq R_{e2} < 200$ では、定在型から剝離型バックウォッシュ・ボルテックスに遷移する領域で、流れの可視化実験によって調べた結果、パターンが遷移する臨界値は $R_{e2} \approx 90$ である。

(4) 定在型から剝離型に到る広い範囲において、 a/l と R_{e2} を近似的に関係づける経験式は (14) 式

$$\frac{a}{l} = 0.53 + 5.47 \cdot R_{e2}^{-1/2}$$

である。

(5) 定在型バックウォッシュ・ボルテックスの特性は、図 9 で示されるモデル、つまり扇形状の流体の場の角から流体を調和振動的に一樣に流入させるモデルで説明できる。このことから、定在型バックウォッシュ・ボルテックスの形成は、斜面上での汀線の運動に起因する。

謝 辞

本研究を行うにあたり、有益な御助言をいただきました増田章助手に感謝致します。計算においては、

九州大学応用力学研究所の計算機 MELCOM-COSMO 900 を用いた。

本研究の一部は、文部省科学研究費の補助により行われたものである。

参 考 文 献

- 1) Matsunaga, N. and Honji, H.: The backwash vortex, J. Fluid Mechanics **99** (1980) 813-815.
- 2) Matsunaga, N. and Honji, H.: Visualization of standing vortices behind a cylinder in glycerin-water solutions, Rev. Sci. Instrum **51** (1980) 314-356.
- 3) Moffatt, H. K.: Viscous and resistive eddies near a sharp, J. Fluid Mechanics **18** (1964) 1.

(昭和 57 年 3 月 24 日 受理)

付 録

(22) 式を差分表示するにあたり、空間微分に関しては中央差分、時間微分に関しては前進差分を用非線形項と粘性項を現時刻とその次の時刻の値の平均を用いて評価する陰的解法を用いる。その結果

(22) 式は、

$$\begin{aligned}
 Q_{i,j}^{(n+1,k_1+1)} = & \frac{1}{\left[1 + \frac{Dt}{R_{e1m}} e^{-2(i-1) \Delta \xi} \left\{ \frac{1}{(\Delta \xi)^2} + \frac{1}{(\Delta \phi)^2} \right\} \right]} \left[\left[1 - \frac{Dt}{R_{e1m}} e^{-2(i-1) \Delta \xi} \left\{ \frac{1}{(\Delta \xi)^2} + \frac{1}{(\Delta \phi)^2} \right\} \right] Q_{i,j}^{(n)} \right. \\
 & - \frac{\varepsilon \cdot Dt \cdot e^{-2(i-1) \Delta \xi}}{16 \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \phi} \{ \psi_{i,j+1}^{(n+1,k_1)} - \psi_{i,j-1}^{(n+1,k_1+1)} + \psi_{i,j+1}^{(n)} - \psi_{i,j-1}^{(n)} \} \{ Q_{i+1,j}^{(n+1,k_1)} \\
 & - Q_{i-1,j}^{(n+1,k_1+1)} + Q_{i+1,j}^{(n)} - Q_{i-1,j}^{(n)} \} - \{ \psi_{i+1,j}^{(n+1,k_1)} - \psi_{i-1,j}^{(n+1,k_1+1)} + \psi_{i+1,j}^{(n)} \\
 & - \psi_{i-1,j}^{(n)} \} \{ Q_{i,j+1}^{(n+1,k_1)} - Q_{i,j-1}^{(n+1,k_1+1)} + Q_{i,j+1}^{(n)} - Q_{i,j-1}^{(n)} \} \\
 & + \frac{Dt \cdot e^{-2(i-1) \Delta \xi}}{2 \cdot R_{e1m} \cdot (\Delta \xi)^2} [Q_{i+1,j}^{(n+1,k_1)} + Q_{i-1,j}^{(n+1,k_1+1)} + Q_{i+1,j}^{(n)} + Q_{i-1,j}^{(n)}] \\
 & \left. + \frac{Dt \cdot e^{-2(i-1) \Delta \xi}}{2 \cdot R_{e1m} \cdot (\Delta \phi)^2} [Q_{i,j+1}^{(n+1,k_1)} + Q_{i,j-1}^{(n+1,k_1+1)} + Q_{i,j+1}^{(n)} + Q_{i,j-1}^{(n)}] \right] \quad (24)
 \end{aligned}$$

となる。ここで空間差分の間隔として $\Delta \xi$ と $\Delta \phi$ が、時間差分の間隔として Dt が用いられている。添字 (i, j) は、 $\xi = (i-1) \Delta \xi$ 、および $\phi = (j-1) \cdot \Delta \phi$ の位置にある格子点を表わすもので、 n は無次元振動周期 2π を Dt によって分割したときの n 番目の時刻を表わす。添字 k_1 は、流れの場の渦度を得るために行う繰り返し収束計算において、計算が k_1 回繰り返されたことを示す。ポアソン方程式 (21) を差分表示し、繰り返し収束計算を短時間で行うため S・O・R 法を用いると、(21) 式は

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j}^{(n+1,k_1+1,k_2+1)} = & \psi_{i,i}^{(n+1,k_1+1,k_2)} + \frac{W}{2 \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta \phi} \right)^2 \right\}} \left[\psi_{i+1,j}^{(n+1,k_1+1,k_2)} + \psi_{i-1,j}^{(n+1,k_1+1,k_2+1)} \right. \\
 & + \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta \phi} \right)^2 \{ \psi_{i,j+1}^{(n+1,k_1+1,k_2)} + \psi_{i,j-1}^{(n+1,k_1+1,k_2+1)} \} - 2 \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta \phi} \right)^2 \right\} \psi_{i,j}^{(n+1,k_1+1,k_2)} \\
 & \left. + (\Delta \xi)^2 e^{2(i-1) \Delta \xi} Q_{i,j}^{(n+1,k_1+1)} \right] \quad (25)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 w は収束加速因子で本計算では1.8という値を用いた。添字 k_2 は、流れの場合全体の流れ関数の値がある一定値に収束するまで行う収束計算の計算回数を表わす。境界条件 (23) 式を差分表示すると

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1,j} &= \frac{(j-1)D\phi}{\theta} \cdot \cos n \cdot \Delta t \\ \psi_{M,j} &= \frac{(j-1)D\phi}{\theta} \cdot \cos n \cdot \Delta t \\ \psi_{i,1} &= 0 \\ \psi_{i,N} &= \cos n \cdot \Delta t \\ Q_{1,j} &= -\left(\frac{l_m}{x}\right)^2 \frac{8\psi_{2,j} - \psi_{3,j} - 7\psi_{1,j}}{2(D\xi)^2} \\ Q_{i,1} &= -e^{-2(i-1)D\xi} \frac{8\psi_{i,2} - \psi_{i,3}}{2 \cdot (D\phi)^2} \\ Q_{M,j} &= Q_{i,N} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。ここで、 (M, j) は弧 CD 上の格子点を、 (i, N) は BC 上の格子点を表わす、初期条件としては、 $n=0$ における境界条件を用いる。

(24) 式を計算するにあたり、数値計算上の安定条件から、空間差分間隔を決定した後、時間差分間隔として

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &< R_{elm} \frac{(D\xi \cdot D\phi)^2}{(D\xi)^2 + (D\phi)^2} \\ \Delta t &< \frac{D\xi \cdot D\phi}{\varepsilon \cdot \text{Max}_{\substack{n=0 \\ i=1, M \\ j=1, N}} |\psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j}|} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

を満たすものを用いた。渦度および流れ関数の値の収束判定条件として、

$$\left. \begin{aligned} \text{Max}_{\substack{i=1, M \\ j=1, N}} \frac{|\Omega_{i,j}^{(n+1, k_1+1)} - \Omega_{i,j}^{(n+1, k_1)}|}{\text{Max}_{\substack{i=1, M \\ j=1, N}} |\Omega_{i,j}^{(n+1, k_1+1)}|} &< 10^{-4} \\ \text{Max}_{\substack{i=1, M \\ j=1, N}} \frac{|\psi_{i,j}^{(n+1, k_1+1, k_2+1)} - \psi_{i,j}^{(n+1, k_1+1, k_2)}|}{\text{Max}_{\substack{i=1, M \\ j=1, N}} |\psi_{i,j}^{(n+1, k_1+1, k_2+1)}|} &< 10^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

を用いた。収束条件を満たした各格子点における流れ関数の値を1周期にわたって平均した。

$$\tilde{\psi}_{i,j} = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^P \psi_{i,j}^{(n)}$$

を求め、得られた流れの流線模様が前の周期のものとほとんど変わらなくなるまで計算を行うことによって、定常に達した二次流れ関数の値を得る．記号 P は、1 周期における時間ステップ数を表わす．