

非定常流中の物体に働く流体力及びその無次元係数 ： 付加質量係数と質量係数について

田才, 福造
九州大学応用力学研究所 : 教授

<https://doi.org/10.15017/4743628>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 54, pp.107-123, 1981-02. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



寄 書

非定常流中の物体に働く流体力及びその無次元係数
——付加質量係数と質量係数——について

田 才 福 造*

概 要

無限流体中の物体に働く非定常流体力と、物体の寸法に比べて波長が十分長い規則波中の浮体、没水体、固定柱状体等に働く波力との関係について記述し、物体が流体中で非定常運動するときの付加質量係数と海岸工学の分野でよく用いられる質量係数の関係を示したものである。

Key words: Unsteady hydrodynamic force, Added mass, Inertia coefficient

1. 緒 言

浅海域にある杭に作用する波力については Morison et al.¹⁾ の式があり、この式は杭のみならず波長に比べて直径の小さな柱状体に働く波力の推定によく用いられている。すなわち、Morison によれば、図1で杭の断面に働く y 方向の2次元流体力(波力)は次式で与えられる。

$$F_y = \rho \frac{\pi D^2}{4} \cdot C_M \cdot \ddot{\eta}_w + \frac{1}{2} \rho C_D \cdot D \dot{\eta}_w |\dot{\eta}_w| \quad (1)$$

但し、 D =杭の直径、 ρ =流体の密度、 $\dot{\eta}_w$ =考えている断面中心における y 方向の波粒子速度、 $\ddot{\eta}_w = \frac{d\dot{\eta}_w}{dt}$ =加速度、 C_M =質量係数 (inertia coefficient)、 C_D =抗力係数 (drag coefficient) である。

(1) 式の右辺第1項が質量力、第2項が抗力である。

物体に作用する波力には $\dot{\eta}_w$ に比例する成分も存在するので、一般的には

$$F_y = F_y(F.K.) + F_y(\ddot{\eta}_w) + F_y(\dot{\eta}_w) + F_y(\dot{\eta}_w |\dot{\eta}_w|) \quad (2)$$

とかくことができる。

(2) 式中の $F_y(F.K.)$ は造船学では Froude-Kriloff の力と呼ばれるもので、波の中の変動圧力そのものに基因する力である。 $F_y(\ddot{\eta}_w)$ 、 $F_y(\dot{\eta}_w)$ は夫々 $\ddot{\eta}_w$ 及び $\dot{\eta}_w$ に比例する力で、 $F_y(\dot{\eta}_w |\dot{\eta}_w|)$ は速度の2乗に比例する抗力である。

$F_y(F.K.)$ と $F_y(\ddot{\eta}_w)$ は同位相であるので、これらは (1) 式のように $\ddot{\eta}_w$ に比例する力としてまと

* 九州大学教授、応用力学研究所

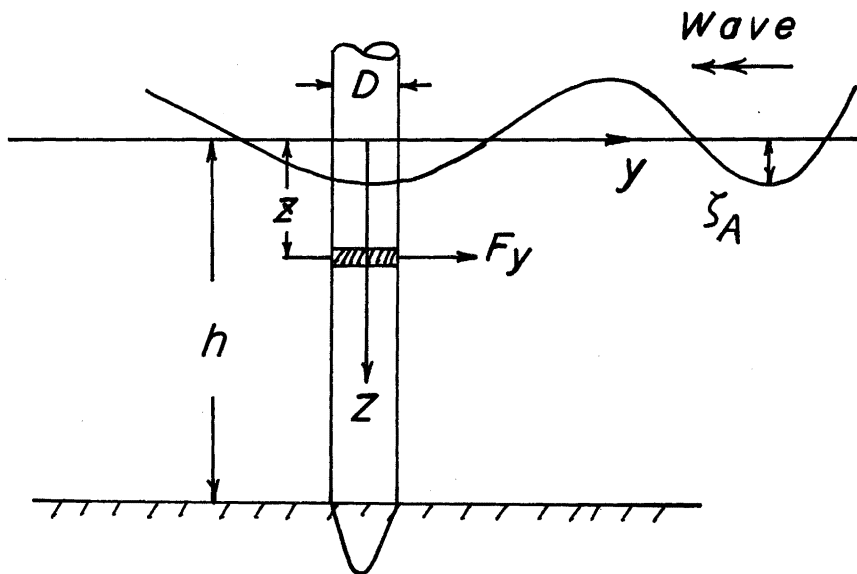


図 1

めることができる。また $\dot{\eta}_w$ に比例する力 $F_y(\dot{\eta}_w)$ は杭の直径 D に比べて波長が十分長いときは無視できる大きさであるので、Morison の式ではこの力は省略されている。したがってこの場合は、ポテンシアル流れの流体として杭に働く波力は慣性力（土木では質量力と呼ばれている）のみとなる。すなわち、流速が変動する無限流体中に拘束された物体に働く流体力と同様の性質である。

本稿では、Morison の波力の式が適用されうる状態（物体の寸法に比べて波長が十分長い場合）における質量係数 C_M が付加質量係数と、どのような関係にあるかを示す。さらに、無限流体中の物体に働く非定常流体力を媒介として、没水体或は浅水域における C_M の値について述べることにする。

2. 加速度を持つ無限流体中の物体に働く流体力

2.1 物体が拘束されている場合

図2に示すように円柱（断面の半径は a ）が無限流体中に拘束されており、一般流の流速 U が時間的に変動している場合を考える。

x 方向に U の速度を持つ一般流中に円柱が拘束されているときの流体の複素速度ポテンシアル w は次式で与えられる（例えば文献 (2)）。

$$w = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (3)$$

但し $z = x + iy$ 。

流体内部における圧力 p は

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho q^2 \quad (4)$$

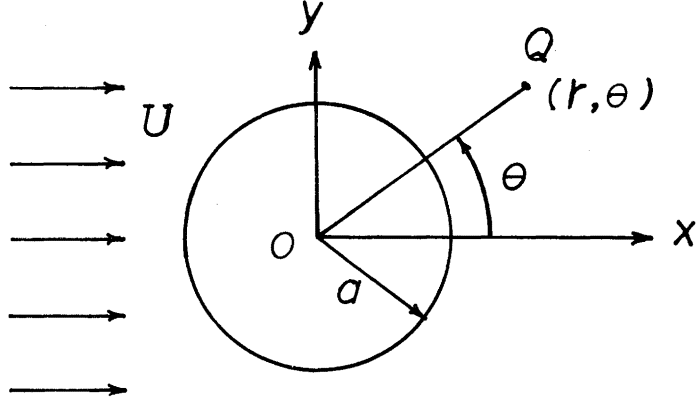


図 2

但し ϕ は速度ポテンシアルで, q は流体の速度である. (3) より

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{U} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (5)$$

ここで $z = re^{i\theta}$ とおけば, (5) より

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \dot{U} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (6)$$

$$\text{一方, } dw/dz = u - iv, q^2 = u^2 + v^2 = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2$$

$$dw/dz = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta + i \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta \right)$$

$$\therefore q^2 = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = U^2 \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{a^4}{r^4} \right)$$

故に

$$p = -\rho \dot{U} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{a^4}{r^4} \right) \quad (7)$$

円柱表面では

$$p(r=a) = -2a\rho\dot{U} \cos \theta - \rho U^2 (1 - \cos 2\theta) \quad (8)$$

(8) 式を用いると, 円柱に働く x 方向の流体力 F_x は次式で与えられる.

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p(r=a) \cos \theta \cdot a d\theta = 2\rho a^2 \dot{U} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot d\theta = 2\pi\rho a^2 \dot{U} \quad (9)$$

さて, 円柱が静止流体中を $-x$ 方向に速度 U で動くときの速度ポテンシアル ϕ は,

$$\phi = U \frac{a^2}{r} \cos \theta \quad (10)$$

で与えられる.

このときの w は (3) 式の第 2 項 $U \frac{a^2}{z}$ である. U が時間的に変動する場合, 円柱に働く x 方向の流体力 F_{x_0} は (4), (10) を用いて計算すれば,

$$F_{x_0} = \rho \pi a^2 \dot{U} \quad (11)$$

となる. (11) 式の $\rho \pi a^2$ が付加質量で, 一般に断面積を S_w とすれば, 付加質量係数 $C_x = \rho \pi a^2 / S_w = 1.0$ である.

(9) 式の F_x は $\dot{U}$ に比例する慣性力であるから, Morison の式の質量係数 C_M を用いて

$$F_x = \rho S_w C_{Mx} \dot{U} = \rho \pi a^2 C_{Mx} \dot{U}^* \quad (12)$$

とおけば, $C_{Mx} = 2.0$ となる.

次に半径 a の球の場合を考えよう (図 3).

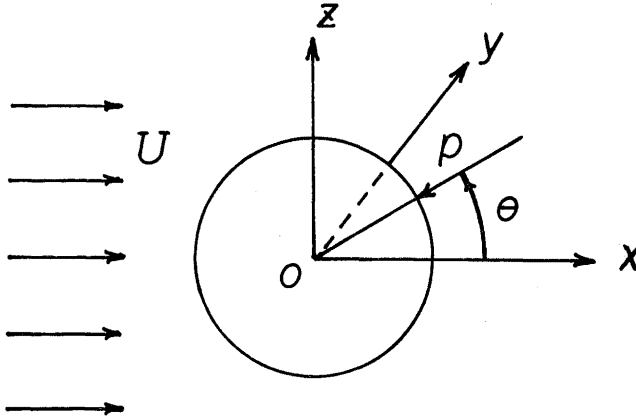


図 3

速度ポテンシャル ϕ は次式で与えられる.

$$\phi = Ur \cos \theta + \frac{Ua^3}{2r^2} \cos \theta \quad (14)$$

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial t} = \dot{U} \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (15)$$

円柱の場合の計算からわかるように, $-\frac{1}{2} \rho q^2$ の圧力は, F_x には寄与しないので, (4) と (15) より球に働く x 方向の流体力 F_x は次式で与えられる.

$$F_x = - \iint \left(-\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{(r=a)} \cdot l \, ds = \rho \iint_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{(r=a)} \cdot l \, ds = \rho \frac{3}{2} \dot{U} \iint_s a \cdot \cos \theta \cdot l \cdot ds \quad (16)$$

但し l は球の外向法線の x 方向の方向余弦.

*註] $\rho \pi a^2 C_{Mx}$ は Virtual mass, すなわち見掛質量と呼ばれるものである.

(16) 式を Green の定理を用いて書き変えると

$$F_x = \rho \frac{3}{2} \dot{U} \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} (a \cos \theta) dV \quad (17)$$

但し V = 球の排水体積 $= \frac{4}{3} \pi a^3$. また $\cos \theta = x/r$ であり, さらに球の表面上では $x = a \cos \theta$ であるから (17) は

$$F_x = \rho \frac{3}{2} \dot{U} \iiint_V dV = \rho \frac{3}{2} V \cdot \dot{U} = \rho \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \dot{U} \quad (18)$$

となる.

一方, 球が静止流体中を $-x$ 方向に $\dot{U}$ の運動をするとき, 球に働く x 方向の力 F_{x_0} は (このときの流体の速度ポテンシャル ϕ は (14) 式の右辺第 2 項である), 付加質量係数 C_x = 付加質量/排水質量を用いれば,

$F_{x_0} = C_x \cdot \rho V \dot{U}$ で, $C_x = 1/2$ であることは良く知られている. したがって F_x は F_{x_0} の 3 倍である.

以上から, 変動流中に拘束された球に働く力の質量係数は

$$C_M = F_x / \rho \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \dot{U} = F_x / \rho V \dot{U} = 3/2 \quad (19)$$

となる.

以上の考察からわかるように, x 方向の変動流中に物体が拘束されているときの流体の速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi = Ux + U \phi_0(x, y, z) \quad (20)$$

と書くことができる.

(20) 式の右辺第 2 項が物体自身が $-x$ 方向に U で運動するときの攪乱ポテンシャルである.

変動流の場合, 物体に働く力は圧力 $p_1 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ に基づく. (20) より

$$p_1 = -\rho \dot{U} x - \rho \dot{U} \phi_0(x, y, z) \quad (21)$$

これより物体に働く x 方向の力 F_x は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} F_x &= - \iint_s p_1(\text{at surface}) \cdot l ds = - \iint_s p_1^0 \cdot l ds \\ &= - \iiint_V \left(\frac{\partial p_1^0}{\partial x} \right) dV = \rho \dot{U} \iiint_V dV + \rho \dot{U} \iiint_V \frac{\partial \phi_0(x_s, y_s, z_s)}{\partial x} \cdot dV \end{aligned} \quad (22)$$

但し $p_1^0 = p_1(\text{at surface})$, x_s, y_s, z_s は物体表面の坐標, V は物体の排水体積.

(22) 式の右辺第 1 項は $\rho V \dot{U}$ であり, 第 2 項は静止流体中を物体が $-x$ 方向に $\dot{U}$ で運動するときの付加慣性力で, 付加質量係数 C_x を用いると $\rho V \dot{U} C_x$ である. したがって, 質量係数 C_M は

$$C_M = F_x / \rho V \dot{U} = 1 + C_x \quad (23)$$

となる。

無限流体中を非定常運動する物体の付加質量の計算は、任意形状の3次元物体についても大きな困難はない。

C_x を模型実験によって求めるには、没水深度が大きく、側壁及び水底の影響が無視できる状態で適当な方法によって模型に x 方向の自由振動を行い、そのときの固有周期 T と空中における自由振動周期 T_0 を用い次式に従えば良い。

$$\begin{aligned} \text{空中: } M\ddot{x} + n_0\dot{x} + k_0x &= 0, \quad T_0 \doteq 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_0}}, \\ \text{水中: } (M + \rho VC_x)\ddot{x} + n_1\dot{x} + kx &= 0, \quad T \doteq 2\pi\sqrt{\frac{M + \rho VC_x}{k}}, \\ \therefore \frac{T^2}{T_0^2} &= \frac{M + \rho VC_x}{M} \cdot \frac{k_0}{k} = \left(1 + \frac{\rho VC_x}{M}\right) \frac{k_0}{k} \end{aligned} \quad (24)$$

但し、 M = 物体の質量、 k_0 及び k は夫々空中及び水中における振動実験における復原装置のバネ常数である。

この方法は振動実験で定義される付加質量と、流体の運動エネルギーの増加で定義される付加質量とは相等しいという性質を利用したものである。この後者で定義される付加質量は (20) 式の ϕ_0 を用いて得られることを示しておこう。すなわち、無限流体中の物体の付加質量 m_x は、流体の運動エネルギーとの関係から次式によって計算することができる。

$$\frac{1}{2} m_x U^2 = \frac{\rho}{2} \iint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot ds \quad (i)$$

$$\text{故に} \quad m_x = \frac{\rho}{U^2} \iint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot ds \quad (ii)$$

(20) 式の ϕ_0 を用いれば、上式の ϕ は $\phi = U\phi_0$ となる。故に (21) 式の圧力の式から、

$$m_x = \rho \iint \phi_0 l ds = \frac{\rho}{U} \iint \phi l ds \quad (iii)$$

$\partial \phi / \partial n = Ul$ であるから、(iii) は (ii) 式と一致する。

2.2 物体が運動する場合

本節では、変動流中を非定常運動する物体に働く流体力について考える。一例として図2で円柱は x 方向に u_0 の速度で運動しているとする。

この場合の速度ポテンシャルは、円柱が一般流 U 中に静止しているときのポテンシャルに、 x 方向に円柱が u_0 の速度で進むときのポテンシャルの和で表わされる。かくして、 x 方向の一般流 U 中を x 方向に u_0 の速度で円柱が進むときの流体の複素速度ポテンシャル w は次式で与えられる*。

*註] これは x 方向の一般流 U と、その中を $u_0 - U$ の速度で円柱が x 方向に進むときの速度ポテンシャルの和としても表わされる。すなわち $w = Uz - (u_0 - U) \frac{a^2}{Z}$

$$w = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - u_0 \frac{a^2}{z} \quad (25)$$

U 及び u_0 の時間的変化を $\dot{U}$ 及び $\dot{u}_0$ とし、(4) の圧力の式を用いると円柱に働く x 方向の力 F_x は

$$F_x = 2\rho\pi a^2 \dot{U} - \rho\pi a^2 \dot{u}_0 \quad (26)$$

となる。

一般に任意の物体の場合は

$$F_x = C_M \cdot \rho V \dot{U} - C_x \cdot \rho V \dot{u}_0 = (1 + C_M) \rho V \dot{U} - C_x \cdot \rho V \dot{u}_0 \quad (27)$$

と表わすことができる。

(27) 式は、 $\dot{U}$ の一般流中に拘束された物体に働く流体力（右辺第 1 項）と静止流体中を $\dot{u}_0$ で x 方向に運動するときに物体に働く流体力（第 2 項）の和であり、而もこれらの流体力は何れも慣性力成分である。これを波浪中で動揺する浮体に働く流体力に対応して考えると、(27) 式の右辺第 1 項は波強制力の、また第 2 項は radiation force の慣性力成分に相当する。

3. 波浪中にある物体の寸法に比べて波長が十分長い場合の質量力

緒言にものべたように、波浪中にある物体の寸法に比べて波長が十分長い場合、物体に働く線形波力は質量力のみとなる。しかもこの場合は自由表面は固体壁とみなされ、質量係数 C_M は周波数には依存せずに一定値を有する。

本章においては、このような場合における質量係数についてのべる。

3.1 2次元浮体（無限水深）

図 4 に示すように、幅 B 、吃水 T 、水面下断面積 S_w の 2 次元浮体に振幅 ζ_A 、円振動数 ω の規則波が $-y$ 方向に入射するとき、波の sub-surface の式は

$$\zeta = \zeta_A e^{-Kz} \cos(Ky + \omega t) \quad (28)$$

で与えられる。ここで $K = \omega^2/g = 2\pi/\lambda$, λ = 波長。また変動圧力は

$$p = -\rho g \zeta_A e^{-Kz} \cos(Ky + \omega t) \quad (29)$$

である。

浮体に働く y 方向の波力は一般には (2) 式で表わされるが、浮体寸法に比べて波長 λ が十分大きい場合には、 $F_y(\dot{\eta}_w)$ は無視できる程小さいので、(2) 式は次のように書くことができる。

$$F_y = F_y(F, K, \cdot) + F_y(\ddot{\eta}_w) + F_y(\dot{\eta}_w | \dot{\eta}_w) = F_{ym} + F_y(\dot{\eta}_w | \dot{\eta}_w) \quad (30)$$

これが Morison の波力の式で、 $F_{ym} = F_y(F, K, \cdot) + F_y(\ddot{\eta}_w)$ が質量力、 $F_y(\dot{\eta}_w | \dot{\eta}_w)$ が抗力である。抗力は、質量力に対して深海域では小さいが、浅海域では同じ order 又はそれ以上になる。

$F_y(F, K, \cdot)$ は (29) 式の圧力を浮体境界面上で積分したのであるが、図 4 で浮体断面は z 軸に関して左右対称であるから

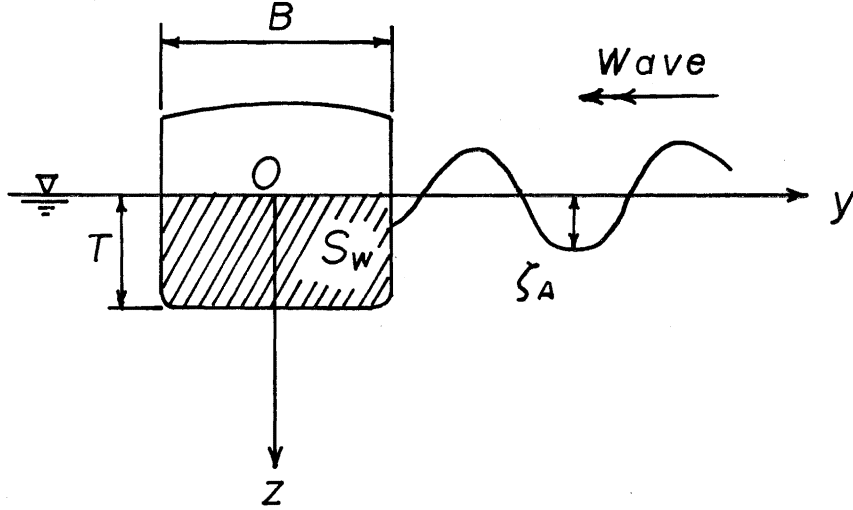


図 4

$$p_A = \rho g \zeta_A e^{-Kz} \sin Ky \cdot \sin \omega t \quad (31)$$

の圧力成分のみが $F_y(F, K.)$ に寄与する。故に

$$F_y(F, K.) = - \int p_A \cdot m \, ds \quad (32)$$

ここで m は外向法線の y 方向の方向余弦, s は浮体の没水境界の線素。

Green の定理 $\int m \cdot p_A \, ds = \iint \frac{\partial p_A}{\partial y} \cdot dS_w$ から (32) は,

$$F_y(F, K.) = - \iint \frac{\partial p_A}{\partial y} \cdot dS_w \text{ となり, (31) 式を用いると}$$

$$F_y(F, K.) = -\rho g \zeta_A \cdot K \left[\iint_{S_w} e^{-Kz} \cdot \cos Ky \cdot dy \, dZ \right] \sin \omega t \quad (33)$$

$T/\lambda \ll 1$ であるから, $\xi_T = KT = \frac{\omega^2}{g} \cdot T = \frac{2\pi T}{\lambda} \ll 1$. 故に (33) 式中で $e^{-Kz} \rightarrow 1$, $\cos Ky \rightarrow 1$ となる。したがって (33) 式の [] の中は S_w となり, 結局次式が得られる。

$$F_y(F, K.)_{(\xi_T \rightarrow 0)} = -\rho g \zeta_A \cdot K \cdot S_w \sin \omega t = -\zeta_A \omega^2 \rho S_w \sin \omega t \quad (34)$$

次に波粒子の orbital acceleration は

$$\ddot{\eta}_w = -\zeta_A \omega^2 e^{-Kz} \sin(Ky + \omega t) \quad (35)$$

$\xi_T \rightarrow 0$ では, 浮体に対する平均の $\ddot{\eta}_w$ は

$$\ddot{\eta}_w = -\zeta_A \omega^2 \sin \omega t \quad (36)$$

の order となる。

ここで, 解析的な説明を容易にするために, 図4の水面下断面形状は Lewis form³⁾ であると仮定

する。

一般に浮体が $\xi_T \rightarrow 0$ で非定常運動するときは、自由表面で速度ポテンシャル ϕ は $\partial\phi/\partial z = 0$ の固体壁の条件を満足する。したがって、この場合は図5に示すように、水面下断面の水面に対する鏡像を加えた2重図形の断面を持つ柱状体が無限流体中で非定常運動する場合と同じである。このとき図4の浮体に働く付加慣性力は、勿論図5の2重図形の1/2である。

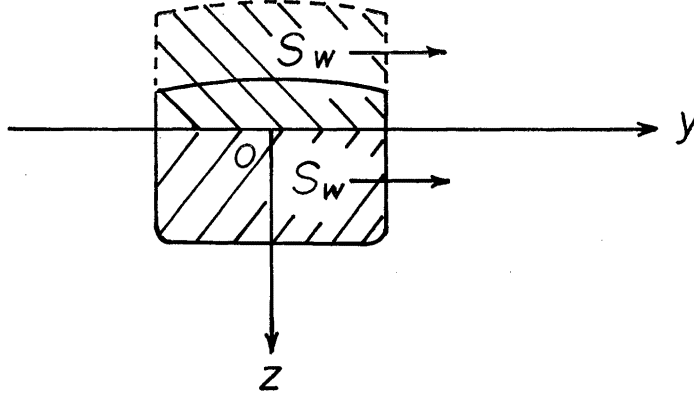


図 5

Lewis form 断面の左右揺の付加質量 M_s の $\xi_T \rightarrow 0$ の値は次式で与えられる³⁾。

$$M_s(\xi_T \rightarrow 0) = \frac{1}{2} \rho \pi T^2 \cdot C_s, \quad C_s = \frac{(1-a_1)^2 + 3a_3^2}{(1-a_1+a_3)^2} \quad (37)$$

Lewis form についての関係式

$$\frac{B}{2T} = H_0 = \frac{1+a_1+a_3}{1-a_1+a_3}, \quad S_w = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{B}{2}\right)^2 \cdot \frac{1-a_1^2-3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2} \quad (38)$$

を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} M_s(\xi_T \rightarrow 0) &= C_s \cdot \rho S_w \\ C_s &= \frac{(1-a_1)^2 + 3a_3^2}{1-a_1^2-3a_3^2} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

半円断面の場合は $a_1 = a_3 = 0$ であるから $C_s = 1.0$ である。また、図6のように a 及び b の軸を有する楕円断面の場合は $a_3 = 0$ であるから、

$$C_s = (1-a_1)^2 / (1-a_1^2) \quad (40)$$

一方、 $H_0 = B/2T = (1+a_1)/(1-a_1) = a/b$ であるから、 $a_1 = (a-b)/(a+b)$ となる。この a_1 を(40)式に代入すれば次式が得られる。

$$C_s = b/a \quad (41)$$

以上は、Lewis form 断面柱状体の $\xi_T \rightarrow 0$ における左右揺の radiation force の話である。一方、 $\xi_T \rightarrow 0$ における左右揺の波強制力は、図5に示される自由表面条件より、第1章にのべた加速度を有

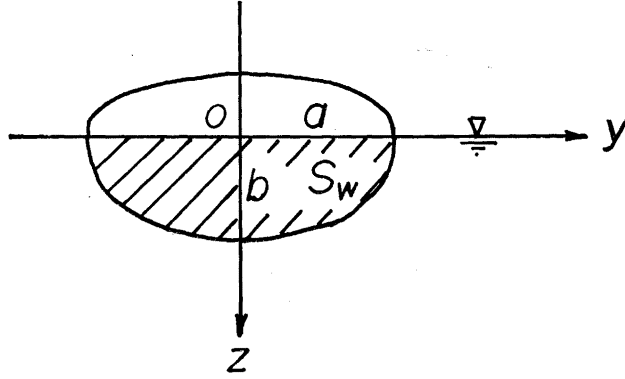


図 6

する無限流体中に拘束された物体に働く力 (22) 式と本節の C_s を用いて次式で表わされる.

$$F_y = (1 + C_s) \rho S_w \ddot{\eta}_w \quad (42)$$

$\ddot{\eta}_w$ は (36) 式に与えられているので,

$$F_y = -(1 + C_s) \rho S_w \zeta_A \omega^2 \sin \omega t \quad (43)$$

となる. (43) 式中の $-\rho S_w \zeta_A \omega^2 \sin \omega t$ が $F_y(\text{F. K.})(\xi_T \rightarrow 0)$ であり, (34) 式と一致する. さらに

$$F_y = C_M \cdot \rho S_w \ddot{\eta}_w \quad (44)$$

とおけば, Lewis form 断面については

$$C_M = 1 + C_s = 1 + \frac{(1 - a_1)^2 + 3a_3^2}{1 - a_1^2 - 3a_3^2} = \frac{2(1 - a_1)}{1 - a_1^2 - 3a_3^2} \quad (45)$$

(45) 式は次の方法によっても導かれる.

ポテンシャル理論によれば, 図 4 の断面に働く波強制力の振幅は次式で与えられる⁴⁵⁾.

$$|F_y| = \frac{\rho g \zeta_A}{K} \cdot \overline{A_s} \quad (46)$$

(文献 (4), (5) では, 振幅のみならず位相も与えられている).

$\overline{A_s}$ は左右揺による発散波振幅比で, $\xi_T \rightarrow 0$ における $\overline{A_s}$ を

$$\overline{A_s}(\xi_T \rightarrow 0) = C \left(K \frac{B}{2} \right)^2 = C_1 K^2 S_w \quad (47)$$

とおけば, 係数 C 及び C_1 は次式で与えられる⁶⁾.

$$C = \frac{\pi(1 - a_1)}{(1 + a_1 + a_3)^2}, \quad C_1 = \frac{2(1 - a_1)}{1 - a_1^2 - 3a_3^2} \quad (48)$$

故に (46), (47) から

$$|F_y|_{\xi_T \rightarrow 0} = \omega^2 \zeta_A C_1 \rho S_w \quad (49)$$

となり, $C_1 = C_M$ である. 故に図6の楕円形断面の場合は (41) より

$$C_M = 1 + C_s = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{H_0} \quad (50)$$

各種の楕円断面についての C_s と C_M を表1に示す.

表1 楕円の C_s と C_M

H_0	0.2	2/3	1.0	1.25	1.5	2.0	4.0
a_1	-2/3	-0.2	0	1/9	0.2	1/3	0.6
a/b	0.2	2/3	1.0	1.25	1.5	2.0	4.0
$C_s = b/a$	5.0	1.5	1.0	0.8	2/3	0.5	0.25
$C_M = 1 + C_s$	6.0	2.5	2.0	1.8	5/3	1.5	1.25

表1からわかるように, 半円断面では $C_M = 2$ であるが, 吃水の深い楕円 ($a < b$) では $C_M > 2.0$ で, 吃水の浅い楕円 ($a > b$) では $C_M < 2.0$ となる.

3.2 没水体 (無限水深)

図7に示すように, $-y$ 方向に入射する規則波中に断面積 S_w の柱状体が没水深度 f (静止水面から断面中心までの距り) の位置に拘束されている場合を考える.

$\xi_T \rightarrow 0$ であるから自由表面は固体壁となり, 柱状体に働く流体力は図8に示すように, 中心間隔が $2f$ である2ヶの柱状体が加速度を持つ無限流体中に存在する場合の1ヶの柱状体に働く力となる.

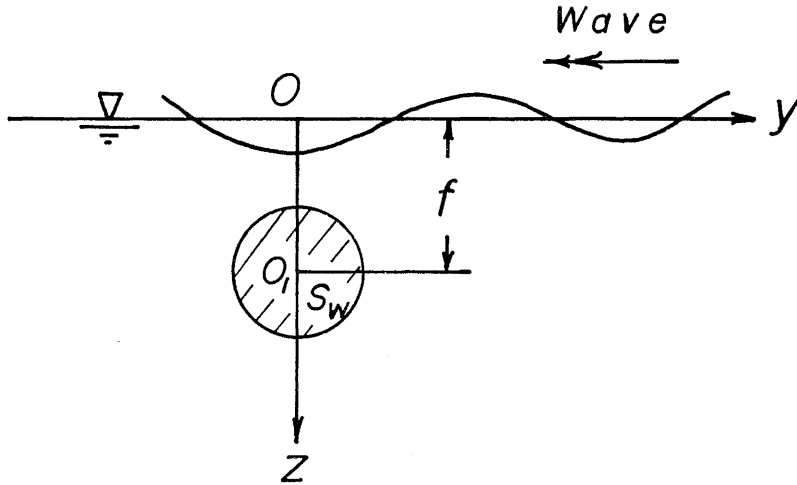


図 7

ここで, 柱状体に働く力を

$$F_y = (1 + C_s') \rho S_w \ddot{\eta}_w = C_M \rho S_w \ddot{\eta}_w \quad (51)$$

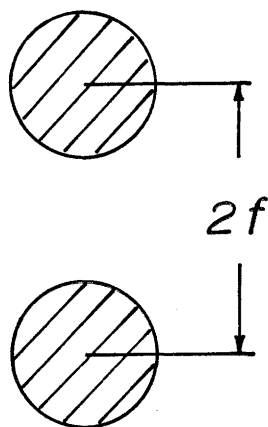


図8

揺の付加質量と周波数の関係を示したものである。図中 $\xi_B = 0$ の値が本稿で論じているものである。

一般に3次元物体が没水深度 f で規則波中に拘束されている場合は、物体の排水体積を V , y 方向の付加質量係数を C'_y とおけば、 F_y 及び質量係数 C_M は次式で与えられる。

$$F_y = (1 + C'_y) \rho V \ddot{\eta}_w \quad (54)$$

$$C_M = 1 + C'_y \quad (55)$$

但し $\ddot{\eta}_w$ の絶対値は $e^{-Kf} \cdot \zeta_A \omega^2$ であるが、 $\xi_T \rightarrow 0$ の状態を考えているので、 $e^{-Kf} \rightarrow 1.0$ である。

この物体の無限流体中の付加質量係数を C_y とおけば

$$C'_y = K_i \cdot C_y \quad (56)$$

で表わされる係数 K_i は一般に1より大きく、且つ f が小さい程大きい。

3.3 水底の影響 (有限水深)

水深 h の浅海域の規則波中に没水深度 f で物体が拘束されている場合は、図9に示すように、没水体と、その水面に対する鏡像とから成る双胴体が $2h$ の間隔で無限個、無限流体中に存在する場合と同じ条件となる。

この場合の y 方向の付加質量係数を C'_y とし、

$$C'_y = K_i^* \cdot C_y \quad (57)$$

とおけば、 C_y は無限流体中の付加質量係数で、 K_i^* は水面と水底の影響を表わす。

したがって質量係数は $C_M = 1 + C'_y = 1 + K_i^* \cdot C_y$ となる。

次に有限水深の水域に浮ぶ浮体の場合は、図5に示すような2重図形の無限箇の鏡像を考えねばならない。2次元の浮体及び没水体の付加質量については高木の研究⁷⁾がある。その中から有限水深における円柱の左右揺の付加質量係数の周波数による変化を附録の下図に示す。 $KT = 0$ の値が本稿で論じて

*註] 没水体の議論であるので、 f の最小値は物体の上端が水面に接する深度である。

但し

$$\ddot{\eta}_w = -\zeta_A \omega^2 e^{-Kf} \sin \omega t \quad (52)$$

とおけば、 C'_y は前節で述べた C_y とは異なり、 $2f$ だけ離れた位置にある鏡像柱状体の影響を受けたものである。(52) 式の e^{-Kf} はこの場合1.0の大きさである ($\xi_T \rightarrow 0$)。

今

$$C'_y = K_i C_y \quad (53)$$

とおけば、没水深度の影響を示す係数 K_i は1より大きく、且つ没水深度が小さい程 K_i は大きい*。附録の上図は、没水円柱の左右揺或は上下

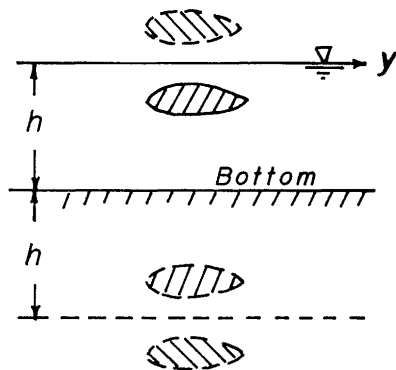


図 9

いるものである。この図からわかるように、 $K_1^2 > 1.0$ であり、而も h/T が小さい程 K_1^2 は大きい。

ここで図 1 の鉛直杭の場合を考えてみよう。 $\varepsilon_T \rightarrow 0$ であるから杭の水中部分は水底と水面の 2 つの固体壁にはさまれることになる。したがって 2 つの固体壁の鏡像をとれば、無限流体中に無限長の柱状体が拘束されている状態になる。今考えているのは有限水深で且つ $\varepsilon_T \rightarrow 0$ の状態であるから、 $\ddot{\eta}_w$ は深さ方向に一様分布となり、本論第 1 章の理論が成立するので流体力分布は一様となる。

断面積を S_w 、無限流体中の断面の y 方向の付加質量係数を C_s とすれば、

$$F_y = (1 + C_s) \rho S_w \ddot{\eta}_w = C_M \rho S_w \ddot{\eta}_w \quad (58)$$

前にものべたように $\ddot{\eta}_w$ は水面における値にほぼ等しい。杭の断面が図 10 に示すように軸 a, b の楕円である場合には、 C_s, C_M は表 1 に示された値となる。

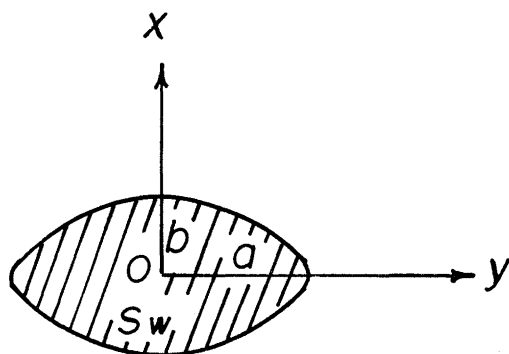


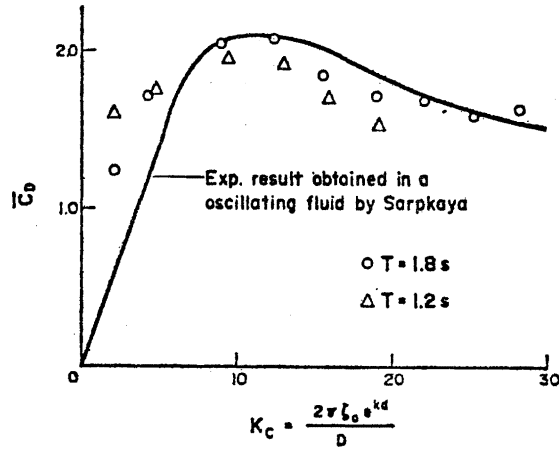
図 10

Morison の杭に対する波力の式¹⁾ の質量力は、本節のような理論によって裏づけられる。

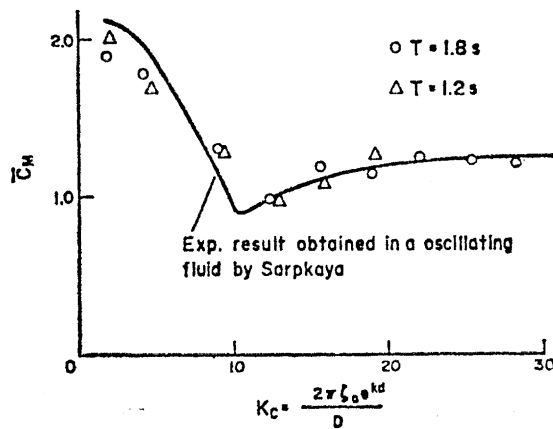
4. 質量係数 C_M 及び抗力係数 C_D に対する Strouhal 数の影響

第 2 及び第 3 章の内容は、流体をポテンシアル流として取り扱った場合の話である。

模型実験を行い流体力を計測すると、物体周りに発生する渦の様相が Strouhal 数 (strouhal 数 $S = \frac{nD}{U}$, n : 振動数, D : 直径, U : 流速) によって変化するため, C_M や C_D の値が Strouhal 数に依存することが知られている⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾. ここでは参考のために、規則波中に置かれた鉛直柱状体模型の水面下の部分に働く力を計測し、それを解析して求めた小寺山の研究結果¹⁰⁾を図 11 に示す. 図は C_M 及び C_D が K_c 数によって何のように変るかを示したものである. K_c 数は (Keulegan と Carpenter



Drag coefficient $\overline{C_D}$ for a vertical cylinder.



Inertia coefficient $\overline{C_M}$ for a vertical cylinder.

の頭文字) Strouhal 数の逆数である。

図 11 は、水粒子が軌道運動している規則波中に拘束された鉛直円柱の一部分に働く力の解析から求めた小寺山の C_M, C_D の結果と、 U tube 中の振動流中に置かれた水平円柱模型に働く力の解析から求めた Sarpkaya⁹⁾ の C_M, C_D とが夫々よく一致するという興味ある結果を示している。

円柱が置かれている一般流として、小寺山は規則波を、Sarpkaya は振動流を用いたが、規則波中に拘束された物体の $\xi_T \rightarrow 0$ の状態の C_M は、加速度を持つ無限流体中にある物体の C_M に等しいので、この意味からは小寺山と Sarpkaya の結果に差異がないのは当然かも知れない。 C_D についても同様なことが言えよう。

しかし両者が用いた変動流の様相は異なる。Sarpkaya⁹⁾ の場合は一方向の変動流 (Keulegan and Carpenter の実験⁸⁾ は定常波の節に円柱模型を置いているので、この場合も一方向の変動流である) であるのに対して、小寺山¹⁰⁾ の場合は水粒子が軌道運動を行い、しかもその軌道面が円柱断面と直角であるので、両者が実験に用いた変動流の性質は大いに異なる。したがって、この両者の実験では渦の発生の様相も違うであろうと思われる。それにもかかわらず C_M や C_D の値に両研究による差異のないことは、 C_M や C_D に対する変動流の相違の影響は小さいことを示している。しかし、この点に関しては今後一層詳細な研究が必要であろうと考える。

最後に、振動流中での実験結果から Sarpkaya⁹⁾ が求めた球の C_M, C_D の値を表 2 に示す。

表 2 球の C_M と C_D (Sarpkaya)

$K_c = \frac{U_m T}{D}$	0	5	10	15	20	25	30	35
C_D		0.4	0.5	0.7	0.8	0.8	0.75	0.75
C_M	1.5	1.5	1.35	1.2	1.0	1.1	1.1	1.1

註] 表中の値は文献 (9) の実験値の平均値を読み取ったものである。

5. 結 び

近年海洋開発の進展に伴い海洋構造物の設計・建造にたずさわる造船技術者は、船舶或は浮体の波浪中の動揺や荷重の取り扱いはお手のものであるが、浅海域の海洋構造物や柱状構造物に働く波力の推定に関しては、土木工学関係の論文や資料を利用することが多い。したがって鉛直杭に働く Morison の波力の式も造船関係の研究者や技術者にとってもなじみ深い式となった。しかし、Morison の式中の質量力、或は質量係数の力学的意味、この質量力と加速度を持つ無限流体中の物体に働く力との関係、さらには質量係数と付加質量係数との関係等について造船、土木関係の技術者を問わず明解な議論がなされない場合が見られるので本稿を書いた。

C_M や C_D が K_c 数とともに変化するので、定常流と変動流とが共存する中で運動する物体に働く流体力を何のような方法で推定するか、今後に期待される極めて重要な研究課題である。

(参 考 文 献)

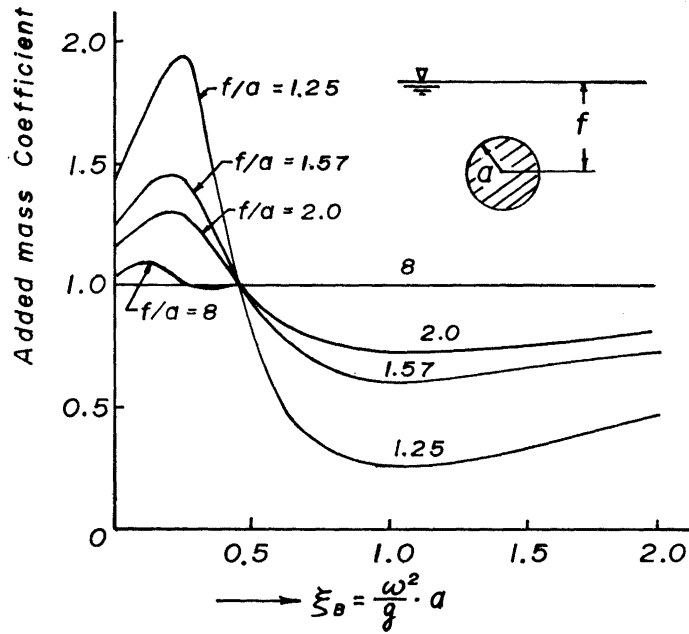
- 1) Morison, J. R., J. W. Johnson, M. P. O'Brien and S. A. Schaaf, The forces exerted by surface waves on piles, *Petroleum Trans.*, Vol. 189, TP 2846, 1950, pp. 149-154.
- 2) 友近晋, 流体力学, 共立社, p. 138 及び p. 179, 1940.
- 3) 田才福造, 高木又男, 規則波中の応答理論及び計算法, 耐航性に関するシンポジウム, 日本造船学会, 昭和44年7月.
- 4) 別所正利, 波の中の船の横揺れ運動の理論について, 防衛大学理工学研究報告, 第3巻第1号, 昭40年.
- 5) 大楠丹, Multihull Ship の波の中の運動について, 西部造船会々報, 第40号, 昭和45年7月.
- 6) 田才福造, 規則波中の二次元物体に働く漂流力について, 関西造船協会誌, 第152号, 昭49年3月.
- 7) Takaki, M., On the Hydrodynamic Forces and Moments Acting on the Two Dimensional Bodies Oscillating in Shallow Water, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.*, Vol. XVI, No. 54, 1968.
- 8) Keulegan, G. H. and Carpenter, L. H., Force on cylinders and plates in an oscillating fluid, *J. nat. Bur. Stand., Res. Paper* 2857, 60 (s), 1958.
- 9) Sarpkaya, T., Force on cylinders and spheres in a sinusoidally oscillating fluid, *J. Appl. Mech.*, *Trans. of the ASME*, March 1975.
- 10) Koterayama, W., Wave Forces Acting on a Submerged Horizontal Circular Cylinder in Oblique Waves and on a Vertical Cylinder in Deep Waves, *Ocean Engineering*, Vol. 7, No. 3 pp. 399-412, 1980.

(昭和55年10月17日受理)

[附 録]

1. 没水円柱の付加質量係数

(Heaving and Swaying)



2. 有限水深域に浮ぶ半没水円柱の左右揺の付加質量係数

