

矩形柱周りの流れ：数値計算と可視化実験, その1

岡島, 厚

九州大学応用力学研究所：助教授

杉谷, 賢一郎

九州大学応用力学研究所：文部技官

<https://doi.org/10.15017/4743601>

出版情報：応用力学研究所所報. 49, pp.41-76, 1979-02. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



矩形柱周りの流れ[†]

—数値計算と可視化実験, その1—

岡 島 厚*
杉 谷 賢一郎**

概 要

空力弾性的不安定振動の面からも注目されている矩形柱周りの流れについて、差分法による数値解法により研究した。まず、一般に高いレイノルズ数域まで広く用いられている風上差分法 (Up-wind Difference Method) で implicit な数値計算法を静止および振動する矩形柱周りの流れ (レイノルズ数 100, 断面辺長比 2) の計算に適用した。計算された結果は同時に行なった可視化実験の結果と比較した。その結果, (1) 矩形柱の加振振動数がカルマン渦のストローハル数に近い時は, 後流渦と矩形柱の振動との同期現象, そして両者の振動数が離れている場合には, frequency demultiplication の現象が発生することなど, 流れの挙動はよく一致した。(2) しかし, カルマン渦のストローハル数の値や矩形柱から離れた下流領域の流れの微細な形状については若干の相違が見られた。そしてレイノルズ数が増大するに伴い, 計算と実験の結果の相違が顕著になった。

次に, 更に高いレイノルズ数まで安定でしかも精度の良い数値計算法を見出すため, 中央差分法や2次精度の風上差分法を用いた implicit な解法および ADI 法による解法を矩形柱周りの流れ (レイノルズ数 150, 断面辺長比 1) に適用し, 検討した。その結果, (3) 中央差分法や ADI 法では計算上, すぐ不安定が生じ, 計算の続行が不可能であった。(4) 2次精度の風上差分法や1次精度風上差分法と中央差分法の併用した解法などが有望と考えられる。

Key words: Rectangular Prisms, Numerical Calculations, Up-wind Difference Method, Karman Vortex, Flow Visualization

1. ま え が き

近年, 矩形柱周りの流れについては, その空力弾性的不安定振動発生面の面からも注目され, 数多くの研究が成されている。しかし, 矩形柱周りの流れは剥離を伴うこともあり, 未だ明らかでない事柄が多い。そこで 本研究は Navier-Stokes の式を差分法によって数値解析することにより, 矩形柱周りの

[†] 本論文は The International Symposium on Flow Visualization (Tokyo, October 1977) に於いて発表したものに一部加筆したものである。

* 九州大学助教授, 応用力学研究所

** 九州大学応用力学研究所文部技官

流れの様相を調べることを目的とする。

従来、比較的多くの数値計算が行なわれているのは円柱周りのレイノルズ数のかなり低い場合の流れに限定されており、レイノルズ数の高い流れの解析については、必ずしも満足すべき精度の結果が得られる段階には至っていないと思われる。

そこで、本報告では、まず一般に高いレイノルズ数域まで広く用いられている差分法の一方法——風上差分法 (Up-wind Difference Method) による数値計算法¹⁾ を静止および振動する矩形柱周りの流れに適用する。そして同時に行なった可視化実験による結果と比較することにより、数値計算法の妥当性を検討する。

次に、出来るだけ高いレイノルズ数まで数値計算上安定で、しかも精度的にも満足すべき、より実用的な解法に改善するよう種々検討を行なった。

目 次

1. まえがき
2. 数値計算法
3. 可視化実験の方法
4. 計算結果と可視化実験結果の比較
5. 種々な差分法による数値解法の検討
6. 結論

付録 1. 1次精度風上差分法によるレイノルズ数 300 の矩形柱 (辺長比 2) 周りの流れ

付録 2. 2次精度風上差分法によるレイノルズ数 100 の矩形柱周りの流れ

主 な 記 号

a : 矩形柱の並進振動振幅.

B : 矩形柱の上 (下) 面の辺長さ.

f : 矩形柱の加振振動数または渦の周波数.

H : 矩形柱の前面の辺長さ.

Re : レイノルズ数 $=UH/\nu$.

St : ストローハル数 $=fH/U$.

T : 周期.

t : 無次元時刻 $=t'U/H$, t' : 実時刻.

U : 一様流速.

v_m : 矩形柱の y 方向の速度.

x, y : $x-y$ 座標.

α : 一様流に対する矩形柱の迎え角.

$\Delta x_i, \Delta y_j$: x 方向, y 方向の格子間隔.

- ζ : 渦度.
- $\theta : = 2\pi f_c t$
- ν : 流体の動粘性係数.
- Ψ : 流れ関数.
- $\widetilde{\Psi}$: 矩形柱周りのポテンシャル流れの流れ関数からの変化分.

添字

- b : 粘性流体として取り扱う領域の y 方向の境界.
- CE : 中央差分法.
- c : 矩形柱.
- i, j : 格子点の x, y 方向の格子番号.
- $ic1, ic2, jW$: 図 2.2, 2.3 参照.
- K : 静止矩形柱後流に生ずるカルマン渦.
- $UW1$: 1次精度風上差分法.
- $UW2$: 2次精度風上差分法.
- W : 物体壁面.

2. 数値計算法

流れは2次元で非圧縮とする. 基礎式となる渦度の式および Poisson の式を差分近似して数値解法によって矩形柱周りの流れを解くわけであるが, その解法について以下 2.1. 不等間隔格子, 2.2 差分近似, 2.3 境界条件の順に述べる.

2.1. 不等間隔格子

矩形柱周りを格子に分割するわけであるが, 格子点数の節約や遠方領域の境界条件を出来るだけ物体から遠く離れた所で与えることなどを勘案し, 全ての格子の間隔を均一にせず, 矩形柱近傍の流れの変化の激しい, しかも注目する領域は出来るだけ細かく分割し, 矩形柱から遠く離れるに従い等比級数的に格子の間隔が広くなるという不等間隔の格子を用いる (図 2.1). 但し, 不等間隔格子を用いると, 次に述べる計算式は等間隔格子の場合に比べ, 若干複雑になると云う欠点がある.

2.2. 差分近似

次に, 基礎式である渦度の式および Poisson の式を差分近似する. なお, この場合分割された格子間隔は図 2.1 に示すような不等間隔であることに注意を要する. また, 本研究では出来るだけレイノルズ数を高くするという目的から見て, レイノルズ数増加に伴う数値計算上の不安定性の生じ易い渦度の式, 特にその慣性項の差分近似における取り扱いについては充分留意しなければならない.

まず, 最も一般的な差分近似の形式は中央差分である. たとえば, x 方向成分の $\partial\zeta/\partial x$, $\partial^2\zeta/\partial x^2$ を例にして示すと²⁾,

$$\left(\frac{\partial\zeta_{i,j}}{\partial x}\right)_{CE} = \frac{\Delta x_{i-1}\zeta_{i+1,j}}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{\Delta x_i\zeta_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{(\Delta x_{i-1} - \Delta x_i)\zeta_{i,j}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i} \quad (1)$$

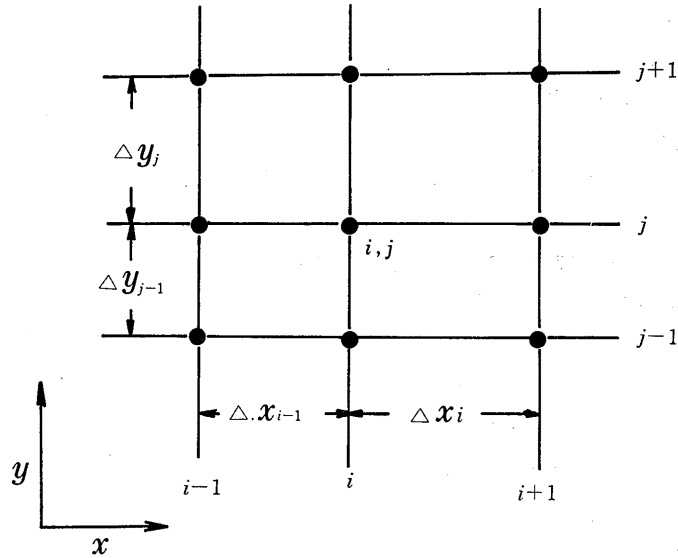


図2.1 不等間隔の格子

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_{i,j}}{\partial x^2}\right)_{CE} = \frac{2\zeta_{i+1,j}}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + \frac{2\zeta_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{2\zeta_{i,j}}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i} \quad (2)$$

である。

また、 y 方向成分の $\partial\zeta/\partial y$, $\partial^2\zeta/\partial y^2$ の差分表示は式 (1), (2) において x を y に変え、添字 i と j をそのまま置き換えれば良い。勿論、計算の安定の面から考えて、渦度の式において、時間を進める際には、時刻 t および $t+\Delta t$ に対応する流れ関数 Ψ や渦度 ζ の値のそれぞれの平均値で近似して、渦度の変化分 $\partial\zeta/\partial t$ を計算し、その値が収束するまで繰返し計算を行なうと云う、いわゆる implicit な (陰的) 方法³⁾を用いる。しかし、5章で後述の如く中央差分法を用いて implicit な方法を使っても、実際の計算では比較的高いレイノルズ数で不安定となる場合が多い。

次に $\partial\zeta/\partial x(\partial\zeta/\partial y)$ を風上差分法によって近似する。まず、 Δx についての 1 次精度の近似式は、

$$\left(\frac{\partial\zeta_{i,j}}{\partial x}\right)_{UW1} = \frac{\zeta_{i,j} - \zeta_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}} + O(\Delta x) \quad (3)$$

である。但し、格子点 i, j の流速は $u > 0$, $v > 0$ とする。

更に Δx の 2 次精度の近似式は

$$\left(\frac{\partial\zeta_{i,j}}{\partial x}\right)_{UW2} = \left(\frac{\partial\zeta_{i,j}}{\partial x}\right)_{UW1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \left(\frac{\partial^2\zeta_{i-1,j}}{\partial x^2}\right)_{CE} + O(\Delta x^2) \quad (4)$$

となる。

2.3. 境界条件

境界条件のうち矩形柱表面の条件は流れが物体表面に沿い、しかも滑りがないとすれば良い。従って表面上の流れ関数 Ψ_w は一定とし、渦度の値は一般によく用いられる次式、

$$\zeta_w = -\frac{2\Psi_{i,jW+1}}{(\Delta y_{jW})^2} \quad (5)$$

から算出する (図 2.2).

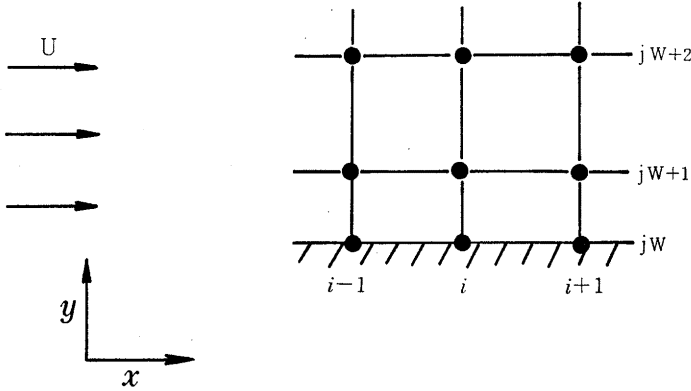


図 2.2 壁面近傍の格子

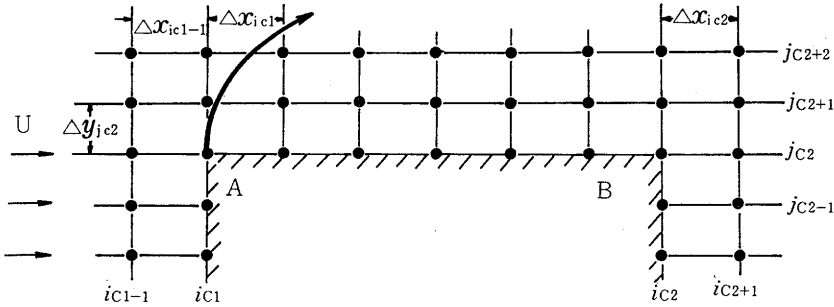


図 2.3 矩形柱周りの格子

次に角 (かど) における渦度の決め方はこの種の問題では注意すべき事柄である. 図 2.3 に示す矩形柱の角 A , B の渦度 ζ_A , ζ_B の差分近似としては, 次のような表示が考えられる.

$$\zeta_A = -\frac{2\Psi_{iC1-1,jC2}}{(\Delta x_{iC1-1})^2} \quad (6)$$

$$\zeta_B = -\left[\frac{\Psi_{iC2+1,jC2}}{(\Delta x_{iC2})^2} + \frac{\Psi_{iC2,jC2+1}}{(\Delta y_{jC2})^2} \right] \quad (7)$$

角 A で流れは剥離するが, 剥離直後の剥離流線は図 2.3 に示すように矩形柱前面の延長線上に一致するような場合を想定し, 前面の壁における渦度の式 (5) をそのまま, 角 A に適用したものが式 (6) である. 本計算では, 流れが矩形柱前縁 (前面の角) から剥離するような場合に用いた.

また, 矩形柱後縁のように前縁で剥離した流れの中に埋没し, 流れの方向が変わる場合にも, その速度の方向により, 上 (下) 面に沿う流れと背面に沿う流れの判別をその都度行ない, 流れの付着している

壁面において式(6)を適用して渦度を定めてもよいが、実際に、この方式で計算を行なってみると、解の収束が不可能であった。そこで矩形柱の後縁では式(7)に示すような上(下)面と背面の壁において、それぞれ式(6)を適用し、得られた値の平均値を角 B の渦度の値とした。

次に、矩形柱から充分遠く離れた遠方領域の条件は x 方向の流速 u は一様流速 U に、 y 方向の流速 v は $-(v_m + 2\pi f_c a \sin 2\pi f_c t)$ に漸近して行くようにすればよい。ただし、ここで $-(v_m + 2\pi f_c a \sin 2\pi f_c t)$ は矩形柱が y 方向に v_m で運動、および $2\pi f_c a \sin 2\pi f_c t$ で並進振動している場合、本計算が矩形柱に乗った動座標で考えているために生じた遠方領域の速度成分である。

そこで、まず上流側境界は矩形柱の中心から矩形柱前面の辺長さ H の約5.0(または8.8, 21.9)倍離れた所、 $x = -5.0H(-8.8H, -21.9H)$ で、 $\zeta_{x=-5.0H} = 0$ 、そして矩形柱周りのポテンシャル流れからの変化分の流れ関数 $\tilde{\Psi}_{x=-5.0H} = 0$ とする。また、下流側境界は $x = 50.0(96.7)H$ 下流の位置にとり、この位置でも上流側境界同様、 $\zeta_{x=50.0H} = 0$ 、 $\tilde{\Psi}_{x=50.0H} = 0$ とする。そして上・下の境界は中心線から $y = \pm 3.0(\pm 4.5, \pm 8.5)H$ の位置とし、その境界より外側の領域の流れは渦無し流れとする。従ってその境界線上の速度(u_b, v_b)はそれぞれ次式の様になる⁵⁾。

$$u_b = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_b}{\xi - x_b} d\xi, \quad v_b = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_b}{\xi - x_b} d\xi \quad (8a, b)$$

ここで x_b, ξ は流れを粘性流れとして取り扱う領域と渦無し流れとする領域の境界線上にある。

以上、述べた境界条件の元に渦度の式および Poisson の式を各時間ステップ毎に順次解いて行けばよい。

なお、Poisson の式は不等間隔の格子においては、

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{i,j} = & \left(\frac{2\tilde{\Psi}_{i+1,j}}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + \frac{2\tilde{\Psi}_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + \frac{2\tilde{\Psi}_{i,j+1}}{\Delta y_j(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} \right. \\ & \left. + \frac{2\tilde{\Psi}_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} + \zeta_{i,j} \right) / \left(\frac{2}{\Delta x_{i-1}\Delta x_i} + \frac{2}{\Delta y_{j-1}\Delta y_j} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

と表示される(図2.1参照)。

実際の数値計算では、Successive over-relaxation (SOR) 法により繰返し計算して解いた。この場合加速係数は1.4であった。

3. 可視化実験の方法

レイノルズ数が100程度の比較的低いレイノルズ数範囲の流れの可視化観察をするため、水槽実験を行なう。自走式の水槽(幅40 cm, 深さ40 cm, 長さ600 cm)⁶⁾中を矩形断面を有する模型を曳航し、アルミ粉末法によって流れを観察する。アルミ粉末法による流線模様は数値計算による流線パターンと直接比較が可能である。

断面辺長比 $B/H = 2$ の模型は前面辺長さ $H = 8$ mm, 上(下)面の辺長さ $B = 16$ mmで、スパン長さ280 mmである。

実験は模型を振動せず、そのまま曳航した場合、および曳航方向と直角な方向に種々な振動数で並進

振動させた場合につき、写真撮影により瞬時の流れの模様を調べる。

模型の振動振幅 a などは数値計算と同条件とし、 $a=0.05H$ 、加振振動数は $St_c(=f_c H/U) = 0.1, 0.137, 0.167$ である。

4. 計算結果と可視化実験結果の比較

一様流中で矩形柱を静止の（振動させない）場合および流れと直角方向に、振幅 $a/H=0.05$ で、無次元加振振動数 $St_c(=f_c H/U)=0.1, 0.137, 0.167$ で並進振動させた場合につき、計算結果と可視化実験の結果を比較検討し、考察する。本章の計算および実験共に矩形柱の断面辺長比 $B/H = 2$ 、レイノルズ数 $Re(=HU/\nu, \nu$ は流体の動粘性係数) = 100 である。また、本章における計算結果は全て渦度の式の慣性項を 1 次精度の風上差分法で近似した解法によって得られたものである。この風上差分法は一般に高いレイノルズ数域まで適用されているが¹⁾、この解法の有効性についても検討する。

4.1. 静止 ($St_c = 0$) の場合

まず、一様流中に置かれた静止矩形柱周りの流れを図 4.1 に示す。図は無次元時間 $t(=t'U/H) = 0$ から 2.5 まで $St_c=0.167, a/H=0.05$ で並進振動させた後、静止の状態にし、(a) $t=16.0$ から (f) $t=23.5$ 経た後の流線分布* (左図) および渦度分布** (右図) を示す。この場合レイノルズ数が小さいので、流れは矩形柱前縁から剥離せず、常に後縁で剥離して、背面からカルマン渦が形成されている。そのカルマン渦列の (a) $t=16.0$ と (e) $t=22.0$ そして (b) $t=17.5$ と (f) $t=23.5$ の流れのパターンはそれぞれ上下逆さになっていることから、両時刻の時間々隔 Δt は渦列の流れの変化の $1/2$ 周期に相当する。従って後流渦はほぼ周期 $T=12$ 、すなわちストローハル数 $St_K=0.083$ のカルマン渦が生じていることがわかる。一方、水槽実験によるストローハル数の値は $St_K=0.12 \sim 0.125$ であり、1 次精度風上差分法による計算結果は若干低い値である。なお、本数値計算法によれば、いずれも計算上安定である。

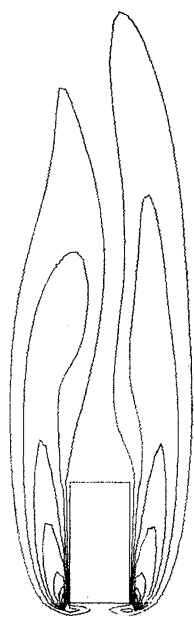
以下、数値計算においてはこの静止矩形柱のカルマン渦のストローハル数 $St_K=0.083$ を基準にし、加振振動数を種々変える。なお、数値計算において、与えた主な入力データは表 1 にまとめて示す。

4.2. 加振振動数 $St_c=0.1$ の場合

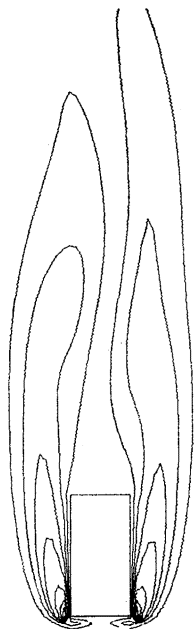
カルマン渦のストローハル数 $St_K=0.083$ に近い加振振動数 $St_c=0.1$ ($St_c/St_K=1.2$) で矩形柱を並進振動させた時の流れのパターンを可視化実験結果と比較しつつ、1 周期にわたって、図 4.2 に示す。図の左図には $St_c=0.1$ で正弦関数的に変化する変位 $y=-a \cos 2\pi f_c t$ の角度表示 $\theta(=2\pi f_c t)$ で 90° おきに、計算結果を示した。右図にはそれぞれの角度 θ に最も近い角度 θ の可視化写真を示した。両者の結果を比べると、矩形柱近傍の流れのパターンは良く一致しているが、矩形柱から $5H$ 以

* 流線分布に示した各流線 Ψ の値は矩形柱表面で $\Psi = 0$ とすれば、それぞれ上・下方向に離れるに従い、順に $\Psi = \pm 0.05, \pm 0.1, \pm 0.15, \pm 0.2, \pm 0.25, \pm 0.3, \pm 0.4, \pm 0.5, \pm 0.6, \pm 0.7, \pm 0.8, \pm 0.9, \pm 1.0, \pm 1.2, \pm 1.4, \pm 1.6, \pm 1.8, \pm 2.0, \pm 2.2, \dots$

** 渦度分布は $\zeta = \pm 20, \pm 18, \pm 16, \pm 14, \pm 12, \pm 10, \pm 8, \pm 6, \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1.5, \pm 1.0, \pm 0.5$ の順に等渦度線を描いた。また、矩形柱の極く近傍の等渦度線は電算機のプログラムの機能上正確には画れていない。



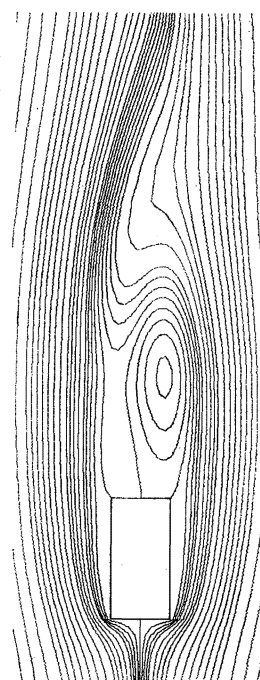
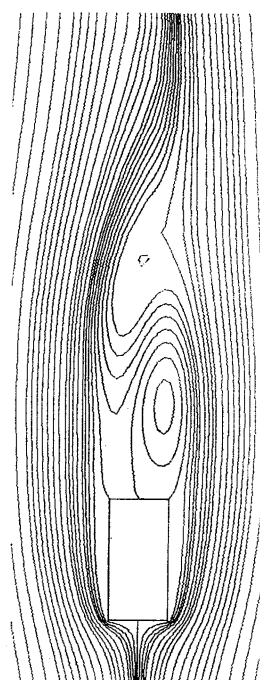
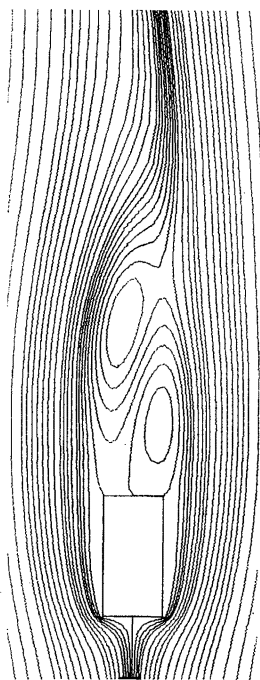
(a) $t = 16.0$



(b) $t = 17.5$



(c) $t = 19.0$



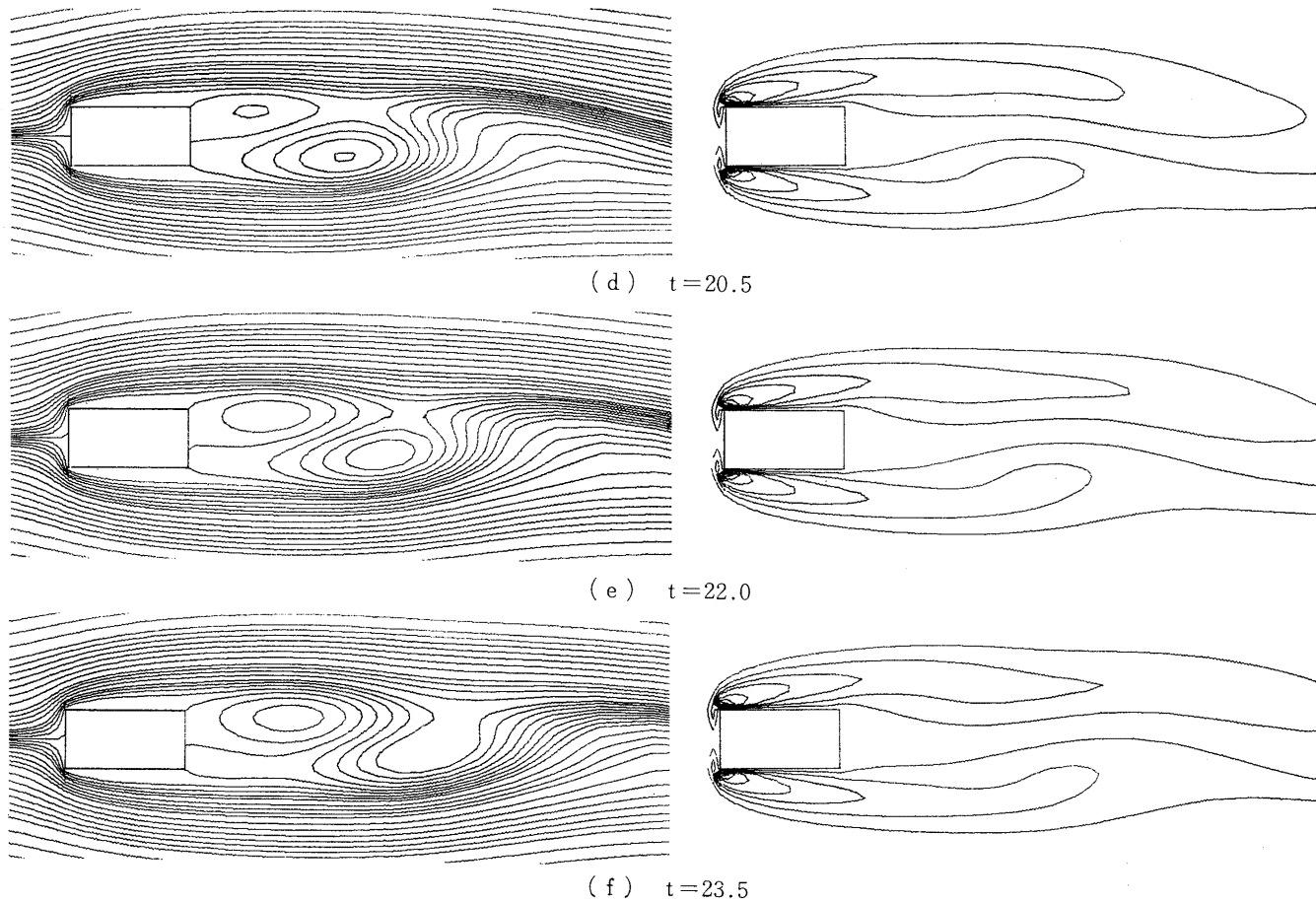


図 4.1 静止矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=100$, $St_c=0$, (1次精度風上差分法, R10KK. 4.2)

表1 1次精度風上差分法による解法の入力データ

図番	4.1	4.2	4.3	4.4, 4.5
Re	100			
B/H	2			
VBAR	静止	10.0	7.3	6.0
RUNNM	R10KK. 4.2	R10GK. 4.2	R10FK. 4.2	R10DK. 4.2
Method	Up-Wind 1 (POTEV 12. X. 16. Y 101)			
DT	1/16	0.03906 1/16	0.05703 1/32	1/16
S	0.1			
SJ	0.125			
V_m	0			
I_{max}	91			
IH	39			
$x_{+\infty}$	50.0			
$x_{-\infty}$	-8.8			
IC1	31			
IC2	47			
IC3	63			
J_{max}	61			
$y_{\pm\infty}$	± 3.0			
Accc	1.1			
t (ISTP)	16.0 (256)	35.0 (572)	32.85 (589)	42.0 (672)
	17.5 (280)	37.5 (612)	36.50 (650)	43.5 (696)
	19.0 (304)	40.0 (652)	40.15 (714)	45.0 (720)
	20.5 (328)	42.5 (692)	43.80 (778)	46.0 (736)
	22.0 (352)	45.0 (732)	47.45 (842)	46.5 (744)
	23.5 (376)		47.0 (752)	47.0 (752)
			48.0 (842)	48.0 (768)
			51.10 (906)	48.5 (776)
			54.75 (970)	49.5 (792)
				50.5 (808)
				51.0 (816)
				51.5 (824)
				52.5 (840)
				54.0 (864)

上, 下流域の流れには両者若干の相違が見られる。また, 加振振動数 St_c が St_K に比べ, 2割程度相違しても, 両者の流れのパターンは St_c で変化し, 矩形柱の振動に同期していることがわかる。

4.3. 加振振動数 $St_c = 0.137$ の場合

図4.3には加振振動数の大きい $St_c = 0.137$ ($St_c/St_K = 1.64$) の流れの様相を3周期にわたって示す。加振振動数がカルマン渦のストローハル数 $St_K = 0.083$ とかなり離れているため, 後流渦の流れは

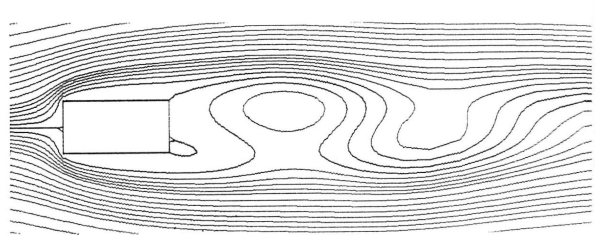
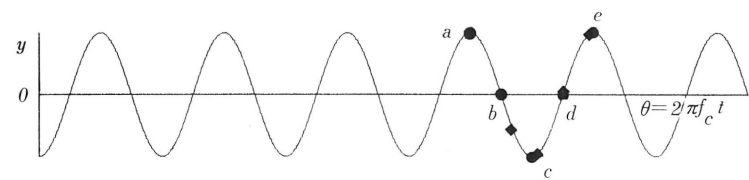
矩形柱の振動とは同期せず、渦の配列は不規則に見える。しかし、計算された流れのパターンは実験結果といずれの θ においてもよく一致している。そして時刻 (a) $t=32.85$ とそれから 2.5-周期後の (f) $t=51.10$ あるいは (b) $t=36.50$ と (g) $t=54.75$ の流れのパターンは丁度上・下逆さの形状をしており、流れは矩形柱の振動の5倍の周期でも変化していることがわかる。勿論、矩形柱の極く近傍の流れは加振振動数で変化しており、結局 この場合の流れは矩形柱の振動数 St_c とその $1/5$ の $St_c/5$ の振動数の2種類の振動成分から成っている。なお、この場合の矩形柱の振動周期 $T_c=7.3$ の5倍、すなわち $T=36.5$ は図4.1で示したカルマン渦の周期 $T_K=12$ (ストローハル数 $St_K=0.083$) の約3倍に相当している。つまり、矩形柱の振動とカルマン渦の周期の最大公倍数に近い周期で流れが変化している。この現象は既に著者らによって並進振動円柱周りの流れの数値計算⁷⁾に於いても見い出され、Bishop と Hassan⁸⁾ による振動円柱の変動揚力の測定や Toebe⁹⁾ による振動円柱近傍の流れの熱線風速計による流速測定の際に見い出された frequency demultiplication の現象と考えられる。

4.4 加振振動数 $St_c=0.167$ の場合

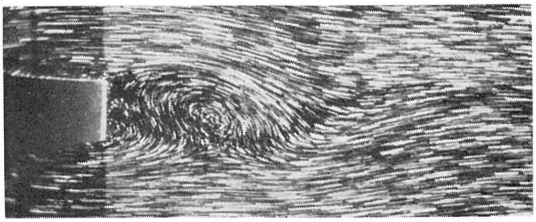
矩形柱の加振振動数 St_c がカルマン渦のストローハル数の2倍、すなわち加振振動数 $St_c=0.167$ ($St_c/St_K=2$) の場合につき、2周期にわたる流れの変化を図4.4に示す。この場合、矩形柱周りの流れの変化を調べるに当たり図の上図に示すごとく、A、B、Cの3つの領域に分割して考える。まず、領域Aは振動矩形柱の極く近傍の領域であり、流れは加振振動数 St_c で変動している。次に、矩形柱背面から約 $5H$ 以上下流の領域Cの流れに注目する。図(a)の領域Cの流れの形状は矩形柱の振動周期の1周期後の図(e)の流れとは丁度上・下逆さの形をしており、2周期後の図(i)で初めて同一の流れのパターンになる。すなわち領域Cは矩形柱の振動の2倍の周期で、緩々く変化していることがわかる。すなわちこの領域Cの周波数はカルマン渦のストローハル数 St_K に一致している。そこで、領域Aと領域Cの間にある領域B(矩形柱背面から $x=H\sim 5H$ 下流領域)では、前後の流れの変化の周波数が異なるため、その領域の流れのパターンは非常に複雑に変化している。数値計算と可視化実験結果を図4.5に比較するが、図(c)における2つの渦が斜めに並んでいる形状、図(e)の3つの渦が接近して並んでいる形状、図(f)、(g)の如く渦の形が明確に見えず、流れが大きく蛇行している様子など、両者の結果は非常に良く一致していると云える。

以上、まとめると、矩形柱を振動数 $St_c=2St_K$ で加振した場合、矩形柱近傍の流れは $St_c(=2St_K)$ で変化するが、下流 ($>5H$) の流れは St_K で変化する。そしてその中間領域の流れのパターンは複雑に変化している。しかしこれらの流れの数値計算および可視化実験結果はよく一致し、1次精度の風上差分法による本数値解法がレイノルズ数100程度までは一応適用してもほぼ妥当な結果が得ることが出来ることが確認された。ただし、本数値解法による静止矩形柱におけるカルマン渦のストローハル数の値や下流領域における流れの詳細な様相については、実験結果と比べ若干の相違が見られた。

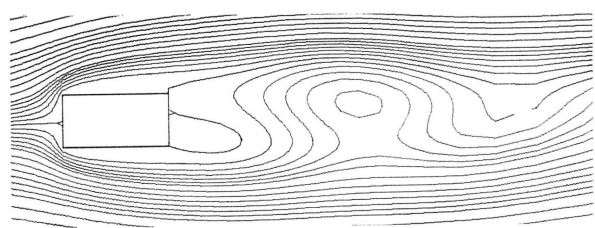
1次精度風上差分法による解法の更に高いレイノルズ数への適用は次章に述べる $Re=150$ の場合および付録1の $Re=300$ の場合に試みた。その結果、いずれの場合にも計算上安定であったが、流れの挙動は実験結果と次第に相違が顕著になった。



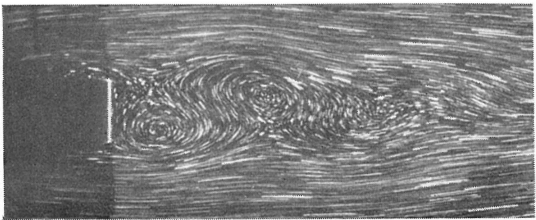
(a) $t = 35.0,$ $\theta = 180^\circ$



$\theta = 183^\circ$



(b) $t = 37.5,$ $\theta = 270^\circ$



$\theta = 302^\circ$

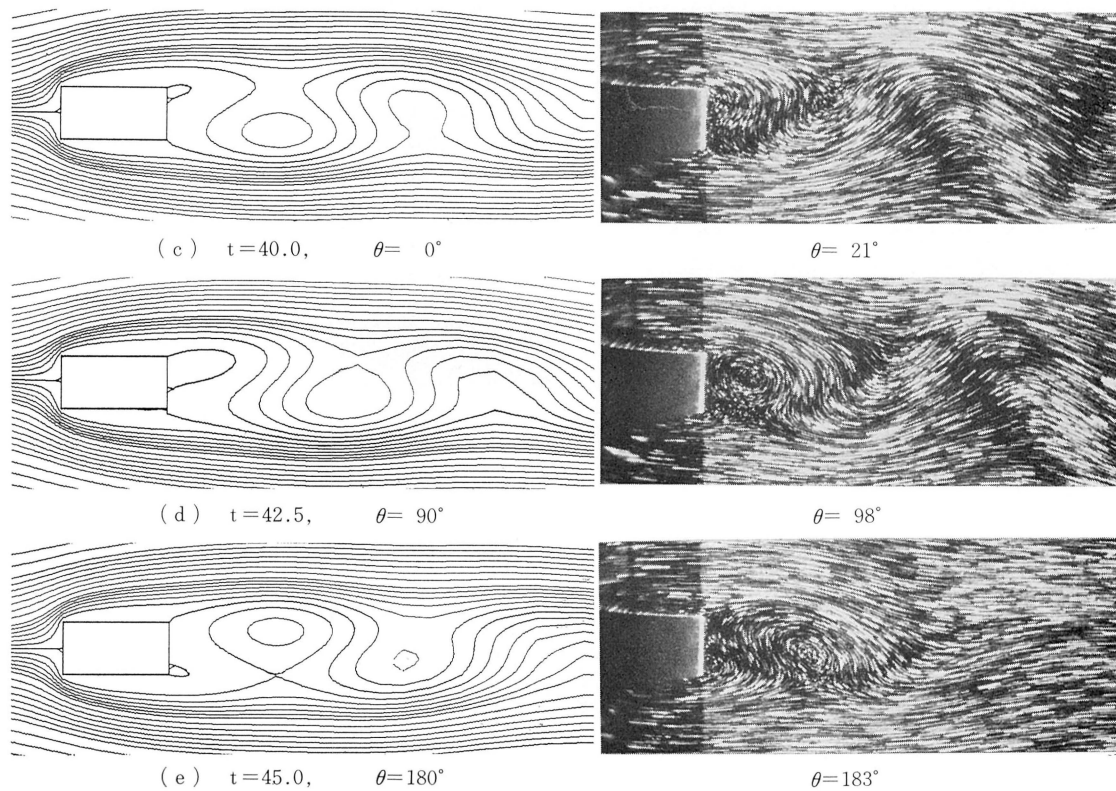


図 4.2 並進振動する矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=100, a/H=0.05, St_c=0.1$
 (1次精度風上差分法, R10GK. 2.4)

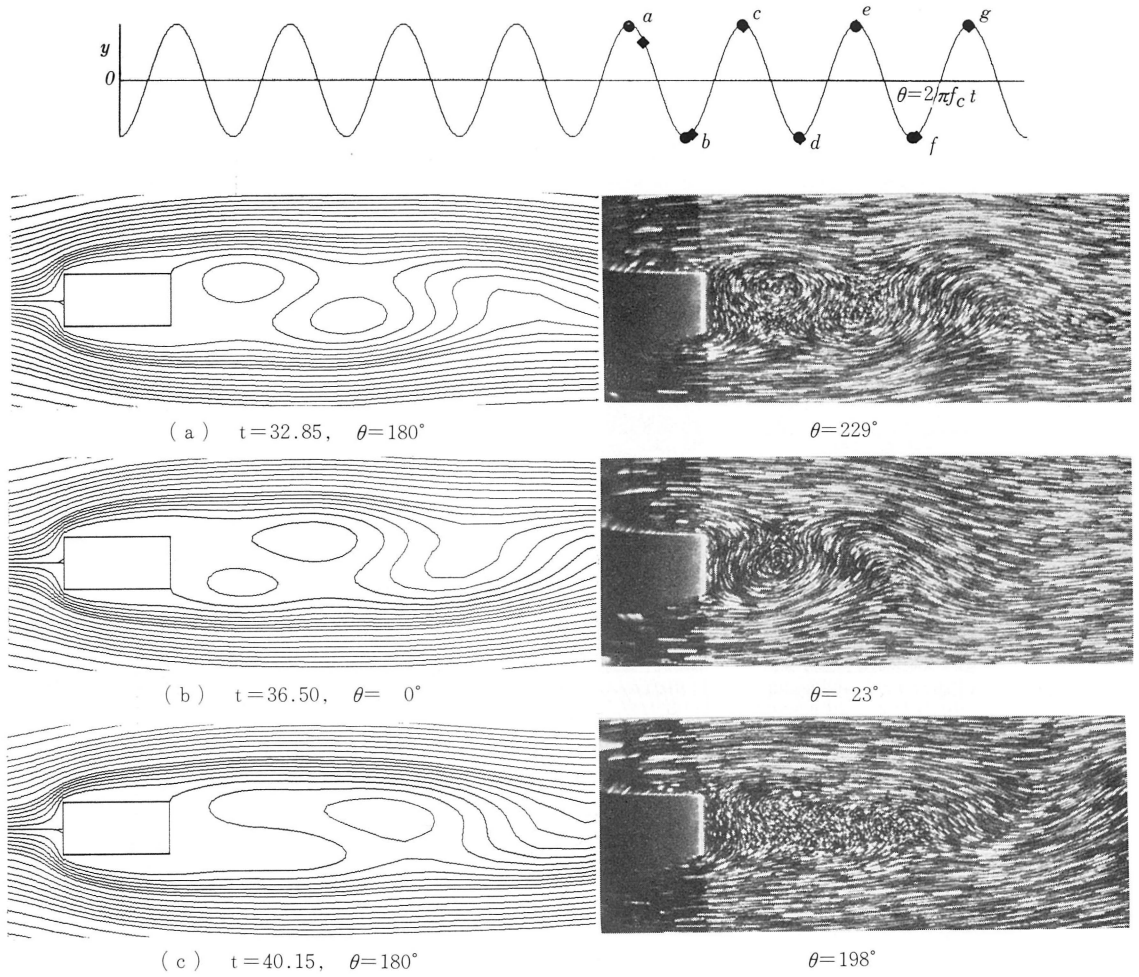


図 4.3 並進振動する矩形柱 ($B/H = 2$) 周りの流れ, $Re = 100$, $a/H = 0.05$, $St_c = 0.137$
(1次精度風上差分法, R10FK. 4.2) (続)

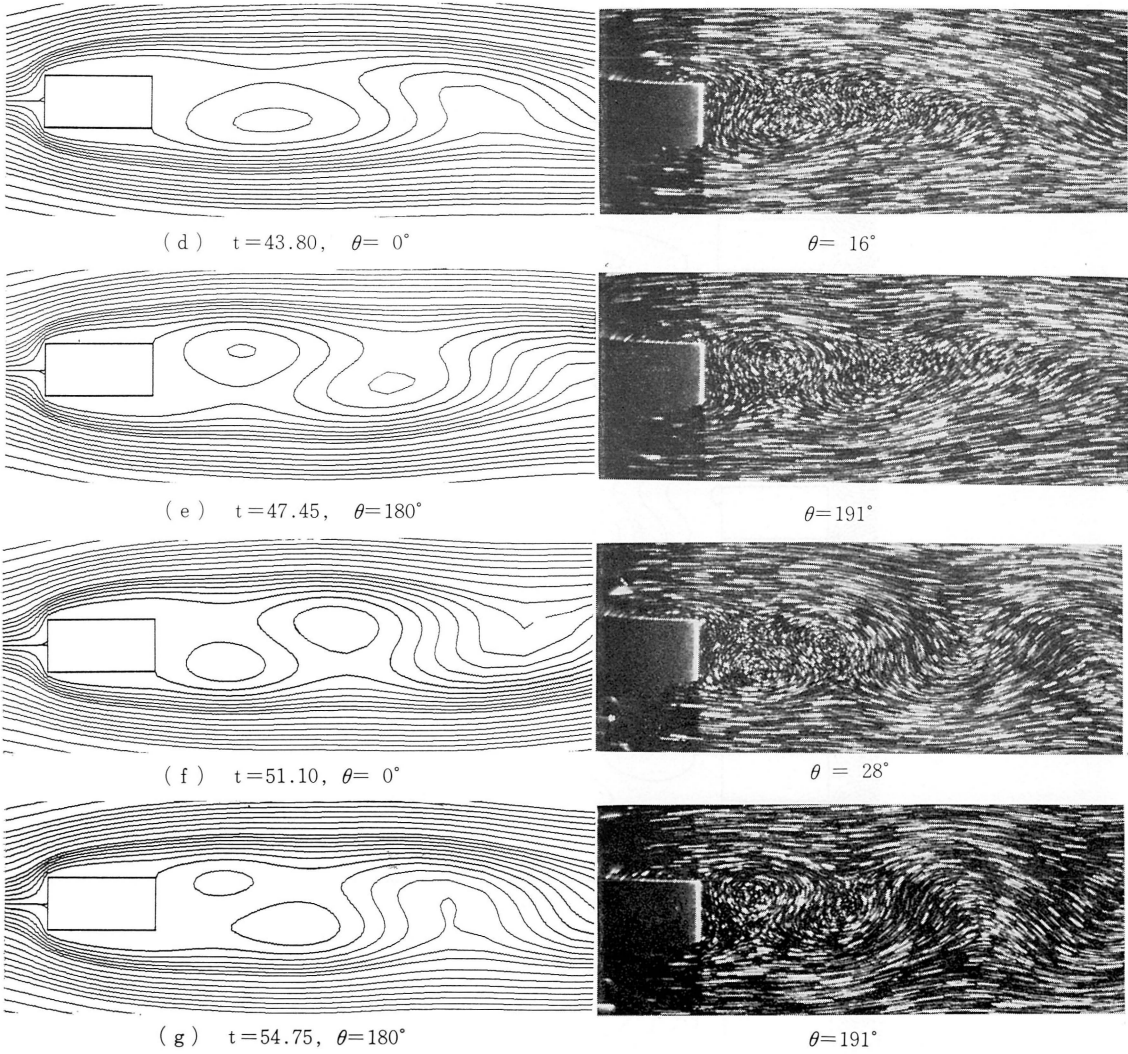


図 4.3 並進振動する矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=100, a/H=0.05, St_c=0.137$
 (1次精度風上差分法, R10FK, 4.2)

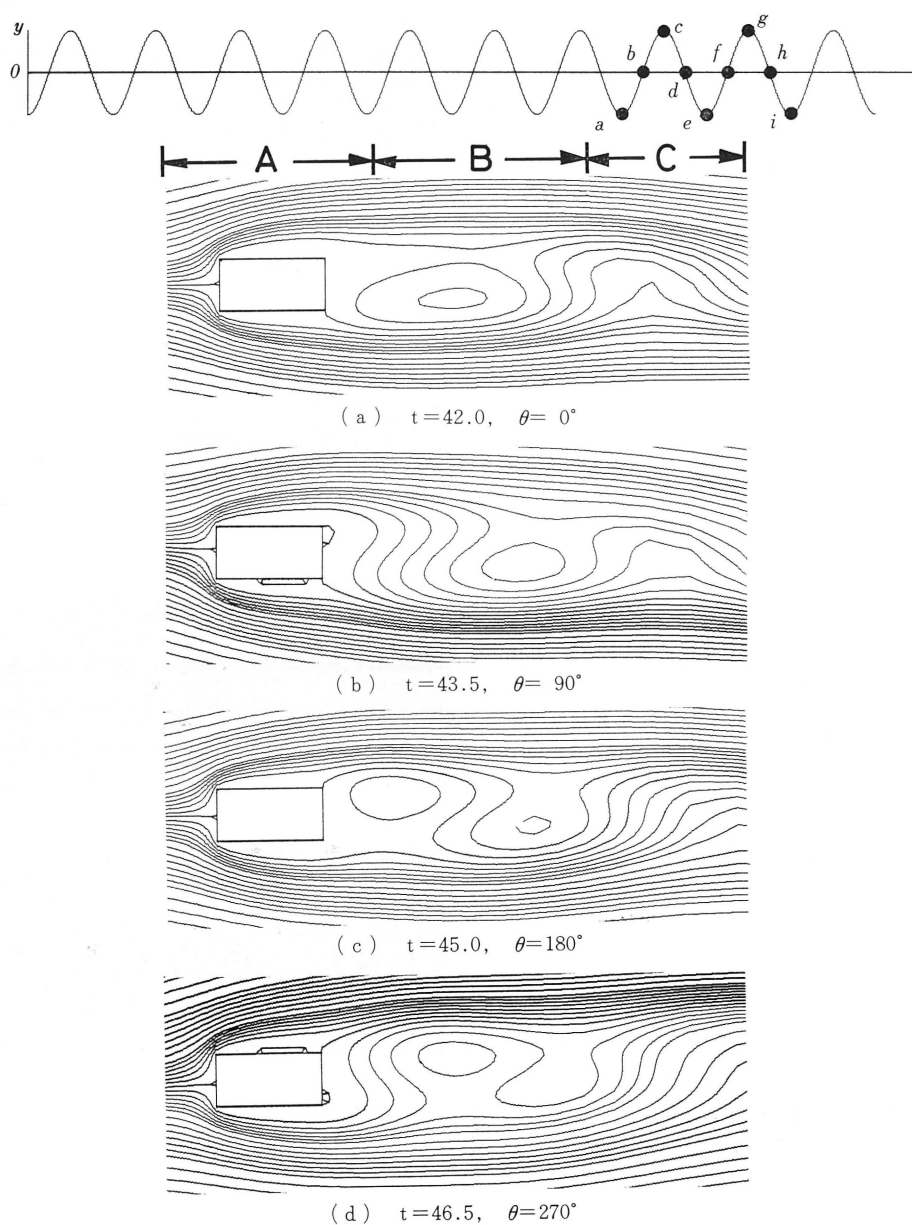


図 4.4 並進振動する矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=100$, $a/H=0.05$, $St_c=0.167$ (1次精度風上差分法, R10DK. 4.2) (続)

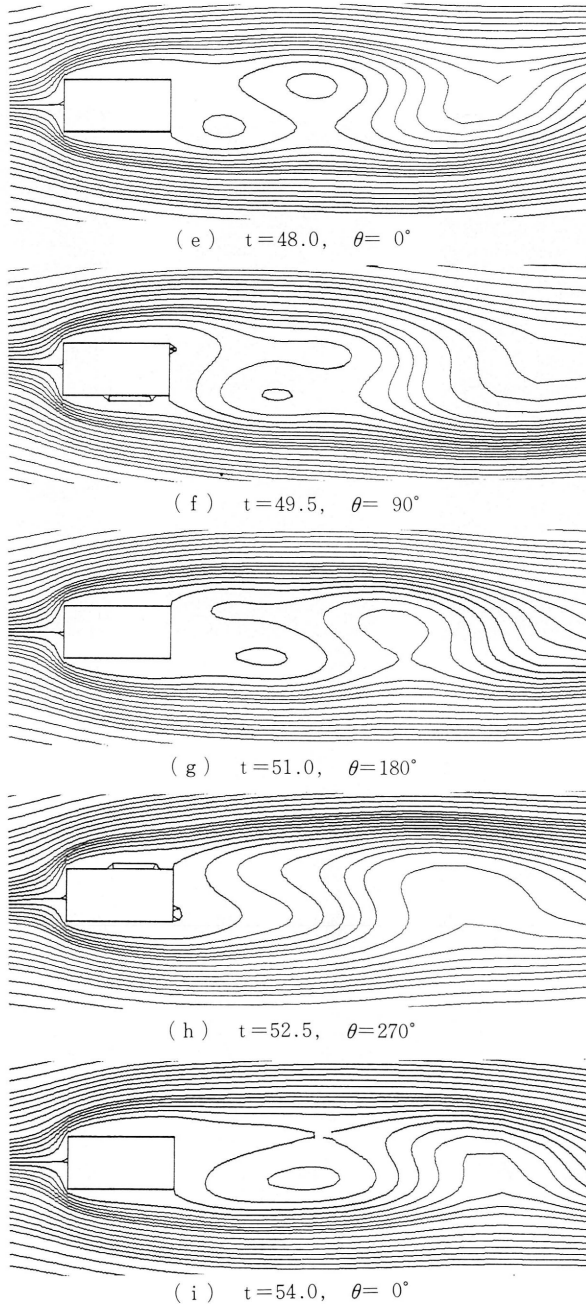
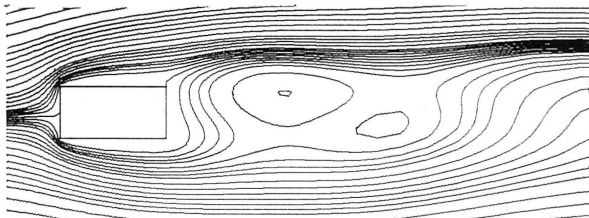
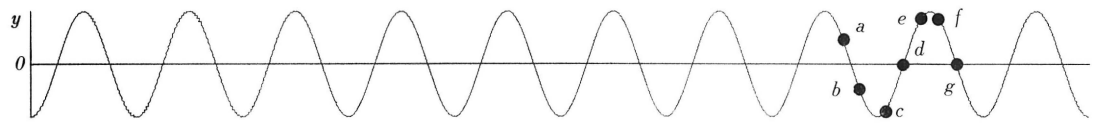
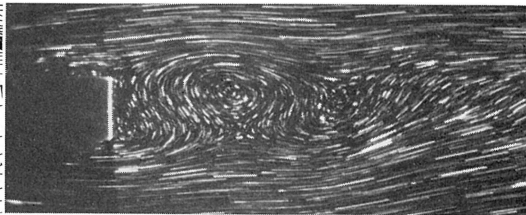


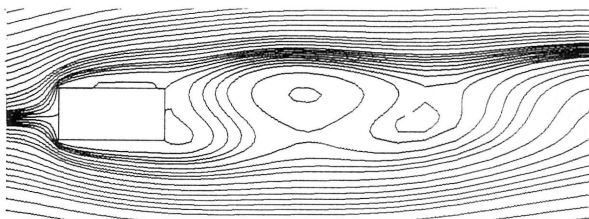
図 4.4 並進振動する矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=100, a/H=0.05, St_c=0.167$ (1次精度風上差分法, R10DK, 4.2)



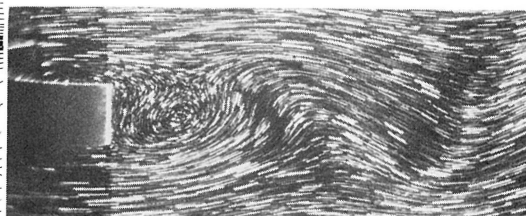
(a) $t=46.0, \theta=240^\circ$



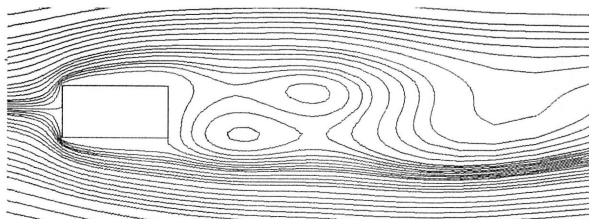
$\theta=244^\circ$



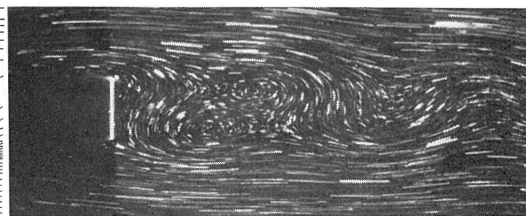
(b) $t=47.0, \theta=300^\circ$



$\theta=302^\circ$



(c) $t=48.5, \theta=30^\circ$



$\theta=25^\circ$

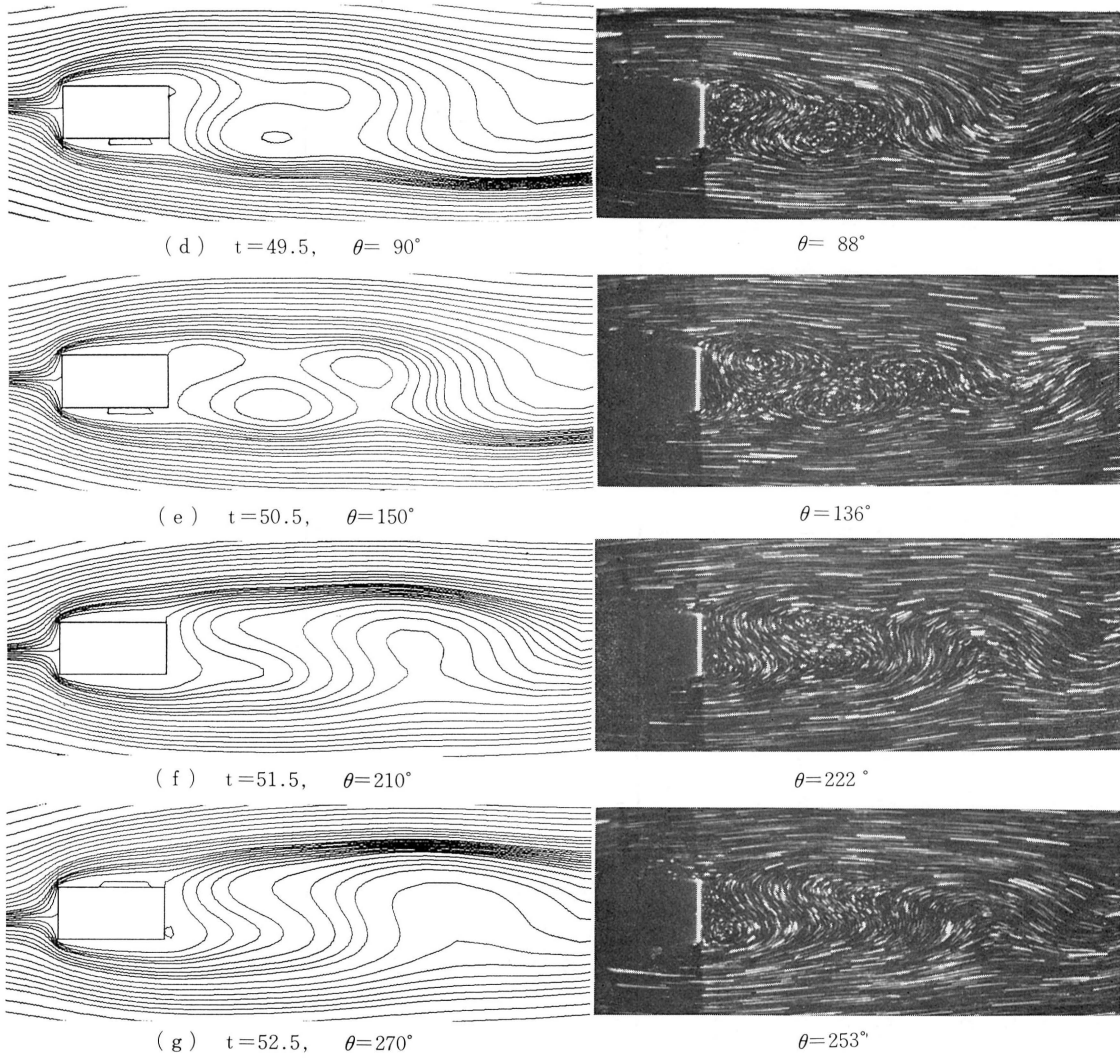


図 4.5 並進振動する矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=100, a/H=0.05, St_c=0.167$
 (1次精度風上差分法, R10DK. 4.2)

5. 種々な差分法による数値解法の検討

前章では、レイノルズ数が100の場合に限り、矩形柱(辺長比2)周りの流れにつき、1次精度の風上差分法による数値計算結果と可視化実験結果を比較したが、矩形柱の振動と後流渦の同期現象、あるいは frequency demultiplication の現象の発生など流れの様相の大筋は一致したが、カルマン渦のストローハル数の値や下流領域の流れの微細な形状については若干の相違が見られた。そこで、本章では出来るだけ高いレイノルズ数まで安定にしかも精度良く計算出来るような実用的な計算方法を見出すことを目的として種々な差分法による数値解法につき検討する。

既に2章でも触れたが差分法による数値計算においてレイノルズ数を高くする上で困難をもたらす原因は渦度の式の慣性項の存在である。従ってこの項の取扱いが最も重要と考えられる。以下、レイノルズ数 150 の場合につき、辺長比 $B/H=1$ の静止矩形柱周りの流れを例にして、最も標準的で著者も並進振動円柱などで用いた³⁾中央差分法を使った implicit な方法、前章で用いた風上差分を用いた implicit な方法そして Alternating Directional Implicit (ADI) 法¹⁰⁾につき比較検討する。

いずれの場合にも、一様流に対する迎え角 α を 3° 付け、上・下の対称性を強制的に壊し、自然にカルマン渦が生ずるようにする。主な入力データは表2にまとめて示す。

表2 静止矩形柱周りの流れ($B/H=1$, $Re=150$)の計算の入力データ

図 番	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
Re	150				
B/H	1				
VBAR	0				
RUNNM	R15C S Q4.2	R15B S Q4.2	R15A S Q4.	R15D S Q4.	R15HSQ4.
Method	C E	Up-Wind 1	Up-Wind 2	Up-Wind 2	Up-Wind 1+CE
D T	1/16	1/16	1/32	1/32	1/32
S	0.1(10)				
SJ	0.1(10)				
V_m	0.06	0.06	0.06	0.05236	0.05236
I_{max}	86			86	
IH	31			31	
$x+\infty$	50.2			96.7	
$x-\infty$	-5.0			-21.9	
IC1	26			26	
IC2	36			36	
IC3	46			39	
J_{max}	61			61	
$y\pm\infty$	± 3.0			± 4.5	± 8.5
Accc	1.1			1.1	
t (ISTP)	14.625 (264)	23.625 (416) 29.625 (512)	28.5 (1096) 33.0 (1240)	21.0 (720) 25.0 (848)	40.875 (776) 44.875 (840)
Potential F.	1	1	1	2	3

まず、中央差分法を用いた implicit な解法による計算結果を図 5.1* に示す。図の渦度分布に見ると、矩形柱の前縁の両角部附近から計算の不安定から生じた物理的には全く意味の無い渦度が上流方向へ生じ、渦度の値は格子毎に正・負の値を交互に繰返し、振動している。流線も前縁近傍で波状を呈し、計算上不安定となっている。勿論、時間ステップや格子の間隔の取り方により若干異なるが、中央差分法による解法では、大凡レイノルズ数が 100 程度が限界と考えられる。

次に、1次精度および2次精度の風上差分法を適用した結果をそれぞれ図 5.2, 5.3, 5.4 に示す。いずれの場合にも、計算上極めて安定して解くことが出来た。図はそれぞれ、渦が矩形柱の上面側からおよび下面側から流出する——つまり渦変化の半周期離れた時刻の流れのパターンを示した。従って、図から大凡の渦のストローハル数を算出することが出来、それぞれ $St_K=0.083$ (図 5.2), 0.13 (図 5.3), 0.13 (図 5.4) である。図 5.2 の 1次精度の風上差分法によるストローハル数 St_K の値は他の解法および実験による値 ($St_K=0.14$) と比較して差が大きく、また流れのパターンについても

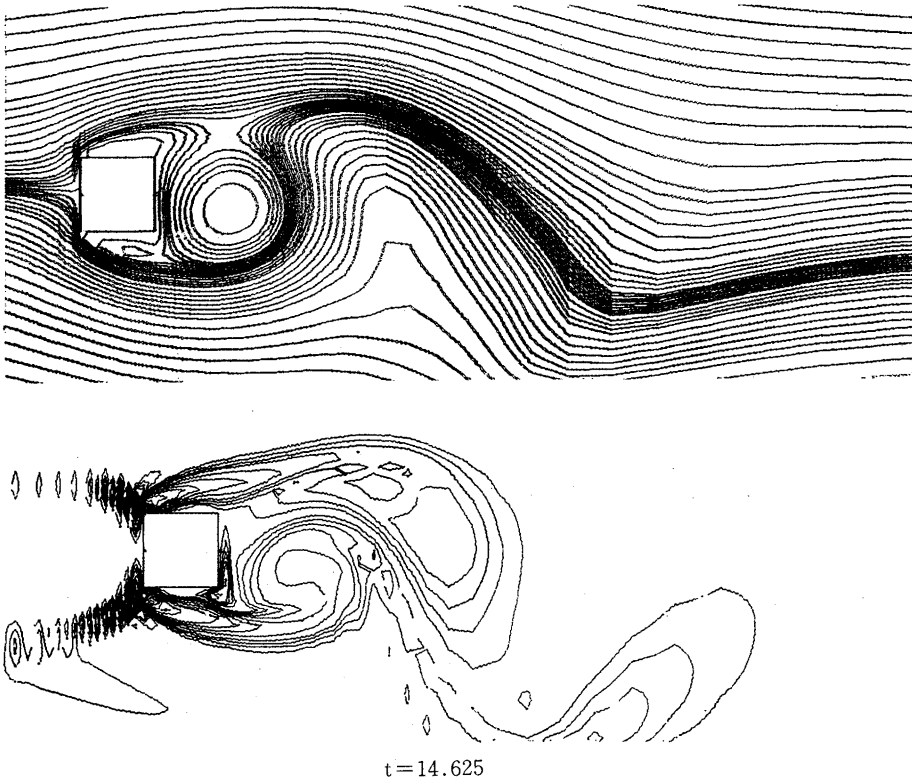


図 5.1 静止矩形柱 ($B/H=1$) 周りの流れ, $Re=150$, $\alpha=3^\circ$, $t=14.625$
(中央差分法, R15CSQ4. 900264PS2)

* 図 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 の流線分布は $\Psi = 0, \pm 0.025, \pm 0.05, \pm 0.075, \pm 0.1, \pm 0.15, \pm 0.2, \pm 0.25, \pm 0.3, \pm 0.4, \pm 0.5, \pm 0.6, \pm 0.7, \pm 0.8, \pm 0.9, \pm 1.0, \pm 1.4, \pm 1.6 \dots$ の等流れ関数の値を画いた。等渦度線は図 4 と同じ。

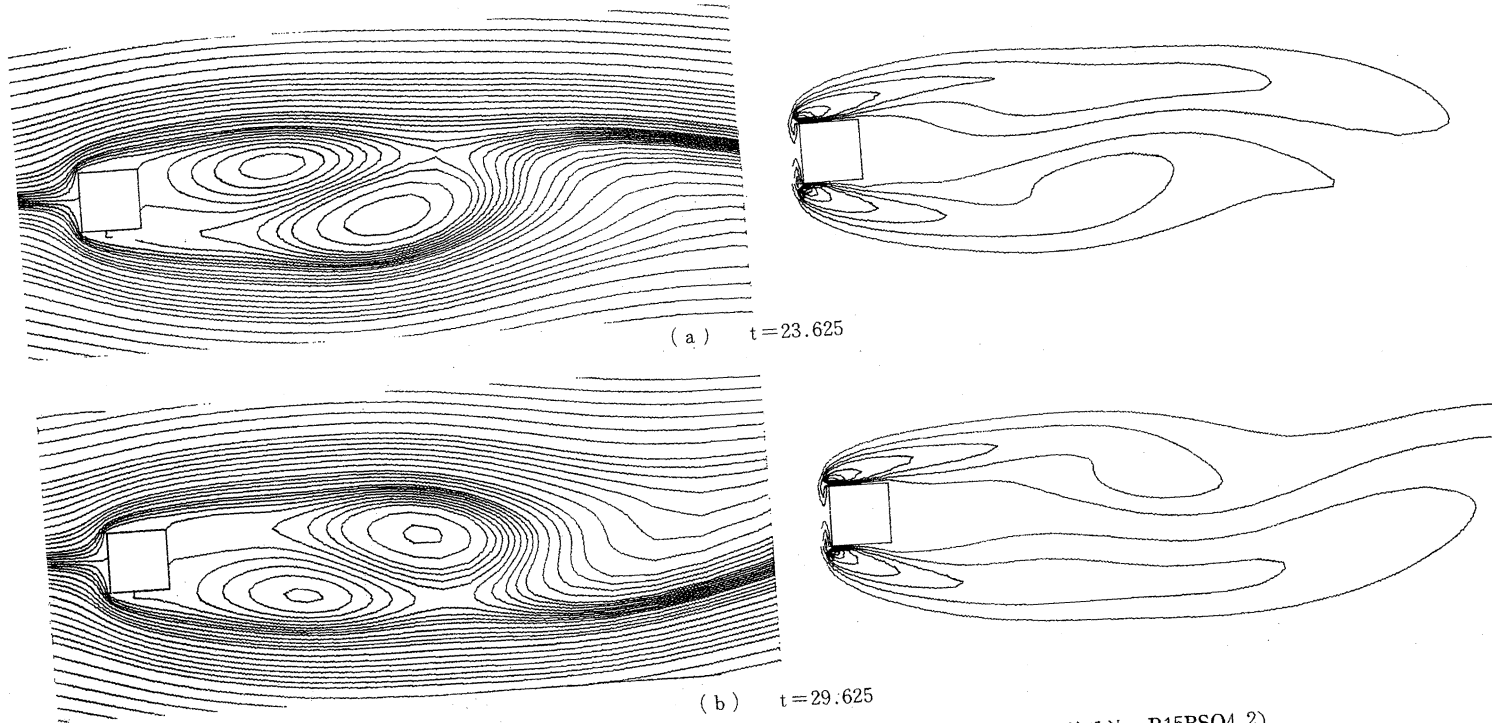


図5.2 静止矩形柱 ($B/H=1$) 周りの流れ, $Re=150$, $\alpha=3^\circ$ (1次精度風上差分法, R15BSQ4.2)

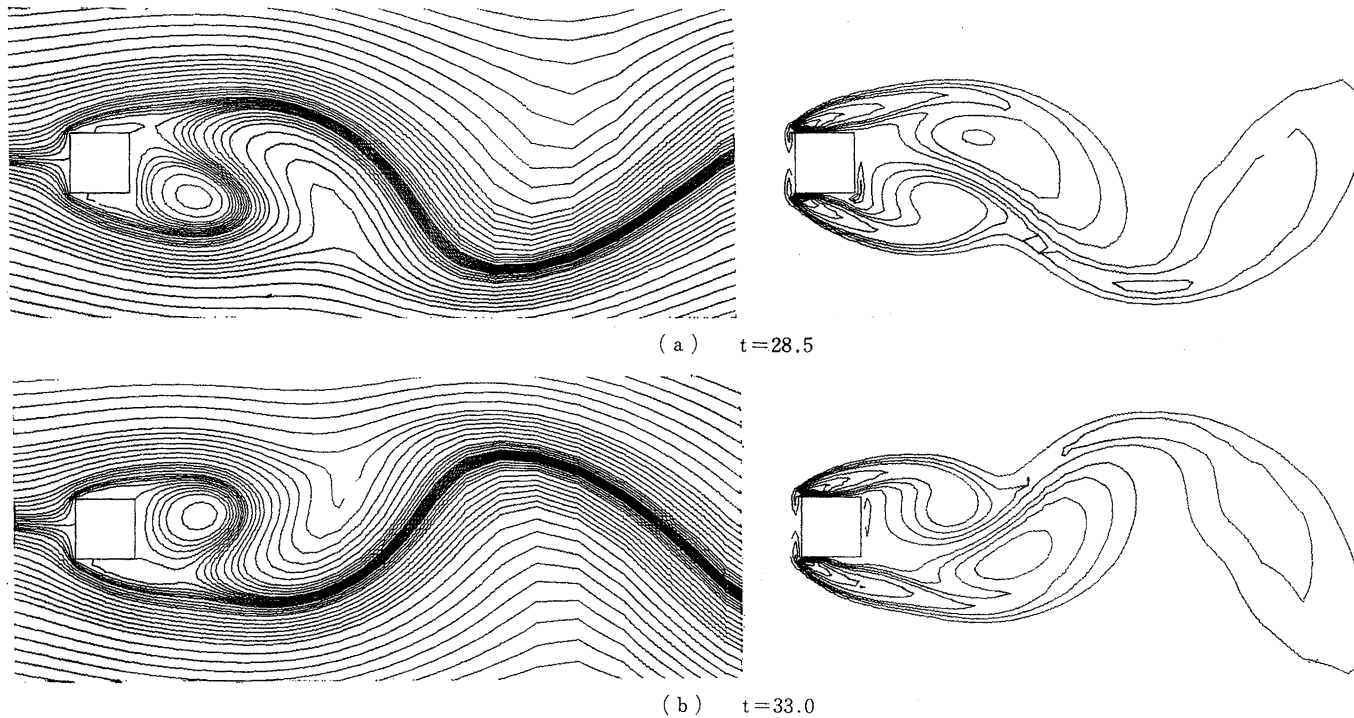


図5.3 静止矩形柱 ($B/H=1$) 周りの流れ, $Re=150$, $\alpha=3^\circ$, $y_c=\pm 3H$ (2次精度風上差分法, R15ASQ4.3)

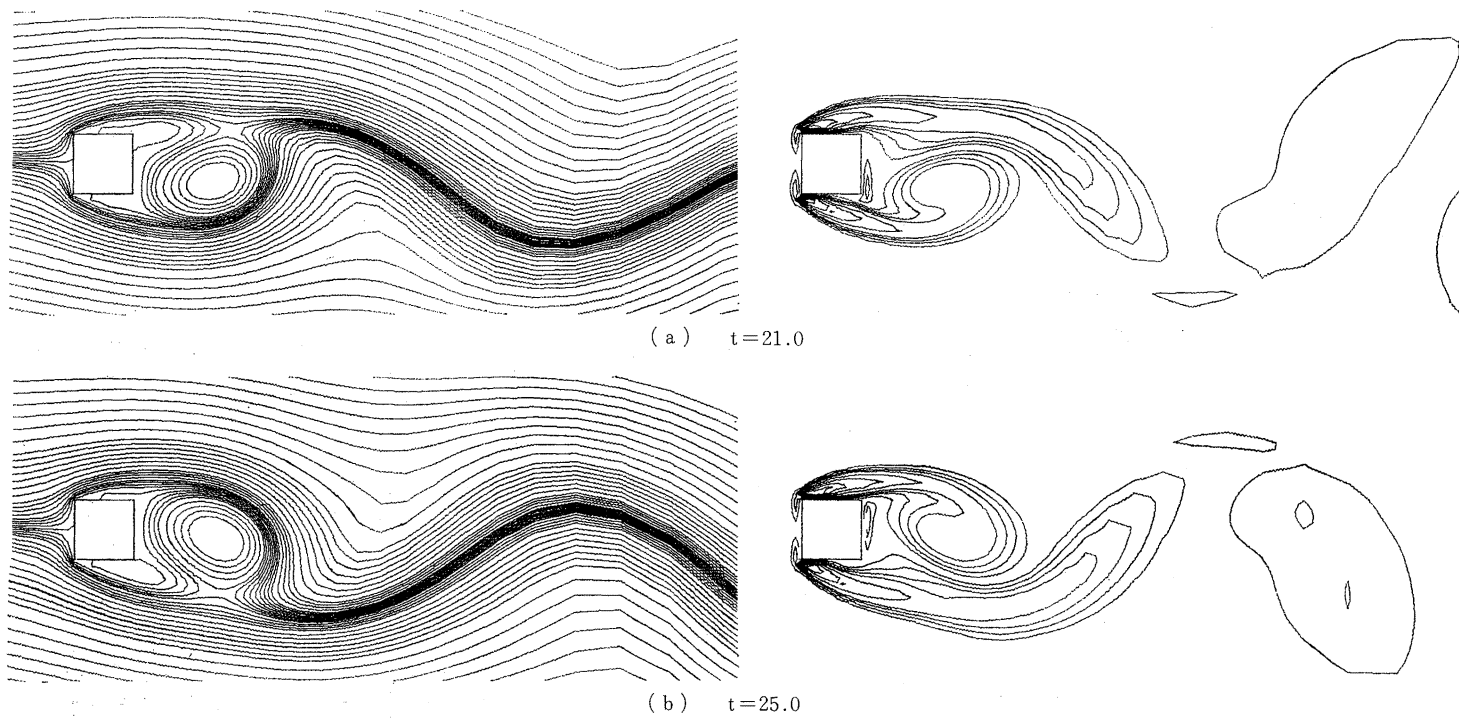
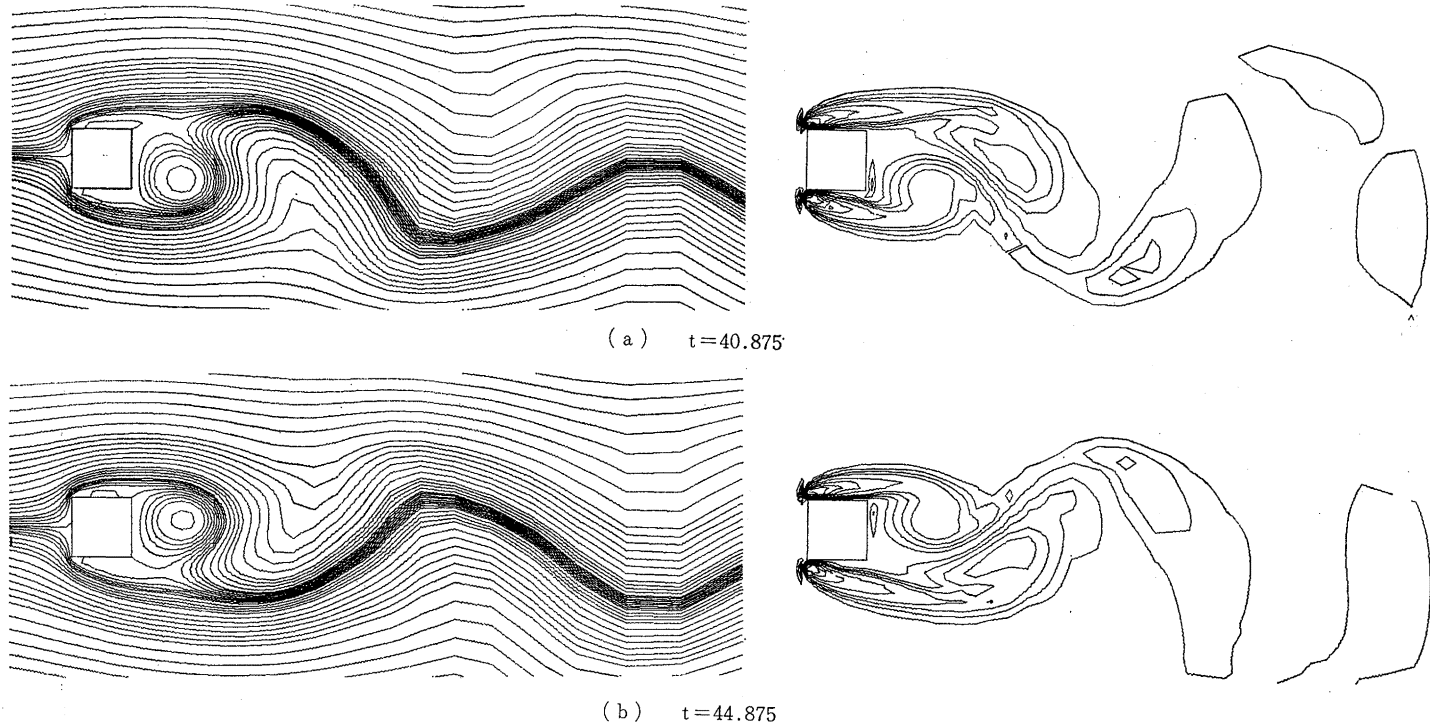


図5.4 静止矩形柱 ($B/H=1$) 周りの流れ, $Re=150$, $\alpha=3^\circ$, $y_c=\pm 4.5H$ (2次精度風上差分法, R15DSQ4.4)



矩形柱周りの流れ

図5.5 静止矩形柱 ($B/H=1$) 周りの流れ, $Re=150$, $\alpha=3^\circ$, $y_b=\pm 8.5H$ (1次精度風上差分法+中央差分法, R15HSQ4.2)

他の解法および後述の可視化実験結果(図5.6)と比べ、様相を異にしており、レイノルズ数150ではもはや1次精度の風上差分法による解法は不相当と判断される。

次に、2次精度の風上差分法の解法によるものは図5.3, 5.4に示す如く、カルマン渦のストローハル数の値も実験値と比べ、妥当な値であり、今の所、かなり有望な解法と考えられる。なお、図5.3は流れと直角な方向(y 方向)における粘性流として取扱う境界の位置 y_b を $y_b = \pm 3H$ にとった場合であり、図5.4は $y_b = \pm 4.5H$ にしたものである。図5.3の粘性流として取り扱う領域の幅の狭い方が渦度分布は y 方向に幾分幅広く拡がり、流れが若干大きい振幅で蛇行するという相違が見られる。更に図5.5は、中央差分法と1次精度の風上差分法を併用して計算した結果である。すなわち、中央差分法は精度は高いが既に図5.1で示した様に計算上不安定である。そこでその不安定の生じ易い矩形柱の上流側領域は計算上安定の極めて良好な1次精度の風上差分法を用い、残りの下流側領域では中央差分法を用いたものである。この解法によれば計算上の不安定が生じないばかりか、図5.6に示す如く、可視化実験による流線模様と良く一致していることがわかる。また、図5.6(c)には、電解沈澱法による矩形柱周りの流れの様相を示す。色素の源となるハンダは矩形柱前面のよどみ点近傍のみ薄くメッキ状に付けてあるので、ハンダによる白い色素は矩形柱前面境界層からの渦度の流跡を表わしている。図5.6(c)の左図は矩形柱周りの渦度分布を示すが、右図の電解沈澱法による流跡線とよく対応している。

一方、一般に高いレイノルズ数の計算ほど、よい効果を示すとされているADI法¹⁰⁾は、本計算ではレイノルズ数が100で早くも計算上不安定となり、計算を続行することが出来なかった。

6. 結 論

一般に高いレイノルズ数域まで広く用いられている1次精度風上差分法で、implicitな解法をレイノルズ数100の静止および並進振動する矩形柱(断面辺長比2)周りの流れの計算に適用した。そして計算された結果を可視化実験結果と比較した。

(1) その結果、矩形柱の加振振動数がカルマン渦のストローハル数に近い時は、後流渦と矩形柱の振動との同期現象、そして両者の振動数が離れている場合には、frequency demultiplicationの現象が発生することなど、流れの挙動はよく一致した。

(2) しかし、数値計算によるカルマン渦のストローハル数の値や矩形柱から離れた下流領域の流れの微細な形状については若干の相違が見られた。そしてレイノルズ数が増大するに伴い、計算と実験の結果の相違が顕著になった。

次に、中央差分法や2次精度の風上差分法を用いたimplicitな解法およびADI法による解法を矩形柱周りの流れ($Re=150$, $B/H=1$)に適用し、種々検討した。その結果

(3) 中央差分法やADI法では計算上不安定が生じ、計算の続行が不可能であった。

(4) 更に高いレイノルズ数においては、2次精度の風上差分法や1次精度風上差分法と中央差分法を併用する解法などが有望な解法と考えられる。

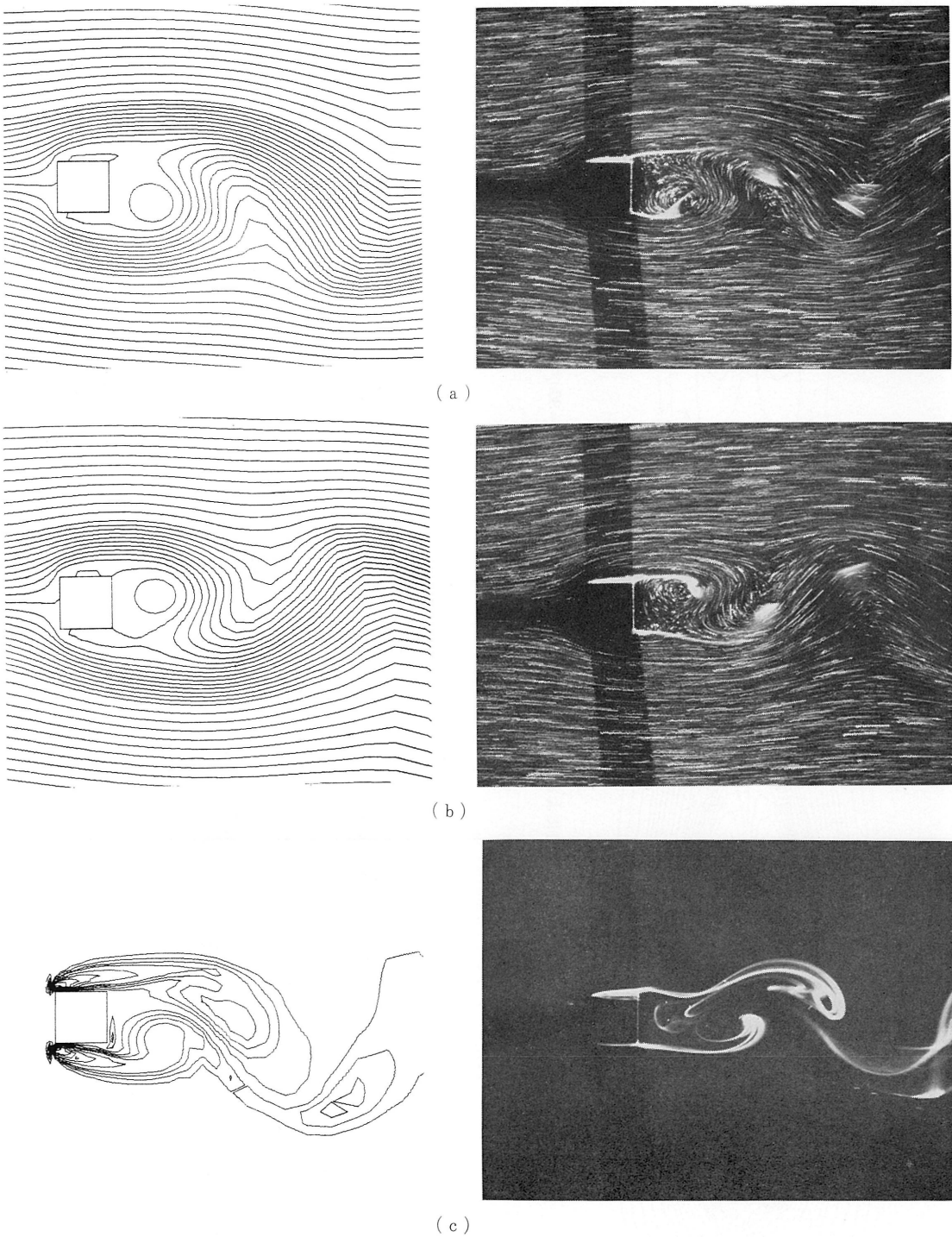
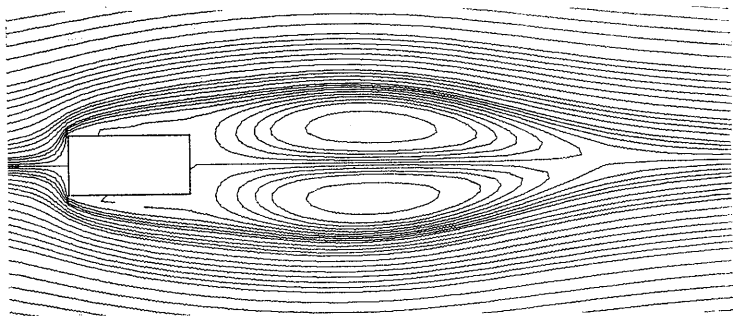
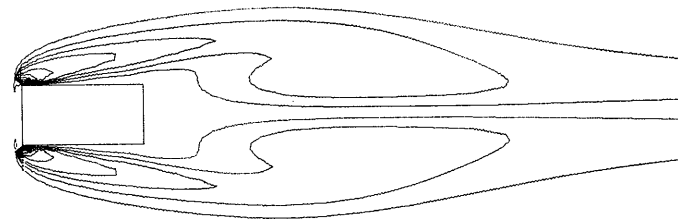


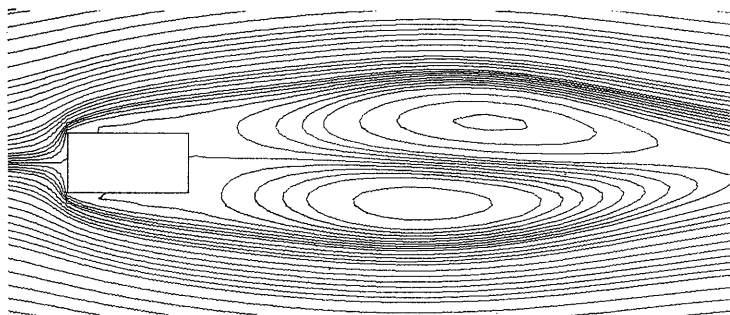
図 5.6 静止矩形柱 ($B/H=1$) 周りの流れ, $Re=150$, 計算 (1次精度風上差分法+中央差分法, R15HSQ4.2) と実験 (アルミ粉末法+電解沈澱法) の結果の比較



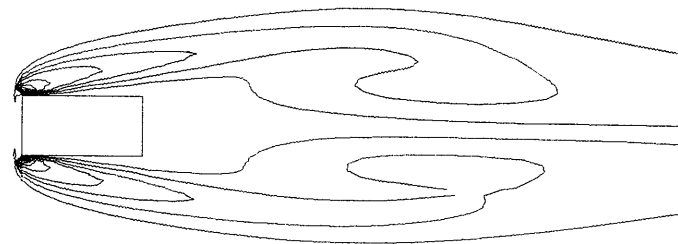
$t=25.25$ (452)

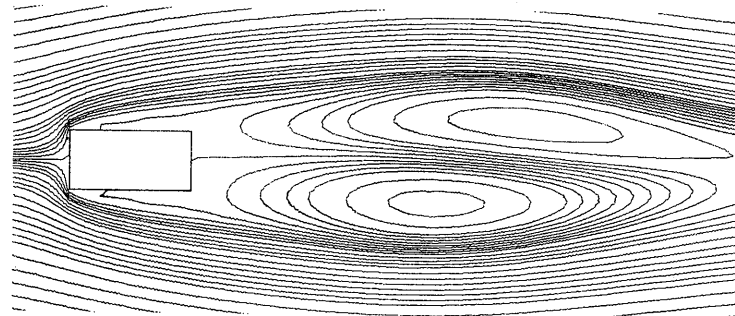


付図1. 1次精度風上差分法による静止矩形柱 ($B/H=2$) 背後の双子渦, $Re=300$, $St_c=0$ (R30BK. 4.2)

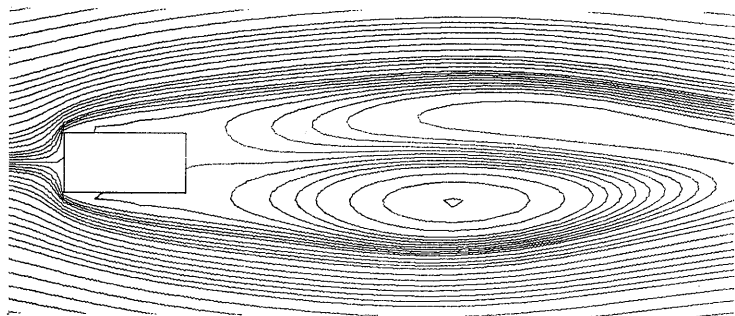
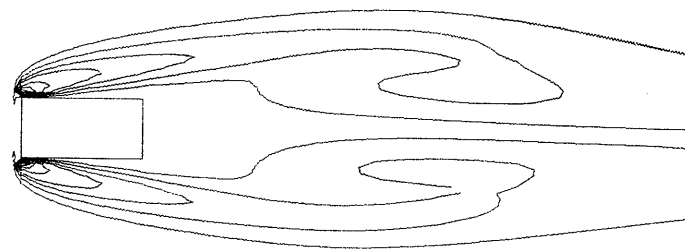


(a) $t=13.0$ (208)

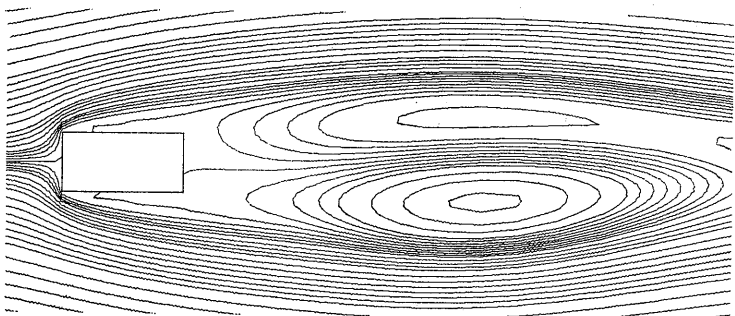
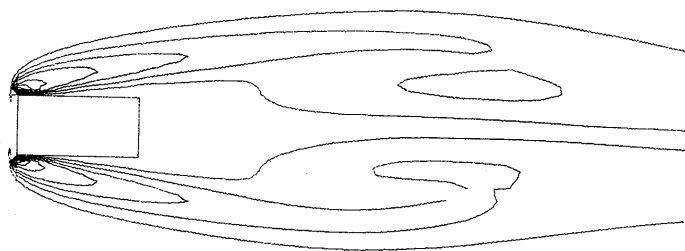




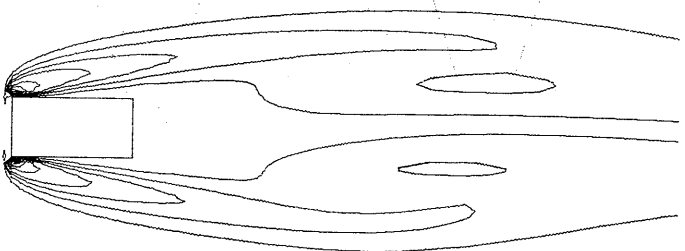
(b) $t=15.0$ (240)



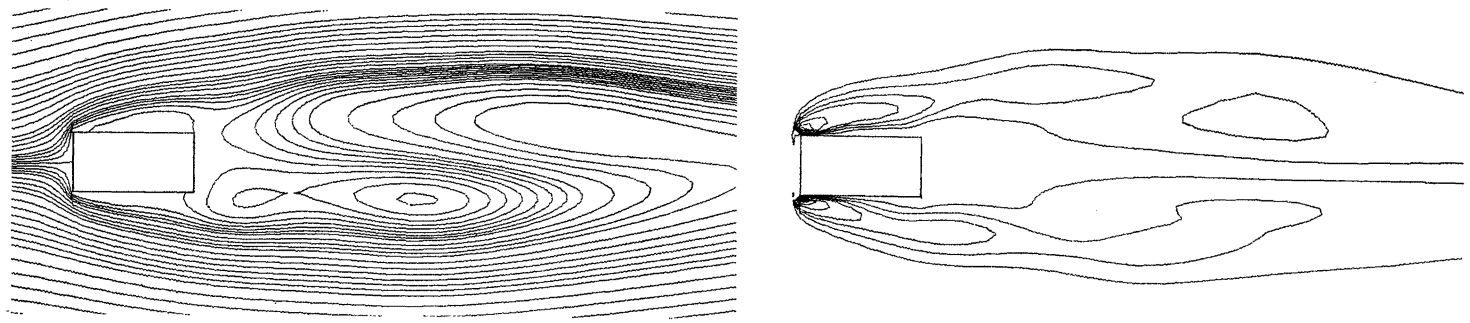
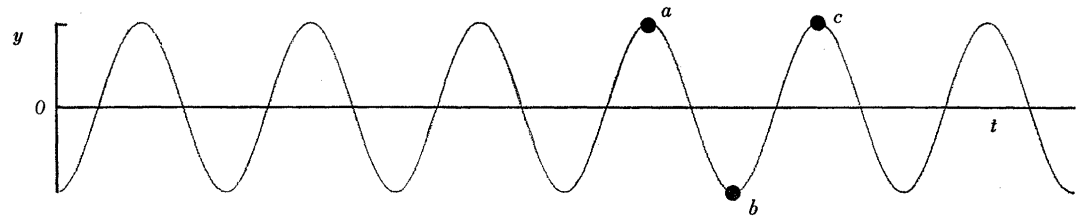
(c) $t=17.0$ (272)



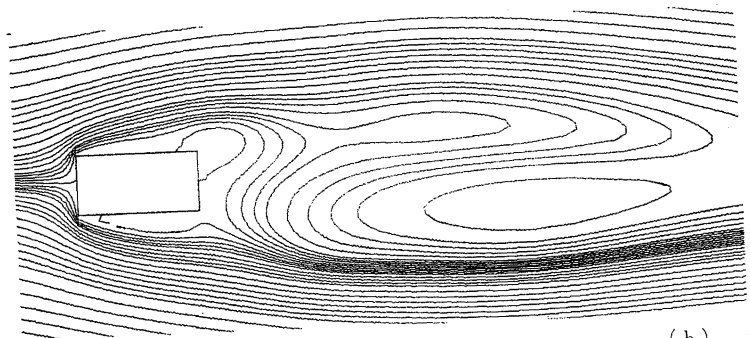
(d) $t=19.0$ (304)



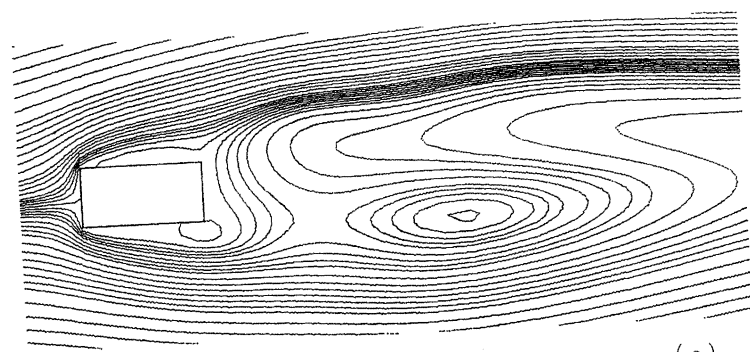
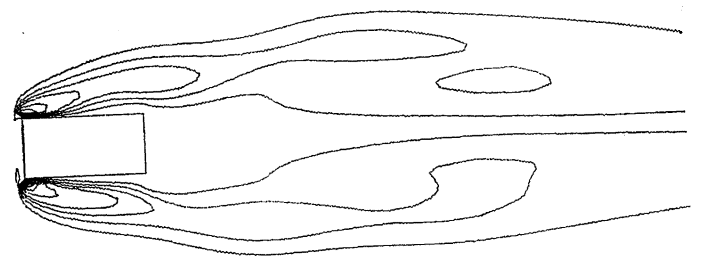
付図2. 1次精度風上差分法による静止矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=300$, $St_c=0$ (R30CK. 4.2)



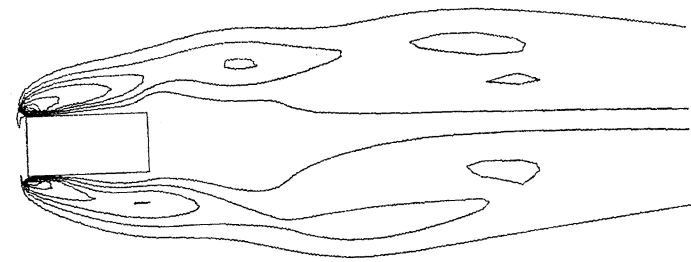
(a) $t=17.5 (280)$



(b) $t=20.0$ (320)

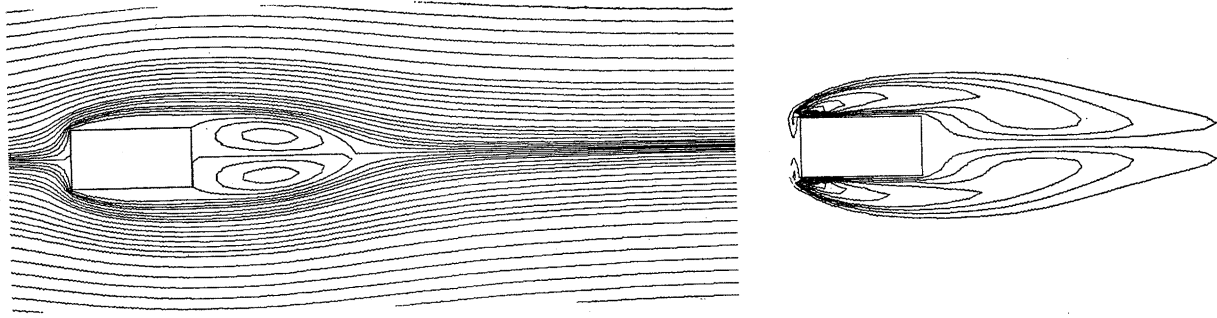


(c) $t=22.5$ (36.0)



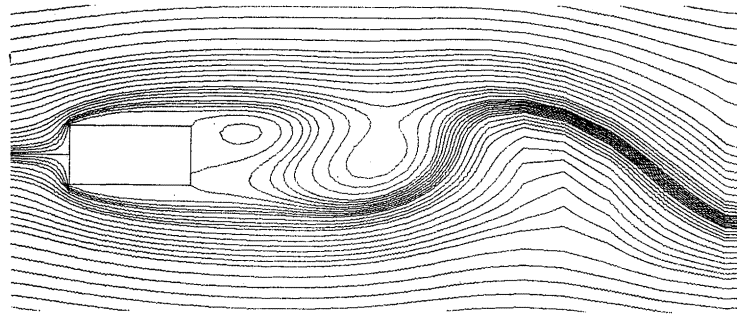
矩形柱周りの流れ

付図3. 1次精度風上差分法による並進振動する矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=300$, $a/H=0.05$, $St_c=0.2$ (R30DK. 4.2)

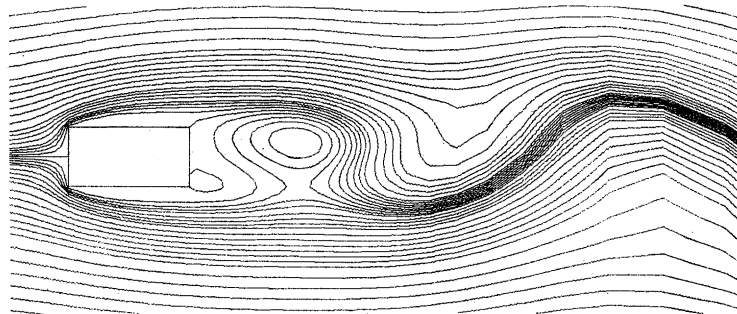


$t=10.25$ (328)

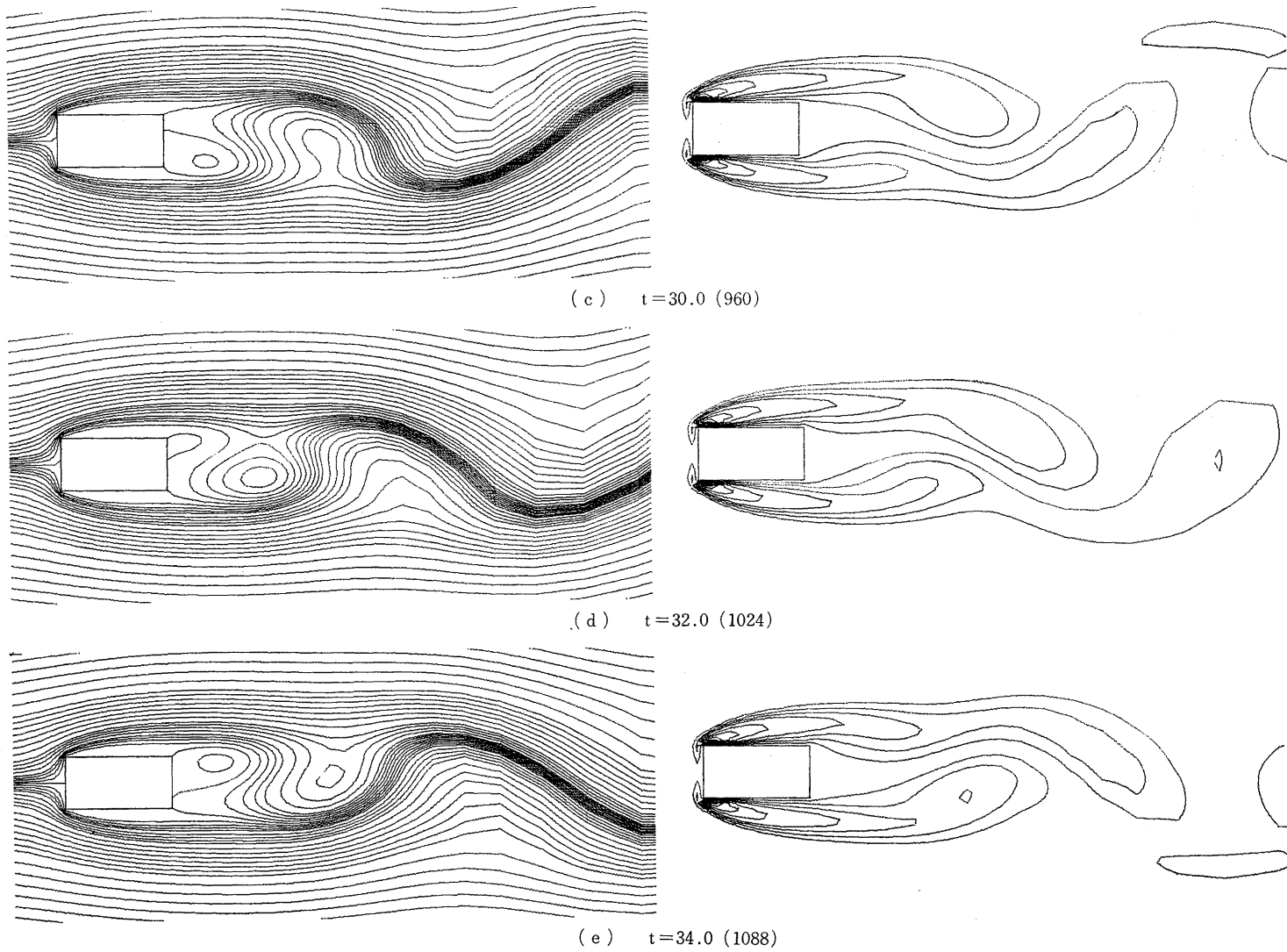
付図4. 2次精度風上差分法による静止矩形柱 ($B/H=2$) 背後の双子渦, $Re=100$, $St_c=0$ (R12IK. 4.2)



(a) $t=26.0$ (832)

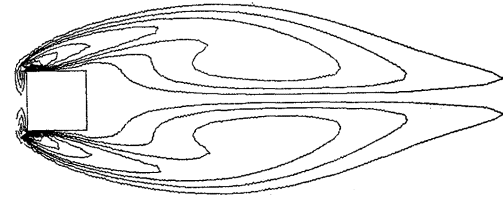
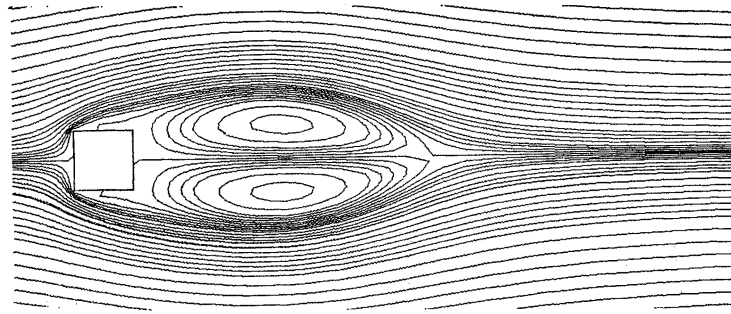


(b) $t=28.0$ (896)



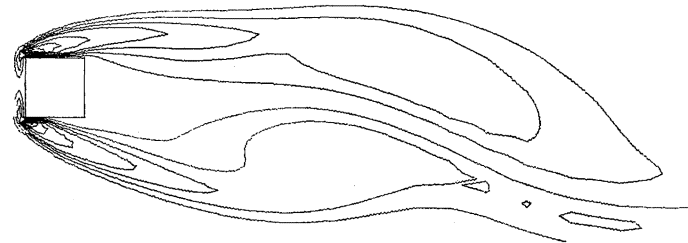
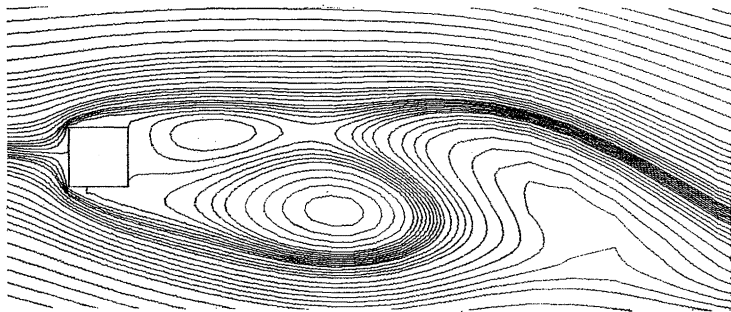
矩形柱周りの流れ

付図5. 2次精度風上差分法による静止矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れ, $Re=100$, $St_c=0$ (R12LK. 4.2)

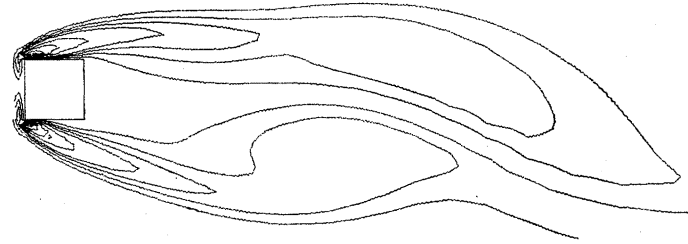
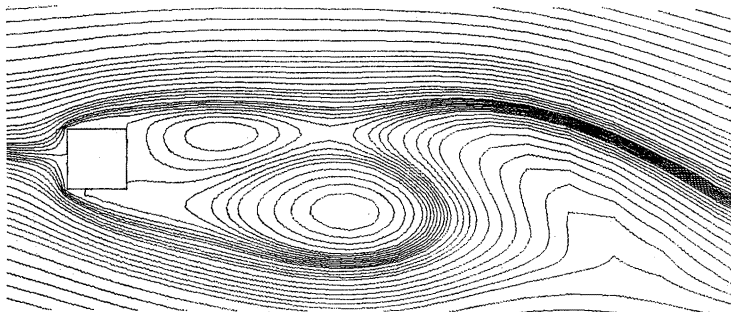


$t=17.625(568)$

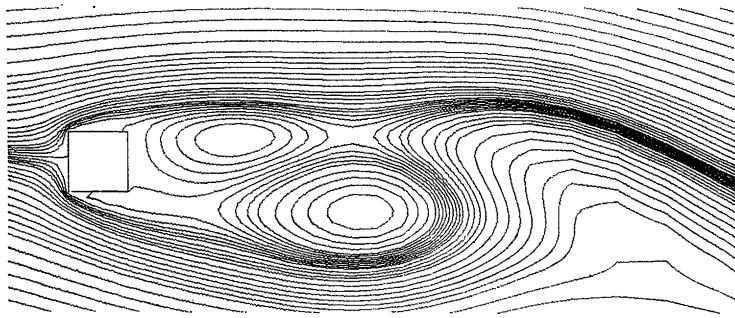
付図6. 2次精度風上差分法による静止矩形柱 ($B/H=1$) 背後の双子渦, $Re=100$, $St_c=0$ (R10ASQ4.2)



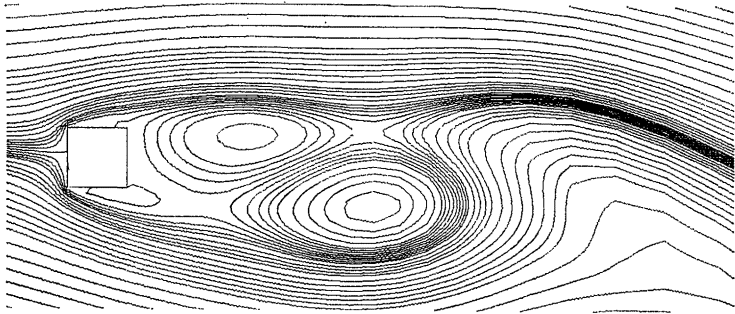
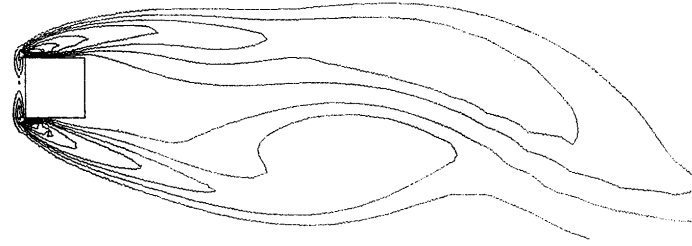
(a) $t=16.0$ (512)



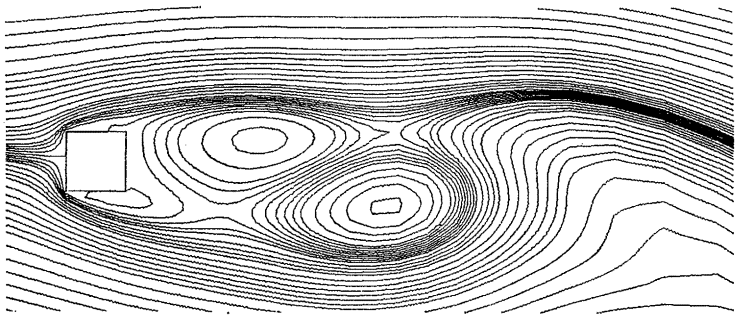
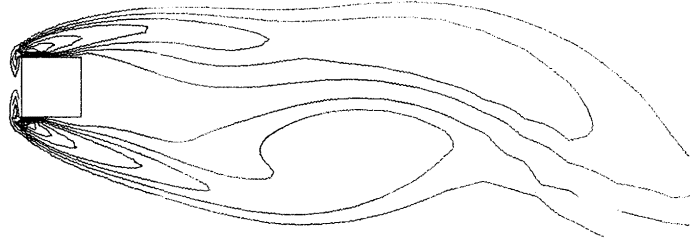
(b) $t=16.5$ (528)



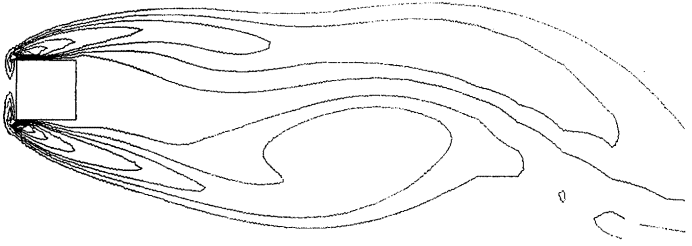
(c) $t=17.0$ (544)



(d) $t=17.5$ (560)



$t=18.0$ (576)



矩形柱周りの流れ

75

付図7. 2次精度風上差分法による静止矩形柱 ($B/H=1$) 周りの流れ, $Re=100$, $\alpha=5^\circ$ (R10BSQ4.2)

なお、本計算は全て本研究所電算機室の大型電算機 FACOM 230-48 を使用して行なわれた。お世話になった関係諸氏に厚くお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Thoman, D. and Szweczyk, A. A., Phys. Fluids, Suppl. II (1969) 76.
- 2) Forsythe, G. E. and Wasow, W., *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, Wiley, New York (1960).
- 3) 岡島他 2 名, 東京大学宇宙航空研究所報告 7, 2 (1971) 334.
- 4) Atias, A. 他 2 名, AIAA J., Vol. 15, No. 2 (1977-2) 263.
- 5) 岡島他 2 名, 機械学会誌, 74-634 (昭 46-11) 1474.
- 6) 岡島・杉谷, 九州大学応用力学研究所報, 46 (昭 52-9) 167.
- 7) 岡島, 九州大学応用力学研究所報, 45 (昭 51-11) 331.
- 8) Bishop, R. E. D. and Hassan, A. Y., Proc. Roy. Soc. A. Vol. 277 (1964) 51.
- 9) Toebes, G. H., Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 91 (1969) 493.
- 10) Lin, C. L. 他 2 名, AIAA J., Vol. 14, No. 7 (1976-7) 900.

付録 1 1 次精度風上差分法によるレイノルズ数300の矩形柱(辺長比 2) 周りの流れ

風上差分法による計算法によれば、付図 1~3 に示すように、レイノルズ数 $Re=300$ であっても、安定してしかもかなり短い計算時間で計算することが出来る。付図 2 には、付図 1 の双子渦の結果を初期値とし、時刻 $t=0\sim 1.0$ の間のみ、 $v_m=0.05$ とした後、 $v_m=0$ とし、 $t=13.0\sim 19.0$ 経た後の流れのパターンを示す。また付図 3 は付図 1 の双子渦を初期値として、振動振幅 $a/H=0.05$, 加振振動数 $St_c=0.2$ で矩形柱を並進振動したときの $t=17.5\sim 22.5$ における、1 周期の流れの様相変化である。図からいずれの場合にも、実際の流れの挙動とはかなり相違しているように思われる。

付録 2 2 次精度風上差分法によるレイノルズ数 100 の矩形柱周りの流れ

付図 4~7 には、2 次精度の風上差分法による解法によって計算された矩形柱周りの流れ ($Re=100$, 矩形断面辺長比 $B/H=2$, 1) を示す。計算はいずれの場合においても安定である。付図 5 は付図 4 の双子渦の計算結果を初期値とし、時刻 $t=0\sim 2.5$ の間だけ、矩形柱を並進振動をさせ、然る後、静止させて $t=26.0\sim 34.0$ の間の矩形柱 ($B/H=2$) 周りの流れの様相変化を示す。流れのパターン変化からカルマン渦のストローハル数はこの場合 $St_K=0.125$ であり、実験値の $St_K=0.12\sim 0.125$ と極めて良く一致している。また、図 7 の計算結果 ($Re=100$, $B/H=1$) も同様な解法で付図 6 の双子渦の結果を初期値として、矩形柱の迎え角 α を 5° つけて計算したものである。未だ、初期値として与えた双子渦の根跡が残っていることが原因と思われるが渦の大きさが異常に大きい。もう少し追跡調査が必要と考えられる。

(昭和 53 年 11 月 7 日 受理)