

一部に板を張った直方体骨組の振動解析

河島, 佑男

藤本, 孝

<https://doi.org/10.15017/4743572>

出版情報：應用力學研究所所報. 45, pp.491-511, 1976-11. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



一部に板を張った直方体骨組の振動解析

河 島 佑 男* 藤 本 孝**

概 要

一部に板を張った直方体骨組を梁要素と板要素とからなる構造とみなして、その固有振動数と固有モードを直接剛性法を用いて求めた。板の面内振動に関しては、剪断流を一樣とする仮定、すなわち滑節型板場剪断流理論を用いて自由度を減らした解析を行なったが、その数値計算結果は実験結果と良く一致した。

記 号

A	: 梁の断面積
$E_b(E_p)$	: 梁(板)の縦弾性係数
$G_b(G_p)$	: 梁(板)の横弾性係数
I	: 梁の断面二次モーメント
J	: 梁の断面二次極モーメント
M	: モーメント
Q	: 軸力または剪断力
θ	: 撓み角, または捩れ角
V	: 撓み, または軸方向変位
Z	: 要素の動的剛性マトリックス
L	: 梁要素の長さ
L_1, L_2	: 矩形板要素の横と幅の長さ
l, h, b	: 直方体骨組の長さ, 高さ, 幅
$\rho_b(\rho_p)$	: 梁(板)の単位体積当りの質量
t	: 板厚
ν	: ポアソン比
D	: 曲げ剛性
ω	: 円振動数
x, y, z	: 基準座標系
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	: 局所座標系
i, j, k, l	: 要素の節点番号

1. 結 言

骨組の振動解析に関する研究¹⁾はこれまでに数多く報告されているが、車両や自動車ボディなどの構

* 九州大学教授, 工学部

** 九州大学助手, 工学部

造に広く使用されている板を張った骨組構造については研究例が少ないようである。本研究では、そのような薄板構造物の振動解析の基礎として、直方体骨組の一部に板を張った構造物の固有振動数と固有モードを直接剛性法を用いて解析した。この研究で取り上げた比較的簡単な構造でさえ、仮定を置かずに板の振動を考慮すると自由度が大幅に増加する。従って、本解析では板の面内振動に関する自由度を減らすために、航空機構造解析の分野で発展した滑節型板場剪断流理論²⁾、すなわち板場の剪断流を一樣とする仮定を用いた。板を張った骨組の静的解析に対するこの仮定の妥当性については、すでに桐岡氏³⁾によって明らかにされている。

本報告では、まず、両側面に板を張った直方体骨組の場合について板の面外振動を無視した解析を行ない、次に上下面に板を張った場合について板の面内および面外振動の両方を考慮した解析を行なった。

以上の解析では、構造物を三種類の構造要素、すなわち梁要素と面内振動に関する縁梁付矩形板要素および面外振動に関する矩形板曲げ要素からなるものとみなし、構造全体の動的剛性マトリックスは、これらの構造要素の動的剛性マトリックスを重ね合せ、変形適合条件および境界条件を考慮することにより求めた。

最後に、数値計算によって得られた固有振動数および固有モードを実験結果と比較した。また、骨組に張られた板の剛性と慣性の影響を評価するために、板なしの直方体骨組の固有振動数、モードとも比較した。

2. 構造要素の動的剛性マトリックス

本解析で用いられる構造要素は、(i) 梁要素、(ii) 面内振動に関する縁梁付矩形板要素、(iii) 面外振動に関する矩形板曲げ要素である。一樣断面の梁要素の動的剛性マトリックスは振動方程式の解を用いて解析的に求められる。一方、(ii) と (iii) の板要素については、一般的な境界条件に対する解析解が求められないので、適当な変位関数を仮定する方法で動的剛性マトリックスを求める。以下、これらの要素の動的剛性マトリックスを簡単に説明する。

2.1. 梁 要 素

一般的な外力を受ける一樣な梁要素 $i-j$ とその局所座標系を図1に示す。節点 i には、モーメントと角変位だけを、一方節点 j には直線力とその変位だけを示している。モーメントと角変位は各軸の右

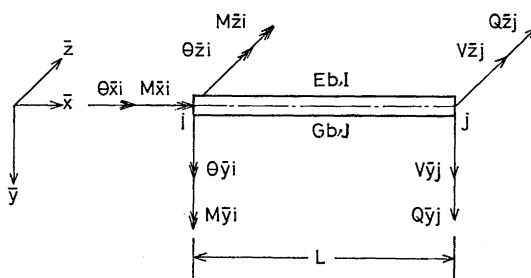


図 1 梁 要 素

回りを正とし、直線力とその変位は各軸の正の方向を正とする。この定義は両節点 i, j において変らないものとする。

長さ L の梁要素の一般的な動的剛性関係式をマトリックス形式で表わすと次のようになる。

$$\{\bar{q}_b\} = [\bar{Z}_b] \{\bar{d}_b\} \quad (2.1)$$

ただし、

$$\{\bar{q}_b\} = \{M_{\bar{x}i}, M_{\bar{y}i}, M_{\bar{z}i}, Q_{\bar{x}i}L, \dots, Q_{\bar{z}j}L\}$$

$$\{\bar{d}_b\} = \{\theta_{\bar{x}i}, \theta_{\bar{y}i}, \theta_{\bar{z}i}, V_{\bar{x}i}/L, \dots, V_{\bar{z}j}/L\}$$

簡単な場合として、一様な円形断面の梁要素を考え、剪断変形および軸方向変形を無視すると、式(2.1)の動的剛性マトリックス $[\bar{Z}_b]$ は二軸回りの曲げ ($x-y$ および $x-z$ 面内) と一軸 (x 軸) 回りの捩りを考慮すれば求められ、表1で与えられる。この詳細な誘導については付録Aに示す。また、表1に示される $[\bar{Z}_b]$ は座標変換や重ね合せを組織的に行なえるように軸力と軸方向変位に対応する行と列をすべて0と置き、マトリックスの次数を 12×12 に拡張している。

表1 梁要素の動的剛性マトリックス

$$\bar{Z}_b = \begin{bmatrix} T_{\bar{x}}F_7 & & & & & & & & & & & \\ 0 & -B_{\bar{y}1}F_8 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -B_{\bar{z}1}F_3 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & B_{\bar{z}2}F_1 & 0 & B_{\bar{z}3}F_5 & & & & & & & \\ 0 & -B_{\bar{y}2}F_1 & 0 & 0 & 0 & B_{\bar{y}3}F_6 & & & & & & \\ -T_{\bar{x}}F_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\bar{x}}F_7 & & & & & \\ 0 & -B_{\bar{y}1}F_4 & 0 & 0 & 0 & B_{\bar{y}2}F_2 & 0 & -B_{\bar{y}1}F_3 & & & & \\ 0 & 0 & -B_{\bar{z}1}F_4 & 0 & -B_{\bar{z}2}F_2 & 0 & 0 & 0 & -B_{\bar{z}1}F_3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & B_{\bar{z}2}F_2 & 0 & -B_{\bar{z}3}F_6 & 0 & 0 & 0 & -B_{\bar{z}2}F_1 & 0 & B_{\bar{z}3}F_5 & \\ 0 & -B_{\bar{y}2}F_2 & 0 & 0 & 0 & -B_{\bar{y}3}F_6 & 0 & B_{\bar{y}2}F_1 & 0 & 0 & 0 & B_{\bar{y}3}F_6 \end{bmatrix} \quad \text{S. Y. M.}$$

ただし

$$\lambda_b^4 = \rho_b A \omega^2 / E_b I, \quad \lambda_b^2 = \rho_b \omega^2 / G_b, \quad B_{\bar{y}1} = (E_b I / L) (\lambda_b L), \quad B_{\bar{y}2} = (E_b I / L) (\lambda_b L)^2$$

$$B_{\bar{y}3} = (E_b I / L) (\lambda_b L)^3, \quad T_{\bar{x}} = \lambda_b L, \quad B_{\bar{z}1} = B_{\bar{y}1}, \quad B_{\bar{z}2} = B_{\bar{y}2}, \quad B_{\bar{z}3} = B_{\bar{y}3}$$

$$F_0 = 1 - \cos \lambda_b L \cosh \lambda_b L, \quad F_1 = \sin \lambda_b L \sinh \lambda_b L / F_0, \quad F_2 = (\cos \lambda_b L - \cosh \lambda_b L) / F_0$$

$$F_3 = (\cos \lambda_b L \sinh \lambda_b L - \sin \lambda_b L \cosh \lambda_b L) / F_0, \quad F_4 = (\sin \lambda_b L - \sinh \lambda_b L) / F_0$$

$$F_5 = (\cos \lambda_b L \sinh \lambda_b L + \sin \lambda_b L \cosh \lambda_b L) / F_0, \quad F_6 = (\sin \lambda_b L + \sinh \lambda_b L) / F_0$$

$$F_7 = \cot \lambda_b L, \quad F_8 = \operatorname{cosec} \lambda_b L$$

2.2. 縁梁付矩形板要素

緒言で述べたように、自由度を減らすために滑節型板場剪断流理論を用いる。具体的には次のような仮定を置く。

- (1) 板は面内では剪断力を負担し、挫屈しないものとする。
- (2) 軸力は全て周辺梁が負担する。

(3) 周辺梁の材端を一次元ヒンジとし、板の剪断流は一樣とする。

(4) 周辺梁は板の縁によって拘束され、板の面内には曲がらないものとする。

以上の仮定に基づいて定義された縁梁付矩形板要素を図 2 に示す。

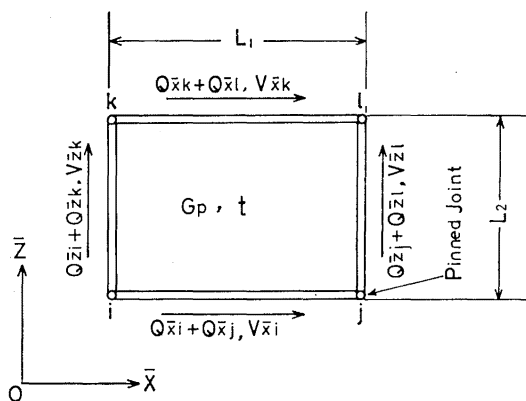


図 2 縁梁付矩形板要素

この要素に対する動的剛性マトリックスは次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} (Q_{xi} + Q_{xj})L_2 \\ (Q_{xk} + Q_{xl})L_2 \\ (Q_{zi} + Q_{zj})L_1 \\ (Q_{zk} + Q_{zl})L_1 \end{Bmatrix} = G_p t L_1 L_2 \begin{Bmatrix} 1 - \alpha/3 - 2\gamma/3 - \xi & & & \\ -1 - \alpha/6 - \gamma/3 & 1 - \beta/3 - \gamma - 2\xi/3 & & \\ 1 & -1 & 1 - \beta/3 - 2\delta/3 - \zeta & \\ -1 & 1 & -1 - \beta/6 - \delta/3 & 1 - \beta/3 - 2\delta/3 - \zeta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{xi}/L_2 \\ V_{xk}/L_2 \\ V_{zi}/L_1 \\ V_{zl}/L_1 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

ただし、

$$\alpha = \rho_p L_2^2 \omega^2 / G_p, \quad \beta = \rho_p L_1^2 \omega^2 / G_p, \quad \gamma = \rho_b A L_2^2 \omega^2 / G_p t L_1^2$$

$$\delta = \rho_b A L_1^2 \omega^2 / G_p t L_1, \quad \xi = \rho_b A L_2 \omega^2 / G_p t, \quad \zeta = \rho_b A L_1 \omega^2 / G_p t$$

式 (2.2) の誘導は付録 B に示す。

2.3. 矩形板曲げ要素

D. J. Dawe⁴⁾ によって求められた矩形板曲げ要素の動的剛性マトリックスを、本解析では図 3 に示す座標系および節点番号に変換して用いる。

動的剛性関係式は次式で与えられる。

$$\{\bar{q}_p\} = [\bar{Z}_p] \{\bar{d}_p\} \quad (2.3)$$

2.4. 座標変換マトリックス

図 1, 図 2, および図 3 に示される様に, 局所座標系について求められた各要素の動的剛性マトリックスは, 変換マトリックスを適用することによって基準座標系 (全体座標系) に変換される. 即ち個々の要素の基準座標系に関する動的剛性マトリックス $[Z]$ は, 次式に示されるマトリックス変換により求められる.

$$[Z] = [T]^{-1} [\bar{Z}] [T] \quad (2.4)$$

たとえば, 図 1 に示される三次元梁要素の場合には, 変換マトリックス $[T]$ は次式で与えられる.

$$[T] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \text{S. Y. M.} \\ 0 & \mathbf{A} \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ただし,

$$\lambda_{\bar{x}} = \cos \theta_{x\bar{x}}, \quad \lambda_{\bar{y}} = \cos \theta_{x\bar{y}}, \quad \lambda_{\bar{z}} = \cos \theta_{x\bar{z}}$$

$$\mu_{\bar{x}} = \cos \theta_{y\bar{x}}, \quad \mu_{\bar{y}} = \cos \theta_{y\bar{y}}, \quad \mu_{\bar{z}} = \cos \theta_{y\bar{z}}$$

$$\nu_{\bar{x}} = \cos \theta_{z\bar{x}}, \quad \nu_{\bar{y}} = \cos \theta_{z\bar{y}}, \quad \nu_{\bar{z}} = \cos \theta_{z\bar{z}}$$

θ_{rs} は r 軸と s 軸のなす角である。

3. 理論解析

3.1. 両側面に板を張った直方体骨組

図 4 に示される場合について, 板の面外振動を無視した解析を行なう. 縁梁付矩形板要素のところで述べた様に, 板周辺の梁相互の剛結部は板面内における曲げに対して一次元ヒンジとして挙動するものとみなす. ただし, Z 軸方向の梁 (1-5, 2-6, 3-7, 4-8) は板周辺の梁と剛結されている.

上に述べた一次元ヒンジの組合せの様式は, ただ一通りではないが, 種々の場合に対して行なった計

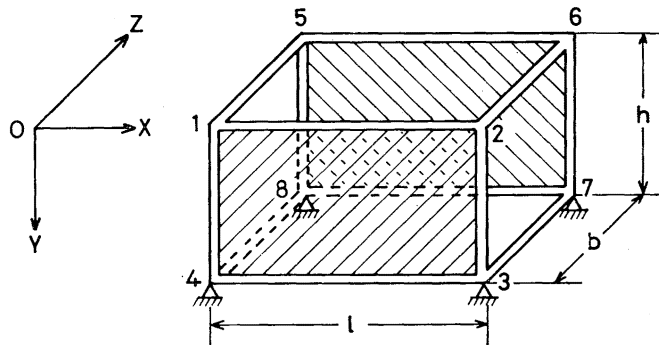
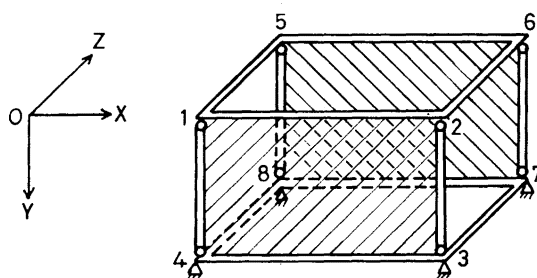


図 4 両側面に板を張った直方体骨組



算結果の差は無視できる程度のものであった。そこで、本解析ではヒンジの取り方を図5に示すように選んだ。

構造全体の動的剛性マトリックスを求める手順を以下に述べる。まず、表 1 で与えられる梁要素の動的剛性マトリックスを基準座標系に変換し、それらを重ね合わせて骨組だけの動的剛性マトリックスを求める。ただし、 x 軸および y 軸方向の梁については、板面内の曲げを無視する必要がある。たとえば、 X 軸方向の梁の場合には、表 1 で与えられる動的剛性マトリックスの Z 軸に関するモーメントと角変位および Y 軸方向の剪断力と変位に対応する行と列の全てを 0 と置くことによって無視され、動的剛性マトリックスは表 3 に示される様になる。 Y 軸方向の梁も同様にして板面内の曲げを無視できる。図 5 に示される様に節点総数は 8 で、各節点自由度は 6 に拡張されているので、以上の様にして求められた骨組だけの動的剛性マトリックスは 48×48 となる。このマトリックスは、次の境界条件および変形適合条件により、次数 28×28 になる。

境界条件 : $V_{xi}=V_{yi}=V_{zi}=0 \quad (i=3, 4, 7, 8)$

$$\text{變形適合条件: } V_{x1}=V_{x2}, V_{x5}=V_{x6}, V_{z1}=V_{z5}, V_{z2}=V_{z6} \quad (3.1)$$

$$V_{y1}=V_{y2}=V_{y5}=V_{y6}=0$$

次に，両側面の縁梁付矩形板要素の動的剛性マトリックスを重ね合わせる．ただし，両側面はいずれも

表 3 板周辺梁 (x 軸方向) の動的剛性マトリックス

[illegible]

下部の二点でピンによって支持されているので、この境界条件 ($V_{x3}=V_{x7}=0$, $V_{y3}=V_{y4}=V_{y7}=V_{y8}=0$) を代入すると両側面の動的剛性マトリックスは次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} (Q_{x1}+Q_{x2})h \\ (Q_{x5}+Q_{x6})h \end{Bmatrix} = G_{pt}lh \begin{bmatrix} 1-\alpha/3-2\gamma/3-\xi & 0 \\ 0 & 1-\alpha/3-2\gamma/3-\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{x1}/h \\ V_{x5}/h \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

また、梁 1-5、および 2-6 については、軸方向の剛体並進運動による慣性力を考慮しなければならない。この慣性力を剛性関係式の形で表わすと、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} (Q_{z1}+Q_{z5})b \\ (Q_{z2}+Q_{z6})b \end{Bmatrix} = -\rho b^3 A \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{z5}/b \\ V_{z6}/b \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

骨組だけの動的剛性マトリックに (3.2) 式、および (3.3) 式で示されるマトリックスを重ね合わせた後においても、全体の動的剛性マトリックスの自由度は 28×28 のままである。

このようにして得られた 28×28 のマトリックスに、滑節型板場剪断流理論を用いたために生ずる付加的な変形適合条件を代入して最終的に縮小されたマトリックスを得る。この変形適合条件は、縁梁付矩形板要素の節点に作用する振りモーメント M_{zk} および振り角 θ_{zk} , ($k=1, 2, 3, \dots, 8$) を板周辺の梁に作用する等価な軸力および節点変位に置き換えることにより得られる。

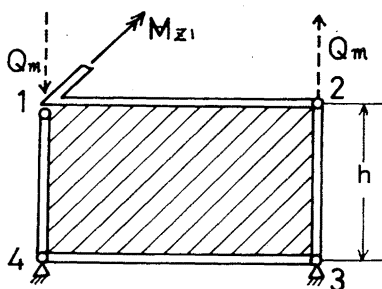


図 6 振りモーメントとその等価剪断力

たとえば節点 1 について考えると、図 6 に示す様に一次元ヒンジを入れているので、振りモーメント M_{z1} は梁 1-2 に伝えられる。梁 1-2 は板の縁によって板面内の曲げを拘束されると仮定しているので、振りモーメント M_{z1} は梁 1-4、および 2-3 に作用する等価な軸力 Q_m に置き換えられる。即ち

$$Q_m = -M_{z1}/l \quad (3.4)$$

しかし、梁 1-4、2-3 は下部で支持されているので軸方向変位を生じない。従って、 Q_m すなわち M_{z1} は板の面内変形に寄与せず、振り角 θ_{z1} は (3.5) 式に示す様に 0 となる。

$$\theta_{z1} = (V_{y2} - V_{y1})/l = 0, \quad (V_{y1} = V_{y2} = 0) \quad (3.5)$$

図 5 に示す様に一次元ヒンジを入れた場合には、全ての節点で上に述べたと同じことが成り立つので変形適合条件は次式で与えられる。

$$\theta_{zk} = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, 8) \quad (3.6)$$

(3.6) 式の変形適合条件より, 自由度が8減少するから, 最終的に得られるマトリックスの次数は 20×20 となる. このマトリックスの行列式を零と置くことにより振動数方程式が求められる.

3.2. 上下面に板を張った直方体骨組

図7に示す如く一次元ヒンジを入れた場合について, 板の面外振動も考慮した解析を行なう. 板の面外振動を考慮するために, 上下板はいずれも12個の矩形板曲げ要素に分割される. 矩形板曲げ要素の動的剛性マトリックスは表2に示されている.

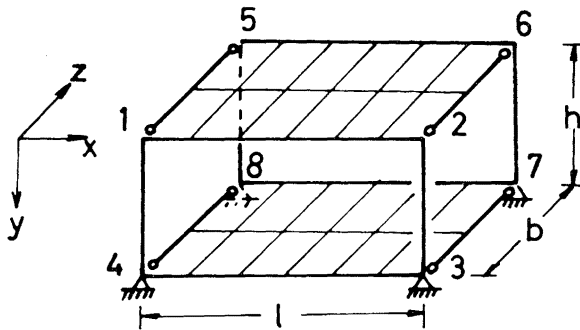


図7 上下面に板を張った直方体骨組

板場の面内振動については, 下面は4点で支持されているので考える必要はなく, 上面の動的剛性マトリックスだけを考えればよい. これは式(2.2)で与えられる.

境界条件, 変形適合条件は側面に板を張った場合と同じであるが, 滑節型板場剪断流理論に基づく付加的な変形適合条件は異なる. この条件は, 図8に示すように, 振りモーメント M_{yk} ($k=1, 2, 3, \dots, 8$) を等価な軸力 Q_m に置き換えることによって求められる. M_{yk} と Q_m の関係は次式によって与えられる.

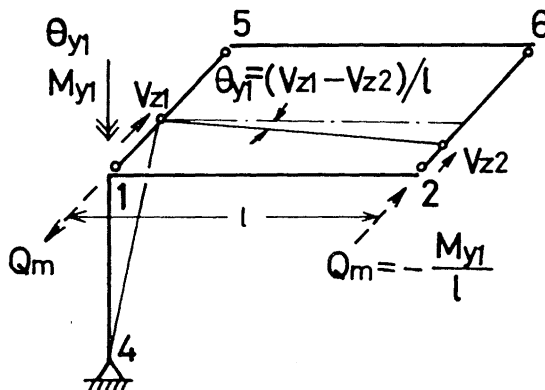


図8 振りモーメントとその等価剪断力

$$Q_m = -M_{yk}/l \quad (k=1, 2, 3, \dots, 8)$$

一方、振り角 θ_{yk} は z 方向節点変位によって次の様に表わせる。

$$\theta_{y1} = \theta_{y2} = \theta_{y5} = \theta_{y6} = (V_{z6} - V_{z8})/l$$

$$\theta_{y3} = \theta_{y4} = \theta_{y7} = \theta_{y8} = (V_{z8} - V_{z7})/l$$

以上述べた点を考慮すれば、両側面に板を張った場合と同様の手順で全体の動的剛性マトリックスが得られる。ただし、この場合には板の面外振動を考慮したために、マトリックスの次数が大幅に増加し、 122×122 となる。そこで、構造物の対称性を利用し、図 9 に示される X - Y および Y - Z 面に関する対称振動あるいは逆対称振動モードに分けて、マトリックスの次数を減らした計算を行なう。対称、逆対称条件の組み合わせ、およびそれに対応するマトリックスの次数は次の通りである。

X - Y 面	Y - Z 面	次 数
対 称	対 称	46×46
逆対称	対 称	47×47
対 称	対称逆	47×47
逆対称	逆対称	48×48

対称あるいは逆対称条件が成り立たないモード、例えば上面が剛体回転する様なモードについては、全体の動的剛性マトリックスを直接計算しなければならない。ここでは、そのようなモードに対しては精度は落ちるけれども、計算の労力を少なくするために、板の分割数を減らした計算を行なった。

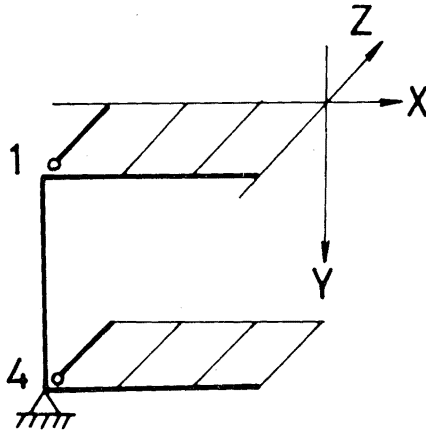


図 9 X - Y 面

4. 計算結果と実験結果の比較および考察

数値計算および実験に用いた構造物仕様は次の通りである。

$$l=120 \text{ cm}, \quad b=60 \text{ cm}, \quad h=60 \text{ cm}$$

骨組は外径 21.7 mm, 厚さ 2.5 mm の鋼管

板は厚さ 1.2 mm のアルミ板

両側面および上下面に板を張った直方体骨組の各固有振動数の数値計算結果は表 4 (a), (b) に示している様に実験結果と良く一致している。実験では、いずれの場合も、骨組の振動が卓越する振動モードと板の面外振動が卓越する振動モードの両方が観察されたが、両側面に板を張った場合の解析では板の面外振動を無視したために骨組の振動が卓越するモードだけが求められた。従って、表 4 (a) にはそのようなモードの固有振動数だけを示している。また、表 4 (a) では計算値が実験値よりわずかではあるが高くなる傾向を示しているが、この理由は板の面外振動による慣性力の影響を考慮しなかったためと考えられる。

数値計算によって求めた各場合の固有モードを図 10 および図 11, 12 に示している。実験によって得られた固有モードの測定結果は、図に示していないが、計算結果と良く一致していた。

以下、両側面および上下面に板を張った直方体骨組の各場合の振動モードを板なしの直方体骨組の振動モードと比較しながら考察を行なう。直方体骨組の振動解析法⁵⁾とその固有振動数、モードを附録 C に示している。

i) 両側面に板を張った直方体骨組。

計算によって求められた 3 次までの固有モードを図 10 に示している。図付 C-2 に示される直方体骨組の固有モードのうち、1 次、4 次、および重根の 5 次モードの一方が両側面に板を張った場合には現われていない。この理由は、板がその周辺梁の板面内への曲げを拘束するためであると考えられる。即ち、そのようなモードに対しては、板の拘束性が剛性を大きく高める様に作用し、ここで対象としている低次振動の領域には固有モードとして現われなくなると考えられる。図 10 の 2 次モードは直方体骨

表 4 固 有 振 動 数

(a) 両側面に板を張った直方体骨組 (Hz)

モ	ー	ド	計 算 値	実 験 値
1		次	26.2	25.4
2		次	38.4	35.0
3		次	53.6	57.0

(b) 上下面に板を張った直方体骨組 (Hz)

モ	ー	ド	骨組の振動が卓越する場合		板の面外振動が卓越する場合	
			計 算 値	実 験 値	計 算 値	実 験 値
1		次	18.8	19.5	19.4	19.2
2		次	23.1	23.4	19.7	20.2
3		次	32.0	32.3	25.2	25.4
4		次	50.4	57.6	25.3	25.8
5		次	—	—	35.1	37.7
6		次	—	—	35.2	37.7
7		次	—	—	49.6	50.1
8		次	—	—	55.0	52.0

表 5 矩形板の固有振動数 (Hz)

境界条件	方法	1 次	2 次	3 次	4 次
周辺単純支持	F. E. M. (2×6)	10.06	15.29	24.01	37.94
	厳密解法	10.32	16.52	26.84	35.10
周辺固定	F. E. M. (2×6)	20.36	25.34	35.31	50.75
	エネルギー法	20.86	27.04	38.04	54.28

組の3次モード(回転)に対応しているが、上に述べた板の拘束性のために、板面外の変形だけが許るされたモードとなり、固有振動数も直方体骨組の場合よりも高くなっている。

ii) 上下面に板を張った直方体骨組。

この場合には、板の面外振動も考慮した解析を行なったので、骨組の振動が卓越する場合と板の面外振動が卓越する場合の両方の固有モードが求められた。骨組の振動が卓越するモードを図11に、また板の面外振動が卓越するモードを図12に示している。

骨組の振動が卓越する固有モードを図付C-2の直方体骨組の固有モードと比較すると、両側面に板を張った場合と同じ理由で、直方体骨組の4次と重根の5次モードの一方が現われなくなっている。また、

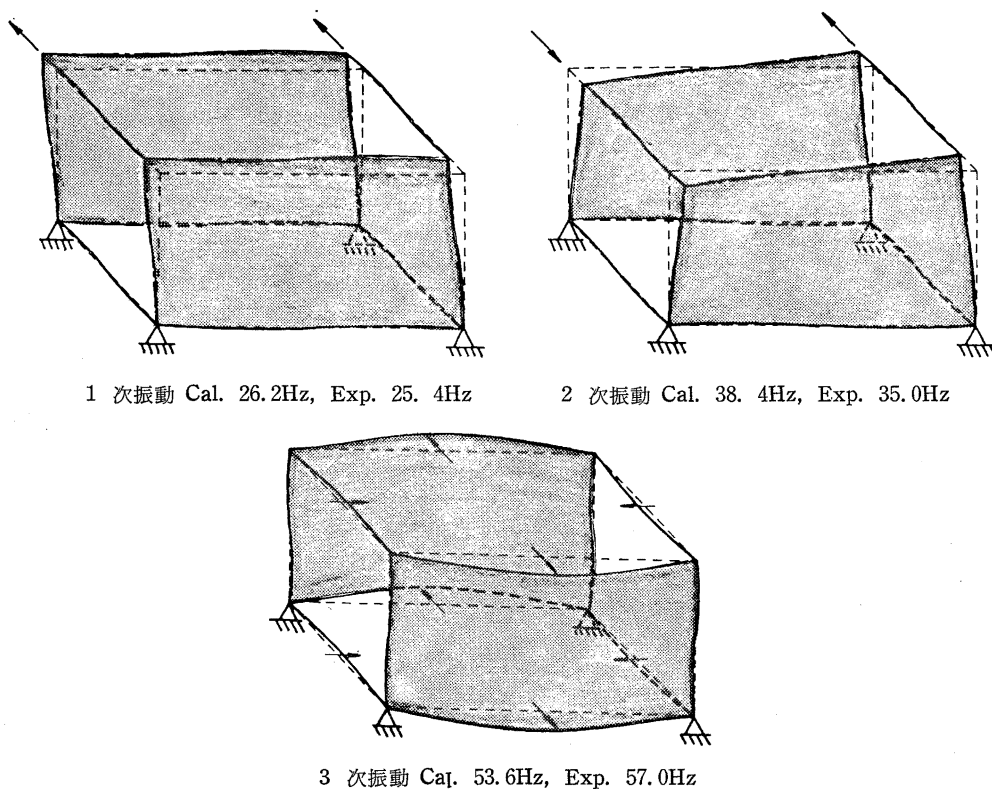


図 10 両側面に板を張った直方体骨組の固有モード

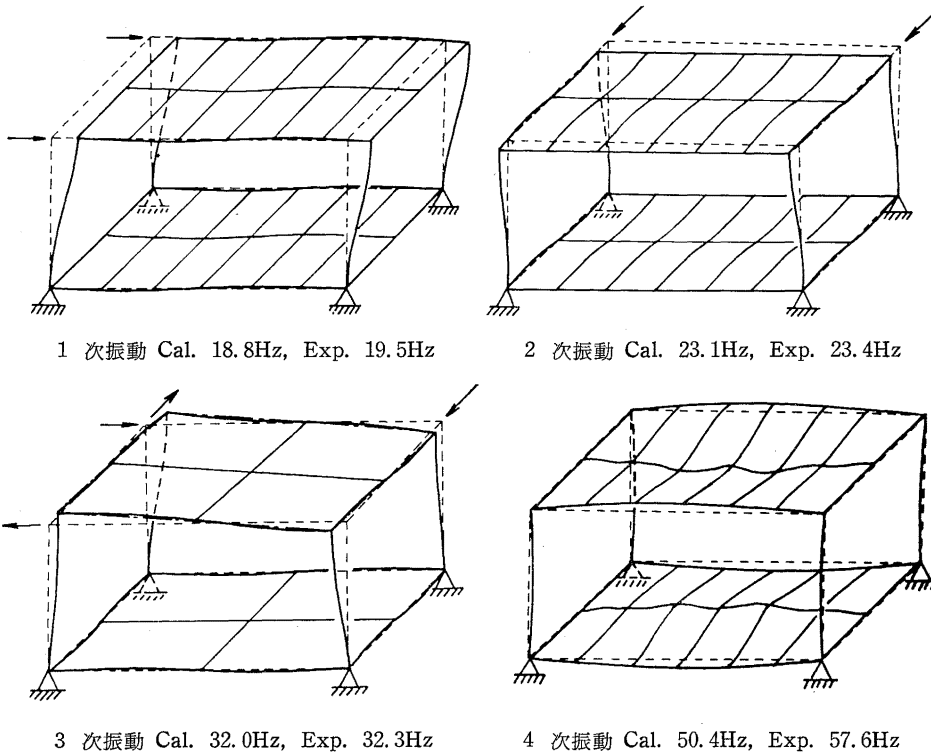


図 11 上下面に板を張った直方体骨組の固有モード；構造全体の振動として骨組の振動が卓越する場合

図 11 の 3 次モードまでの固有振動数は、それらのモードに対応する直方体骨組の固有振動数に比べると低くなっている。これは上面に張られた板の面内振動による慣性力の影響によるものと考えられる。

図 12 に示している板の面外振動が卓越する場合には、上下板が同位相と逆位相で振動するモードが現われ、しかも、一对の固有振動数は極めて接近しているという特徴を持っている。表 5 に上下板と同寸法、同材質の板が周辺単純支持および周辺固定されている場合の固有振動数を示しているが、これと比較すると直方体骨組に張られた板の面外振動は周辺固定板の場合に極めて近いことが判る。また、固有モードもほとんど同じである。表 5 には、本解析で用いた板の分割数 6×2 の妥当性を評価するために、厳密解⁶⁾（周辺単純支持の場合）とエネルギー法⁷⁾（周辺固定の場合）による解を載せている。

数値計算の観点からいうと、板の面外振動が卓越する場合の様に極めて近接した根がある時には、解の収束性は著しく悪くなる。特に本解析で取り扱った様な対称構造物の場合には、板の面外振動を考慮すると、この様な傾向が現われる。そこで、前節で示した様に、構造物の対称性を考慮して、自由度を減らすと同時に近接根を含まない形にマトリックスを変えて計算するなどの工夫が必要となる。しかし、これまでの解析結果から判る様に、本研究で扱った様な薄板を張った骨組構造の場合には、板を周辺固定板とみなし、板の面外振動を構造全体の振動から切り離して考えて実用上さしつかえないといえる。

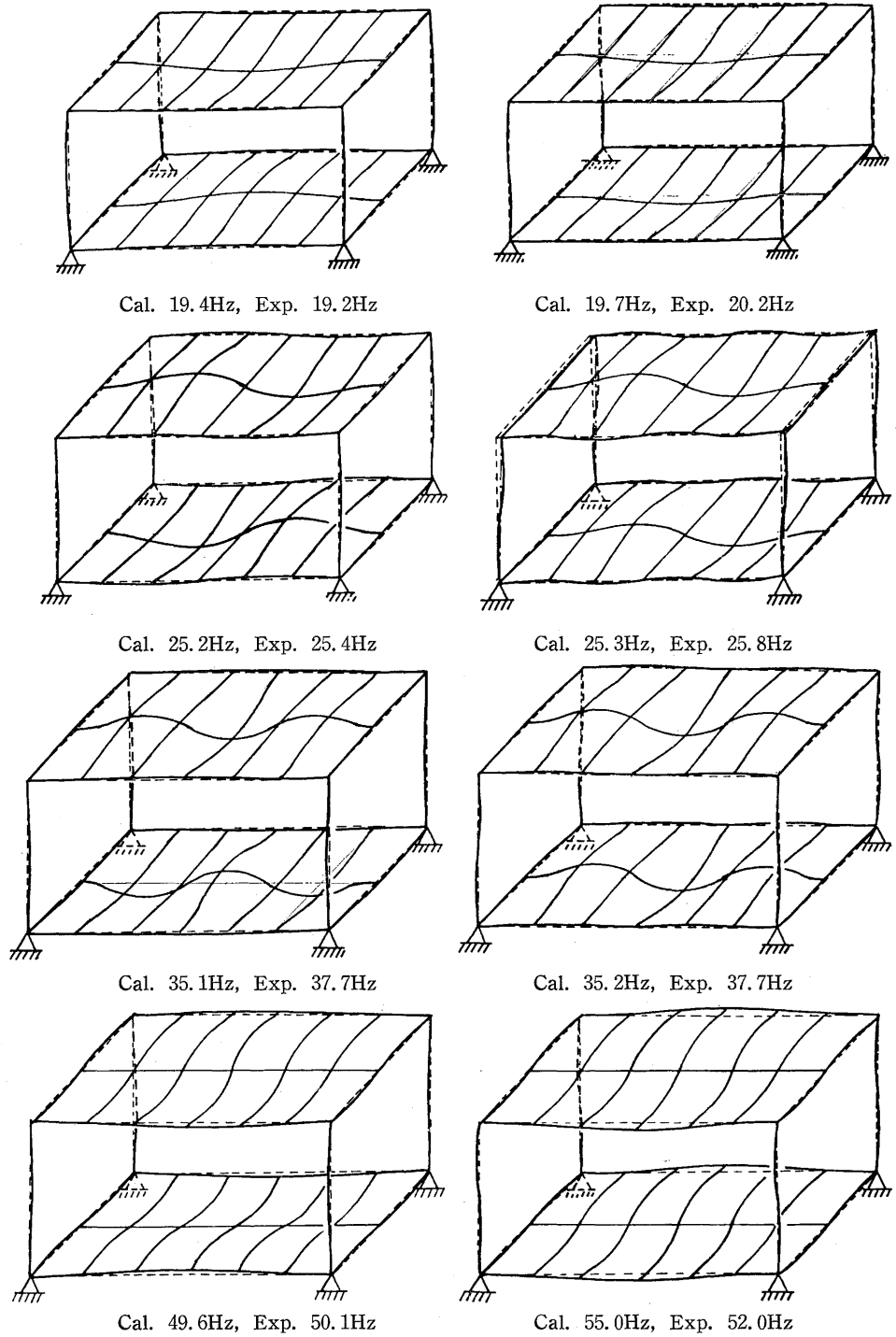


図 12 上下面に板を張った直方体骨組の固有モード；局部振動として板の面外振動が卓越する場合

5. 結 言

板を張った直方体骨組では、骨組だけの場合に比較して静的剛性は一般的に高くなるけれども、固有振動数は必ずしも高くはならない。これは、固有モードによっては、板の慣性の影響だけを受けて、板を張ったことによる剛性の増加の影響をほとんど受けない場合があるからである。従って、板の慣性および剛性の影響は固有モードの観点から考える必要がある。

板を張った直方体骨組の低次振動において、固有モードは構造全体の振動として骨組の振動が卓越するものと、局部振動として板の面外振動が卓越するものと大きく分けられる。

構造全体の振動については、板の面外振動を無視し、面内振動だけを考慮した解析で満足できる結果が得られる。板の面内振動については解析を簡単にするために剪断流を一樣と仮定することができる。

局部振動として板の面外振動が卓越する場合の固有振動数、モードは周辺固定板の場合に極めて近い。

参 考 文 献

- 1) 川井忠彦, 村木豊彦: マトリックス法による船体構造解析に関する研究 (IV), 日本造船学会論文集, 第126号, 1969.
- 2) Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGRAW-HILL, 1968.
- 3) Kirioka, K., A Structural Analysis of the Semi-monocoque Car Body, *Trans. J. S. M. E.*, Vol. 30, 1964.
- 4) Dawe, D. J. A Finite Element Approach to Plate Vibration Problems, *J. M. E. S.*, Vol. 7, 1965.
- 5) 河島佑男, 下川智記, 梅田哲弘: 板を張ったラーメン構造の振動解析, 第3回マトリックス構造解析法研究発表論文集 (JSSC), 1969.
- 6) Warburton, G. B., The Vibration of Rectangular Plates, *Proc. Inst. Mech. Engrs. Lond.* Vol. 168, 1954.
- 7) Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, VAN NOSTRAND, 1954.

(昭和 51 年 6 月 10 日 受理)

付録 A 梁要素の動的剛性マトリックスの誘導

(i) 横振動 (図 1 の $\bar{x}-\bar{y}$ 面における曲げ振動)

一樣梁の曲げ振動の一般的な正規関数は次式で与えられる。

$$X(x) = C_1 \sin \lambda_b x + C_2 \cos \lambda_b x + C_3 \sinh \lambda_b x + C_4 \cosh \lambda_b x$$

ただし,

$$\lambda_b = \sqrt[4]{\omega^2 A \rho_b / E_b I}$$

梁の端末での条件は次式の様になる。

$$\left. \begin{aligned} V_{\bar{x}1} &= X(0) = C_2 + C_4 \\ \theta_{\bar{x}1} &= X'(0) = \lambda_b (C_1 + C_3) \\ V_{\bar{x}l} &= X(L) = C_1 \sin \lambda_b L + C_2 \cos \lambda_b L + C_3 \sinh \lambda_b L + C_4 \cosh \lambda_b L \\ \theta_{\bar{x}l} &= X'(L) = \lambda_b (C_1 \cos \lambda_b L - C_2 \sin \lambda_b L + C_3 \cosh \lambda_b L + C_4 \sinh \lambda_b L) \end{aligned} \right\} \quad \text{付 A-1}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\bar{z}1} &= -E_b IX''(0) = E_b I \lambda_b^2 (C_2 - C_4) \\ Q_{\bar{y}1} &= E_b IX'''(0) = E_b I \lambda_b^3 (-C_1 + C_3) \\ M_{\bar{z}j} &= E_b IX''(L) = E_b I \lambda_b^2 (-C_1 \sin \lambda_b L - C_2 \cos \lambda_b L + C_3 \sinh \lambda_b L + C_4 \cosh \lambda_b L) \\ Q_{\bar{y}j} &= -E_b IX'''(L) = E_b I \lambda_b^3 (C_1 \cos \lambda_b L - C_2 \sin \lambda_b L + C_3 \cosh \lambda_b L + C_4 \sinh \lambda_b L) \end{aligned} \right\} \text{付 A-2}$$

式 (付 A-1) から, 定数 C_1, C_2, C_3, C_4 は端末の撓み $V_{\bar{y}1}, V_{\bar{y}j}$ と撓み角 $\theta_{\bar{z}1}, \theta_{\bar{z}j}$ で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -(F_5/2) V_{\bar{y}1} + \{(1-F_1)/2\lambda_b\} \theta_{\bar{z}1} + (F_6/2) V_{\bar{y}j} + (F_2/2\lambda_b) \theta_{\bar{z}j} \\ C_2 &= \{(1+F_1)/2\} V_{\bar{y}1} - (F_3/2\lambda_b) \theta_{\bar{z}1} + (F_2/2) V_{\bar{y}j} - (F_4/2\lambda_b) \theta_{\bar{z}j} \\ C_3 &= (F_5/2) V_{\bar{y}1} + \{(1+F_1)/2\lambda_b\} \theta_{\bar{z}1} - (F_6/2) V_{\bar{y}j} - (F_2/2\lambda_b) \theta_{\bar{z}j} \\ C_4 &= \{(1-F_1)/2\} V_{\bar{y}1} + (F_3/2\lambda_b) \theta_{\bar{z}1} - (F_2/2) V_{\bar{y}j} + (F_4/2\lambda_b) \theta_{\bar{z}j} \end{aligned} \right\} \text{付 A-3}$$

ただし

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 - \cos \lambda_b L \cosh \lambda_b L, \\ F_1 &= \sin \lambda_b L \sinh \lambda_b L / F_0, & F_2 &= (\cos \lambda_b L - \cosh \lambda_b L) / F_0 \\ F_3 &= (\cos \lambda_b L \sinh \lambda_b L - \sin \lambda_b L \cosh \lambda_b L) / F_0, & F_4 &= (\sin \lambda_b L - \sinh \lambda_b L) / F_0 \\ F_5 &= (\cos \lambda_b L \sinh \lambda_b L + \sin \lambda_b L \cosh \lambda_b L) / F_0, & F_6 &= (\sin \lambda_b L + \sinh \lambda_b L) / F_0 \end{aligned}$$

式 (付 A-3) を式 (付 A-2) に代入し, マトリックス形で表わせば次式の様に曲げ振動の動的剛性関係が求められる.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\bar{y}1} L \\ M_{\bar{z}1} \\ Q_{\bar{y}j} L \\ M_{\bar{z}j} \end{array} \right\} = \frac{E_b I}{L} \left[\begin{array}{cccc} (\lambda_b L)^3 F_5 & & & \\ (\lambda_b L)^2 F_1 & -(\lambda_b L) F_3 & & \\ -(\lambda_b L)^2 F_6 & (\lambda_b L) F_2 & (\lambda_b L)^3 F_5 & \\ -(\lambda_b L)^2 F_2 & -(\lambda_b L) F_4 & -(\lambda_b L)^2 F_1 & -(\lambda_b L) F_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} V_{\bar{y}1} / L \\ \theta_{\bar{z}1} \\ V_{\bar{y}j} / L \\ \theta_{\bar{z}j} \end{array} \right\} \quad \text{付 A-4}$$

一様円形断面梁の場合には $x-z$ 面における曲げ振動の動的剛性マトリックスも全く同様にして求められる.

(ii) 振り振動

振り振動の正規関数は次式で与えられる.

$$\theta(x) = D_1 \cos \lambda_t x + D_2 \sin \lambda_t x$$

ただし,

$$\lambda_t = \sqrt{\omega^2 \rho_b / G_b}$$

境界条件は次の様に表わせる.

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{y}1} &= \theta(0) = D_1 \\ \theta_{\bar{y}j} &= \theta(L) = D_1 \cos \lambda_t L + D_2 \sin \lambda_t L \\ M_{\bar{z}1} &= -G_b J \theta'(0) = -G_b J \lambda_t D_2 \\ M_{\bar{z}j} &= G_b J \theta'(L) = G_b J \lambda_t (-D_1 \sin \lambda_t L + D_2 \cos \lambda_t L) \end{aligned}$$

曲げ振動の場合と同じ手順で, 一様梁の振り振動の動的剛性関係式が次の様に求められる.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\bar{z}1} \\ M_{\bar{z}j} \end{array} \right\} = \frac{G_b J}{L} \left[\begin{array}{cc} T_{\bar{x}} F_7 & -T_{\bar{x}} F_8 \\ -T_{\bar{x}} F_8 & T_{\bar{x}} F_7 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta_{\bar{z}1} \\ \theta_{\bar{z}j} \end{array} \right\} \quad \text{付 A-5}$$

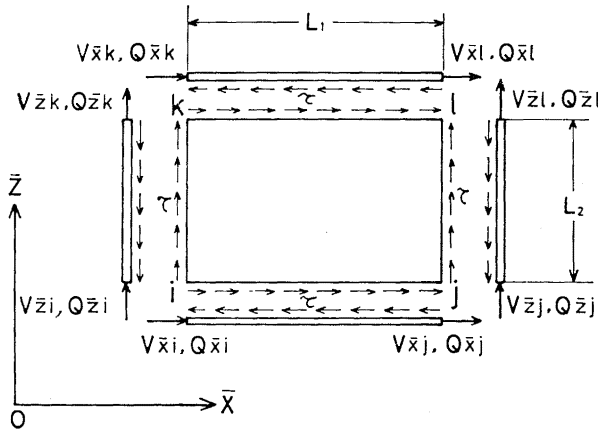
ただし,

$$T_{\bar{x}} = \lambda_t L, \quad F_7 = \cot \lambda_t L, \quad F_8 = \operatorname{cosec} \lambda_t L$$

軸方向振動を無視して、式(付A-4)で与えられる $\bar{x}-\bar{y}$ および $\bar{x}-\bar{z}$ 面における曲げの動的剛性マトリックスと式(付A-5)の捩りの動的剛性マトリックスを重ね合わせることに、表1に示される一般的な梁要素の動的剛性マトリックスが求められる。

付B. 縁梁付矩形板要素の動的剛性マトリックスの誘導

縁梁付矩形板要素の展開図を図付B-1に示す。節点 i, j, k, l の座標は各々、 $(\bar{x}_i, \bar{z}_i)$, $(\bar{x}_i + L_1, \bar{z}_i)$, $(\bar{x}_i, \bar{z}_i + L_2)$, $(\bar{x}_i + L_1, \bar{z}_i + L_2)$ である。



図付B-1 縁梁付矩形板要素の展開図

(i) 矩形板の静的剛性マトリックス

板場剪断流を一様とする仮定に基づいて、板の変位を次式のように仮定する。

$$\begin{cases} V_{\bar{x}} = \alpha \bar{z} + \beta \\ V_{\bar{z}} = \gamma \bar{x} + \delta \end{cases} \quad \text{付B-1}$$

ただし、 $V_{\bar{x}}, V_{\bar{z}}$ は $\bar{x}$ 軸、 $\bar{z}$ 軸方向の変位を各々表わし、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数とする。

上式に各節点の座標を代入すると、

$$V_{\bar{x}i} = V_{\bar{x}j}, \quad V_{\bar{x}k} = V_{\bar{x}l}, \quad V_{\bar{z}k} = V_{\bar{z}l}, \quad V_{\bar{z}j} = V_{\bar{z}i}$$

従って定数 α, γ は次式の様、4つの変位の項で表わされる。

$$\begin{cases} \alpha = (V_{\bar{x}k} - V_{\bar{x}l}) / L_2 \\ \gamma = (V_{\bar{z}l} - V_{\bar{z}k}) / L_1 \end{cases} \quad \text{付B-2}$$

板周辺に沿って分布する剪断応力は次式で与えられる。

$$\tau = G_p(\alpha + \gamma) = G_p\{(V_{\bar{x}k} - V_{\bar{x}l}) / L_2 + (V_{\bar{z}l} - V_{\bar{z}k}) / L_1\}$$

板周辺の梁の軸力は板周辺に作用する剪断力に等しいので、剛性関係式は次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} (Q_{\bar{x}i} + Q_{\bar{x}j}) L_2 \\ (Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l}) L_2 \\ (Q_{\bar{z}i} + Q_{\bar{z}k}) L_1 \\ (Q_{\bar{z}j} + Q_{\bar{z}l}) L_1 \end{Bmatrix} = G_{pt} L_1 L_2 \begin{bmatrix} 1 & S.Y.M. & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{\bar{x}i} / L_2 \\ V_{\bar{x}k} / L_2 \\ V_{\bar{z}k} / L_1 \\ V_{\bar{z}l} / L_1 \end{Bmatrix} \quad \text{付B-3}$$

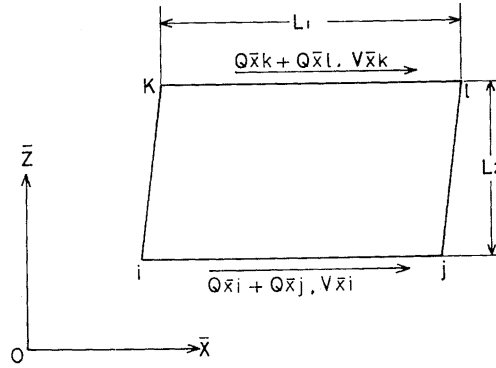


図 付 B-2 矩形板の等価慣性力

(ii) 矩形板の慣性マトリックス

板の微小振動を x 方向および y 方向の剛体並進運動並びに工学剪断変形の重ね合せによって近似する。図付 B-2 に、板が $\bar{x}$ 方向にのみ $V_{\bar{x}}$ だけ変位している場合を示している。図付 B-2 に示されている $Q_{\bar{x}i} + Q_{\bar{x}j}$ と $Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l}$ は板に分布する慣性力を周辺に作用する慣性力に置き換えた等価慣性力である。単位面積当りの慣性力は $\rho_{pt}\omega^2 V_{\bar{x}}$ であるから、等価慣性力は次の 2 式より求められる。

$$(Q_{\bar{x}i} + Q_{\bar{x}j}) + (Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l}) = \int_{\bar{z}=\bar{z}_1}^{\bar{z}_1+L_2} \int_{\bar{x}=\bar{x}_1}^{\bar{x}_1+L_1} \rho_{pt}\omega^2 V_{\bar{x}} d\bar{x} d\bar{z} \quad \text{付 B-4}$$

$$(Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l})L_2 = \int_{\bar{z}=\bar{z}_1}^{\bar{z}_1+L_2} \int_{\bar{x}=\bar{x}_1}^{\bar{x}_1+L_1} \rho_{pt}\omega^2 V_{\bar{x}} (\bar{z} - \bar{z}_1) d\bar{x} d\bar{z} \quad \text{付 B-5}$$

式 (付 B-4) は $\bar{x}$ 方向の慣性力の総和を、また、式 (付 B-5) は i 点回りのモーメントを表わしている。上式に式 (付 B-1) の $V_{\bar{x}}$ を代入すると、等価慣性力は次式の様に変位 $V_{\bar{x}i}, V_{\bar{x}j}$ の項で表わすことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} Q_{\bar{x}i} + Q_{\bar{x}j} &= \rho_{pt}L_1L_2\omega^2(V_{\bar{x}i}/3 + V_{\bar{x}k}/6) \\ Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l} &= \rho_{pt}L_1L_2\omega^2(V_{\bar{x}i}/6 + V_{\bar{x}k}/3) \end{aligned} \right\} \quad \text{付 B-6}$$

板が $\bar{z}$ 方向にのみ $V_{\bar{z}}$ だけ変位している場合についても、同様な方法で、次式に示す等価慣性力が求められる。

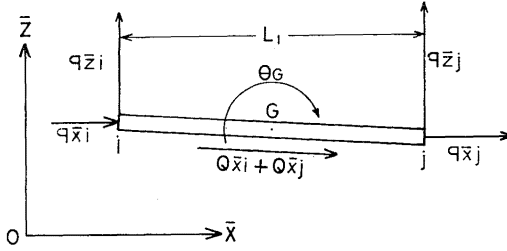
$$\left. \begin{aligned} Q_{\bar{z}i} + Q_{\bar{z}k} &= \rho_{pt}L_1L_2\omega^2(V_{\bar{z}k}/3 + V_{\bar{z}l}/6) \\ Q_{\bar{z}j} + Q_{\bar{z}l} &= \rho_{pt}L_1L_2\omega^2(V_{\bar{z}k}/6 + V_{\bar{z}l}/3) \end{aligned} \right\} \quad \text{付 B-7}$$

式 (付 B-6) と式 (付 B-7) から矩形板要素の慣性マトリックスは次式の様に与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} (Q_{\bar{x}i} + Q_{\bar{x}j})L_2 \\ (Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l})L_2 \\ (Q_{\bar{z}i} + Q_{\bar{z}k})L_1 \\ (Q_{\bar{z}j} + Q_{\bar{z}l})L_1 \end{aligned} \right\} = \rho_{pt}L_1L_2\omega^2 \begin{bmatrix} L_2^2/3 & & & \\ L_2^2/6 & L_2^2/3 & & \\ 0 & 0 & L_1^2/3 & \\ 0 & 0 & L_1^2/6 & L_1^2/3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} V_{\bar{x}i}/L_2 \\ V_{\bar{x}k}/L_2 \\ V_{\bar{x}k}/L_1 \\ V_{\bar{z}l}/L_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{付 B-8}$$

(iii) 板周辺梁の慣性マトリックス

板の周辺梁の変位は板の周辺の変位と一致する。従って、図付 B-3 に示す $\bar{x}$ 方向梁の重心 G



図付 B-3 縁梁の等価慣性力

の $\bar{x}$ 方向, $\bar{z}$ 方向の変位を $V_{\bar{x}G}, V_{\bar{z}G}$ また, 重心 G まわりの回転角を θ_G (時計回りを正) とすると, 次式の様になる.

$$\left. \begin{aligned} V_{\bar{x}G} &= (V_{\bar{x}i} + V_{\bar{x}j})/2 = V_{\bar{x}}, \quad (V_{\bar{x}i} = V_{\bar{x}j}) \\ V_{\bar{z}G} &= (V_{\bar{z}i} + V_{\bar{z}j})/2 = (V_{\bar{z}k} + V_{\bar{z}l})/2 \\ \theta_G &= (V_{\bar{z}i} - V_{\bar{z}j})/l = (V_{\bar{z}k} - V_{\bar{z}l})/l \end{aligned} \right\} \quad \text{付 B-9}$$

図, 付 B-3 に示されている $q_{\bar{x}i}, q_{\bar{x}j}, q_{\bar{z}i}, q_{\bar{z}j}$ は節点等価慣性力である. 板の場合と同じ方法で次の関係が導かれる.

$$\left. \begin{aligned} q_{\bar{x}i} + q_{\bar{x}j} &= q_b A L_1 \omega^2 V_{\bar{x}i} \\ q_{\bar{z}i} + q_{\bar{z}j} &= \rho_b A L_1 \omega^2 (V_{\bar{z}k} + V_{\bar{z}l})/2 \\ q_{\bar{z}i} - q_{\bar{z}j} &= \rho_b A L_1 \omega^2 (V_{\bar{z}k} - V_{\bar{z}l})/6 \end{aligned} \right\} \quad \text{付 B-10}$$

上式の 2 番目と 3 番目の式より,

$$\left. \begin{aligned} q_{\bar{z}i} &= \rho_b A L_1 \omega^2 V_{\bar{z}k}/3 + \rho_b A L_1 \omega^2 V_{\bar{z}l}/6 \\ q_{\bar{z}j} &= \rho_b A L_1 \omega^2 V_{\bar{z}k}/6 + \rho_b A L_1 \omega^2 V_{\bar{z}l}/3 \end{aligned} \right\} \quad \text{付 B-11}$$

$\bar{z}$ 方向の梁の節点等価慣性力も同様の方法で求められる. 梁 $i-j$ の $\bar{x}$ 方向の慣性力の総和, 即ち $Q_{\bar{x}i} + Q_{\bar{x}j}$ は両端の $\bar{x}$ 方向成分 $q_{\bar{x}i}, q_{\bar{x}j}$ の他に梁 $i-k, j-l$ の節点 i, j における $\bar{x}$ 方向成分を加えたものとなる.

$$Q_{\bar{x}i} + Q_{\bar{x}j} = (\rho_b A L_1 + 2\rho_b A L_2/3) \omega^2 V_{\bar{x}i} + \rho_b A L_2 \omega^2 V_{\bar{x}k} \quad \text{付 B-12}$$

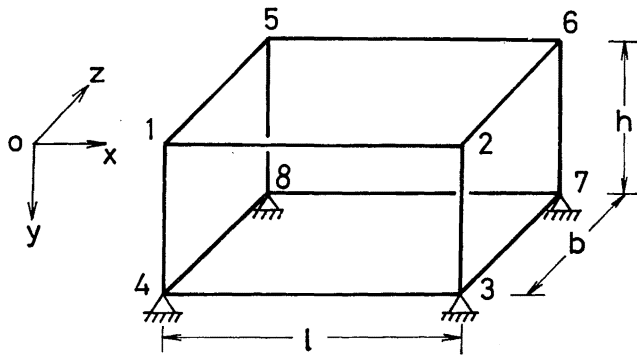
$Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l}, Q_{\bar{z}i} + Q_{\bar{z}k}, Q_{\bar{z}j} + Q_{\bar{z}l}$ についても全く同様にして求められる. これをマトリックス表示して, 次式の板周辺梁の慣性マトリックスが求められる.

$$\left\{ \begin{aligned} (Q_{\bar{x}ki} + Q_{\bar{x}j}) L_2 \\ (Q_{\bar{x}k} + Q_{\bar{x}l}) L_2 \\ (Q_{\bar{z}i} + Q_{\bar{z}k}) L_1 \\ (Q_{\bar{z}j} + Q_{\bar{z}l}) L_1 \end{aligned} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \rho_b A (L_1 + 2L_1/3) L_2^2 \omega^2 & \rho_b A (L_1 + 2L_2/3) L_2^2 \omega^2 \\ \rho_b A L_2^3 \omega^2/3 & \rho_b A (L_1 + 2L_2/3) L_2^2 \omega^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{aligned} V_{\bar{x}i}/L_2 \\ V_{\bar{x}k}/L_2 \\ V_{\bar{z}k}/L_1 \\ V_{\bar{z}l}/L_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{S. Y. M.} \quad \text{付 B-13}$$

式 (付 B-3), 式 (付 B-8) と式 (付 B-13) を組み合わせることにより, 式 (2.2) で示される縁梁付矩形板要素の動的剛性マトリックスが求められる。

付録 C. 直方体骨組の振動解析

図付 C-1 に示されている直方体骨組の振動解析を行なう。各梁の動的剛性マトリックスは表 1 で与えられる 梁要素の動的剛性マトリックスを式 (2.4) を用いて基準座標系に変換して求められる。これらを全て重ね合わせると, 1 節点当りの自由度が 6, 総節点数が 8 であるから次数が 48×48 のマトリックスとなる。



図付 C-1 直方体骨組

境界条件および変形適合条件は次の様になる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件} : V_{x1}=V_{y1}=V_{z1}=0 \quad (i=3, 4, 7, 8) \\ \text{変形適合条件} : \left. \begin{array}{l} V_{x1}=V_{x2}, V_{x5}=V_{y6}, V_{z1}=V_{z5}, V_{z2}=V_{z6}, \\ V_{y1}=V_{y2}=V_{y6}=V_{y8}=0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \text{付 C-1}$$

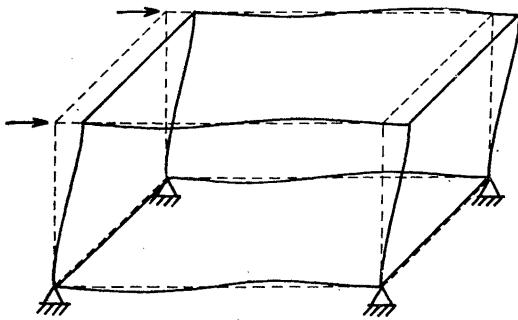
境界条件, 変形適合条件より自由度は 20 減少するので全体のマトリックスの次数は 28×28 となる。

次に, 両端末が拘束されていない梁 1-2, 1-5, 2-6, 5-6 については, 軸方向の剛体並進運動による慣性力を考慮する。この慣性マトリックスは

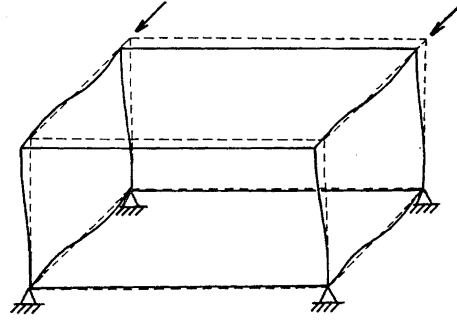
$$\left\{ \begin{array}{l} (Q_{x1}+Q_{x2})b \\ (Q_{x5}+Q_{x6})b \\ (Q_{z1}+Q_{z5})l \\ (Q_{z2}+Q_{z6})l \end{array} \right\} = \rho_b l b A \omega^2 \left[\begin{array}{cccc} b & S.Y.M & & \\ 0 & b & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} V_{x1}/b \\ V_{x5}/b \\ V_{z1}/l \\ V_{z6}/l \end{array} \right\} \quad \text{付 C-2}$$

となる。従って, 28×28 のマトリックスから, 上式で与えられる慣性マトリックスを引いて最終的な動的剛性マトリックスを得る。

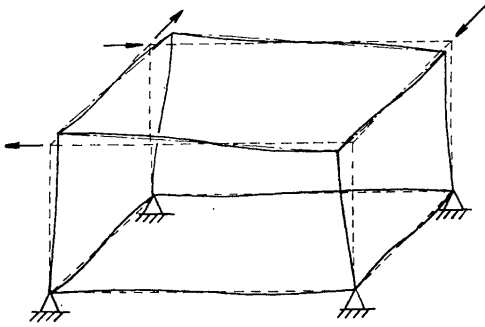
このマトリックスの行列式を 0 と置くことにより, 振動数方程式が得られる。図付 C-2 に, 数値計算によって求めた固有モードを固有振動数と共に示している。ただし数値計算および実験に用いた構造物寸法等は板を張った場合と同じである。



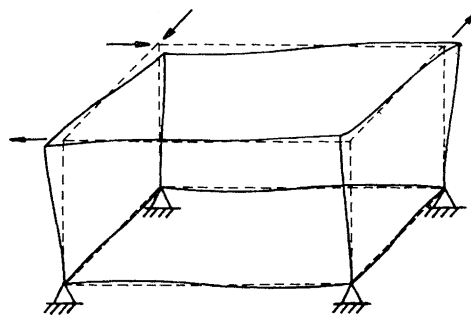
1 次振動 Cal. 22.1Hz, Exp. 21Hz



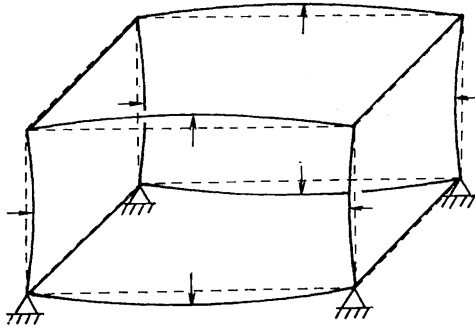
2 次振動 Cal. 26.2Hz, Exp. 27Hz



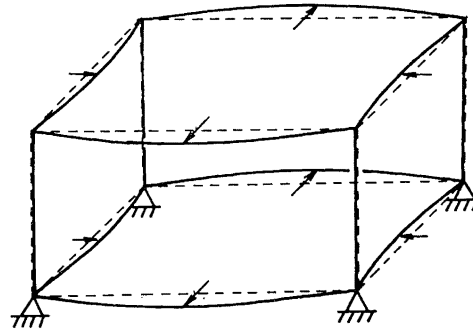
3 次振動 Cal. 34.5Hz, Exp. 36Hz



4 次振動 Cal. 47.5Hz, Exp. 49Hz



5 次振動 (重根) Cal. 53.6Hz, Exp. 57Hz



図付 C-2 直方体骨組の固有モード