九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

回転系の熱塩対流

増田, 章
九州大学応用力学研究所 : 助手

https://doi.org/10.15017/4743557

出版情報：應用力學研究所所報. 45, pp.253-272, 1976-11. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

回　転　系　の　熱　塩　対　流†

増　田　　章*

概　　要

熱塩対流の線型不安定論を非回転系から回転を含む系へと一般化した．回転が十分大きいところでは，回転が安定化作用を示すこと，粘性は単調モードに対しては不安定化作用を示すこと，振動モードに対しては非回転系の場合と同様にやはり安定化作用を示すことがわかった．プラントル数が1より小さく，かつ，塩分と温度との拡散率比より大きい場合には回転が存在すると，温度レーリー数を負に固定しておいて，塩分レーリー数を負から0に近づけると，いったん振動モードの不安定域にはいった後再び安定になり，さらに0に近づけあるいは0より大きくしていくと，今度は単調モードの不安定領域にはいるような非常に特異な性質を示す場合があることがわかった．

1. はじめに

対流問題の基本はベナール型対流である．その変形あるいは地球流体力学的応用として回転系熱対流や熱塩対流がある．これらは，ベナール型対流では単調モードしか存在しないのに対し，そのいづれも単調モード以外に振動モードをもつ点で類似している．振動モードの存在は何らかの復元力が存在するためである．回転系熱対流ではコリオリ力，非回転熱塩対流では密度成層があるための浮力がそれであり，それぞれに慣性波，内部重力波が対応している．とすれば，回転系熱塩対流では内部慣性重力波タイプの振動モードがあると考えてよいだろう．しかし，熱塩対流の非回転系から回転系への拡張は単純にそれだけですむだろうかという疑問がおこる．

回転系熱対流における重要なパラメータは，動粘性係数と不安定要素である温度の拡散率との比プラントル数であった[1]．たとえば，『プラントル数が1より大きいならば，中立振動モードは存在しない』という結論がある．回転系熱塩対流では塩分が不安定要素になることもあり，そのときは動粘性係数と塩分拡散率との比シュミット数がもう一つの重要なパラメータになる可能性があるが，この点はどうだろうか．さらに，回転系熱対流では，回転が十分大きいとき単調モードの対流に対して粘性は不安定化作用をすることが知られている．非回転系熱塩対流の場合は，粘性は対流の運動エネルギーの消散に効くだけだから，もちろん，安定化に働く．回転系熱塩対流ではここのところはどうつながるのだろうか．

このような疑問に対する解答を見出すことが本論文の動機であった．実際の海洋における熱塩対流への回転の影響を考えるというよりは，むしろ，密度に寄与する二成分が存在する系への回転の影響を広

† 日本海洋学会（1976年4月気象庁）において講演

* 九州大学助手，応用力学研究所（光易　恒紹介）

いパラメータ領域にわたって調べることが目的である．したがって，最も取り扱い易い形で問題を考察する．線型不安定を議論するが，基本場や境界条件は単純で，鉛直波数についても最低のモード（後出のn＝1に対応）に限り，しかも，中立モードのみの存在領域を調べる．回転のおおよそ定性的な影響を知るための最初のステップとしては，これで十分であろう．

2. 問題の設定

2.1. 基本場と境界条件

図―1に示すような系を考える．系は全体として鉛直方向を軸として角速度 Ω の回転していて，水平な無限に広い二枚の板に挟まれた厚さ d の流体層がある．流体は温度および塩分により密度成層をなす二成分系で，状態方程式は今考えている範囲内で

$$\rho=\rho_0\{1-\alpha(T-T_0)+\beta(S-S_0)\}$$

として与えられるものとする．ここに（ρ, T, S）は（密度，温度，塩分）であり，記号“。”はそれらの基準値を表わす．定数 α は熱膨張係数であり，定数 β は塩分による密度増加係数である．

水平方向の直交座標軸を x 軸，y 軸とする．方向および原点は適当でよい．z 軸は鉛直上向きに取り，流体層の底面を原点（$z=0$）とする．

上・下の境界条件としては最も簡単なものを採用する．すなわち，速度については鉛直速度 w が0ということ以外にいわゆる free-free 条件（接線応力がない）を課す．この条件では，厳密には上・下の境界を剛体壁と考えているわけではないことになる．温度および塩分については完全導体条件（境

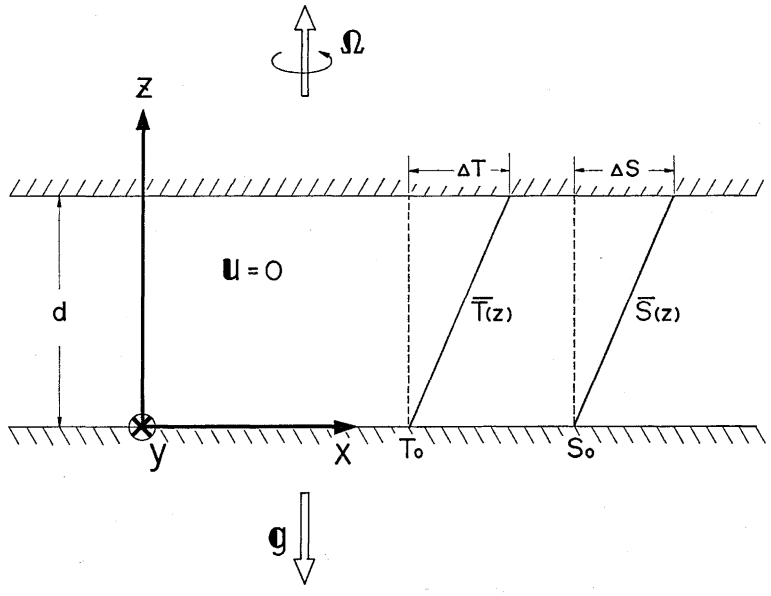


図 1　基 本 場 お よ び 状 況 図

界で温度および塩分が与えられた一定値をとる）を課す．塩分に対する完全導体条件も実際には非現実的である．

基本場を記号“-”で表わすと以下のように与えられる．

$$\bar{\boldsymbol{u}}=0 \quad ,$$

$$\bar{T}=T_0+\left(\frac{\Delta T}{d}\right)z \quad ,$$

$$\bar{S}=S_0+\left(\frac{\Delta S}{d}\right)z \quad ,$$

$$\bar{\rho}=\rho_0\left\{1+\left(\frac{\beta\Delta S-\alpha\Delta T}{d}\right)z\right\} \quad ,$$

$$\bar{P}=P_0-g\rho_0\left\{z+\left(\frac{\beta\Delta S-\alpha\Delta T}{d}\right)\frac{z^2}{2}\right\} \quad .$$

ここに，$\boldsymbol{u}=(u,\ v,\ w)$ は速度ベクトル，P は圧力，g は重力加速度，$(\Delta T,\ \Delta S)$ は上下の境界の（温度差，塩分差）であり，上の境界での値が下の境界での値よりも大きいときを正とする．記号“。”の示す基準値は流体層底面（$z=0$）での値をとった．圧力分布は静水圧の関係から求まるものである．

2.2. 基 礎 方 程 式

摂動場に対する線型基礎方程式は次のようになる．ただし，$\boldsymbol{u}=(u,\ v,\ w)$，$P$，$\rho$，$T$，$S$ はこの場合摂動場を表わすとする．また，Boussinesq 近似を仮定している．

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla P+\frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{g}+\nu\nabla^2\boldsymbol{u} \quad , \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \quad , \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\nabla^2\right)T=-\left(\frac{\Delta T}{d}\right)w \quad , \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda\nabla^2\right)S=-\left(\frac{\Delta S}{d}\right)w \quad , \tag{4}$$

$$\rho/\rho_0=\beta S-\alpha T \quad . \tag{5}$$

ここに，t は時間，$\boldsymbol{f}=(0,\ 0,\ f)=(0,\ 0,\ 2\Omega)$ はコリオリ・パラメータ，$\boldsymbol{g}=(0,\ 0,-g)$ は重力加速度，κ，λ はそれぞれ，温度，塩分の拡散率，ν は動粘性係数，$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$ はナブラ記号である．方程式（1）～（5）は上から順に，運動方程式，非圧縮条件，温度方程式，塩分方程式そして状態方程式である．

鉛直渦度 $\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ を導入し，方程式（1），（2）から u，v，P を消去する．それには，方程式（1）に rot rot=grad・div-div grad を作用し鉛直成分をとればよい．結局，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\nabla^2 w=\frac{g}{\rho_0}\nabla_H^2\rho-f\frac{\partial\zeta}{\partial z} \quad , \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\zeta=f\frac{\partial w}{\partial z} \tag{7}$$

となる．$\nabla_H^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は水平ラプラシアンである．方程式（3）−（7）をまとめて w について単一の方程式にすることができる．その前に無次元化しておこう．長さのスケールとして d/π，時間スケールとして $(d/\pi)^2/k$ をとる．定数 π は計算の都合上導入したが，こうすることにより上の境界は無次元量で $z=\pi$ となる．これ以後，ことわらないかぎりすべて無次元量で議論するが，記号としては同じものを用いる．

w について，単一の方程式は $L(w)=0$ と書ける．L は線型演算子で，

$$L=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\tau\nabla^2\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sigma\nabla^2\right)\nabla^2+T_a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}$$
$$+\left\{R_T\left(\frac{\partial}{\partial t}-\tau\nabla^2\right)-R_s\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right)\right\}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sigma\nabla^2\right)\nabla_H^2 \tag{8}$$

で与えられる．

ここで問題を規定する五つの無次元量があらわれた．まず，物性定数としてプラントル数 $\sigma=\nu/\kappa$ および塩分と温度の拡散率の比 $\tau=\lambda/\kappa$ がある．前述のシュミット数 $\frac{\nu}{\lambda}$ はプラントル数 σ と拡散率比 τ との比で表わされる．我々は，特定の海水でおこる熱塩対流だけでなく，一般的に二成分系の対流の性質を調べるのが目的であるから，プラントル数 σ や拡散率比 τ の値もいろいろ変えてみることにする．拡散率比 τ は常に1より小さいと仮定しておくが，一般性を失うことはない．もし拡散率比 τ が1より大きければ，温度と塩分の役割を変えればすむからである．拡散率比 τ が1に等しいときは，二成分系が一成分系，すなわち回転系の熱対流に縮退してしまい，すでに Chandrasekhar (1961)[1] によって議論されており，あるいは本論で ΔT を $\Delta T-\frac{\beta}{\alpha}\Delta S$ に，ΔS を0におきかえればよいので考えない．

次に，

$$R_T=\frac{g\alpha(\Delta T/d)}{\kappa^2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^4,\qquad R_S=\frac{g\beta(\Delta S/d)}{\kappa^2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^4$$

の二つが温度，塩分による密度成層状態を示す．我々は，温度レーリー数 R_T^* と塩分レーリー数 R_S^* を

$$R_T^*=\frac{R_T}{\sigma}=\frac{g\alpha(\Delta T/d)}{\nu\kappa}\left(\frac{d}{\pi}\right)^4,\qquad R_S^*=\frac{R_S}{\sigma}=\frac{g\beta(\Delta S/d)}{\nu\kappa}\left(\frac{d}{\pi}\right)^4$$

で定義する．最後に回転指標として

$$T_a=\frac{f^2}{\kappa^2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^4$$

がある．テーラー数 T_a^* は

$$T_a^*=\frac{T_a}{\sigma^2}=\frac{f^2}{\nu^2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2$$

で定義する．温度および塩分レーリー数 R_T^*, R_S^* とテーラー数 T_a^* のここでの定義は，通常の定義とは定数因子 $\left(\frac{1}{\pi^4}\right)$ だけ異なることに注意しなければならない．

2.3. モ ー ド 解

鉛直速度 w を

$$w\propto F(z)\cdot\exp(pt)\exp\{i(k_x x+k_y y)\}$$

の形に仮定する．$(k_x,\ k_y)$ は $(x,\ y)$ 方向の波数であり，p は一般には複素数で，実部 p_r は成長率，虚部 $p_i=q$ は振動数を表わす．上・下の境界条件を満たすには，n を整数として $F(z)$ を $\sin(nz)$ ととればよいことがわかる．この形の解を仮定すれば偏微分方程式 $L(w)=0$ は複素成長率 $p=p_r+iq$ についての次のような4次の代数方程式になおる．

$$(p+\tau l^2)(p+l^2)\{(p+\sigma l^2)^2+T_a n^2\}+(p+\sigma l^2)\{R_T(p+\tau l^2)-R_S(p+l^2)\}k^2=0 \tag{9}$$

ここに $k^2=k_x^2+k_y^2$, $l^2=k^2+n^2$ である．多くの対流問題で，鉛直波数nが1のものが最初に不安定になることがわかっているので，ここでも $n=1$ と仮定しておく．また，安定・不安定領域を定める目的だけならば成長率 p_r が 0 に等しい中立モードを調べれば十分なので $p=iq$ とおき，方程式（9）に代入する．方程式の実部，虚部がそれぞれ 0 に等しいということから次の二つの方程式が得られる．

$$l^2q^4-[(\sigma^2+\tau+2\sigma(1+\tau))l^6+T_a+(R_T-R_S)k^2]q^2$$
$$+[\tau(\sigma^2 l^6+T_a)+\sigma k^2(R_T-R_S)]l^4=0\quad , \tag{10}$$

$$q\cdot[-l^2(1+\tau+2\sigma)q^2+(\sigma^2(1+\tau)+2\sigma\tau)l^6+(1+\tau)T_a$$
$$+\{(R_T-R_S)\sigma+(\tau R_T-R_S)\}\cdot k^2]=0. \tag{11}$$

我々の目標は，物性定数 σ, τ を固定してテーラー数 T_a^* をいろいろと変えて方程式 (10), (11) をもとに $(R_S^*-R_T^*)$ 平面上に不安定領域を定めることである．

3. 結　　果

3.1. 単 調 モ ー ド

単調モードとは振動数 q が 0 に等しいものをいうことにする．このとき方程式 (11) は自動的に充たされ方程式 (10) からは

$$\frac{R_S^*}{\tau}-R^*_T=\frac{(k^2+1)^3+T_a^*}{k^2} \tag{12}$$

となる．方程式 (12) の右辺はある k（これを臨海波数 k_c とする）において最小値（これを臨界レーリー数 R_c^* とする）をもつ．臨界値 k_c, R_c^* は Taylor 数 T_a^* について単調増加関数であり，物性

定数 σ, τ には一切依存しない．方程式 (12) は $R_s^*=0$ とおけば回転系熱対流における単調モードの方程式と全く同一である．このことは，単調モードでは，一成分系から二成分系への拡張が直接的であり容易に行なわれうることを意味する．

結局，$R_s^*-R_T^*$ 平面上で単調モードに対する中立曲線，実は直線，は，

$$\frac{R_s^*}{\tau}-R_T^*=R_c^*(T_a^*) \tag{13}$$

で与えられる．方程式 (13) の左辺が右辺よりも大きいところが不安定領域である．温度・塩分レーリー数 R_T^*, R_s^* を臨界レーリー数 $R_c^*=R_c^*(T_a^*)$ で割って正規化しておけば，$R_s^*/R_c^*-R_T^*/R_c^*$ 平面上で，単調モードに対する中立曲線は任意のテーラー数 T_a^* に対して同一の直線

$$\frac{R_s^*/R_c^*}{\tau}-(R_T^*/R_c^*)=1 \tag{14}$$

になる．第3.2節で述べる振動モードについても $R_s^*/R_c^*-R_T^*/R_c^*$ 平面で不安定領域を図示するが，縦軸・横軸とも，臨界レーリー数 R_c^*（T_a^* が大きいほど大きい）によって正規化されていることに注

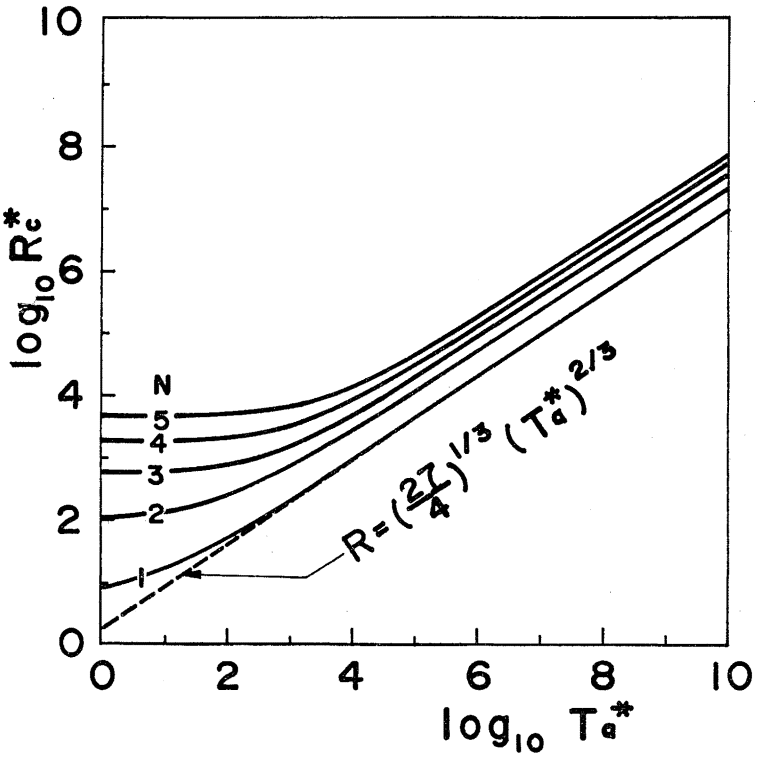


図 2 (a) 臨界レーリー数 R_c^* のテーラー数 T_a^* に対する関係．
鉛直波数 n が 2，3，5，5 の場合もつけ加えて描いてある．

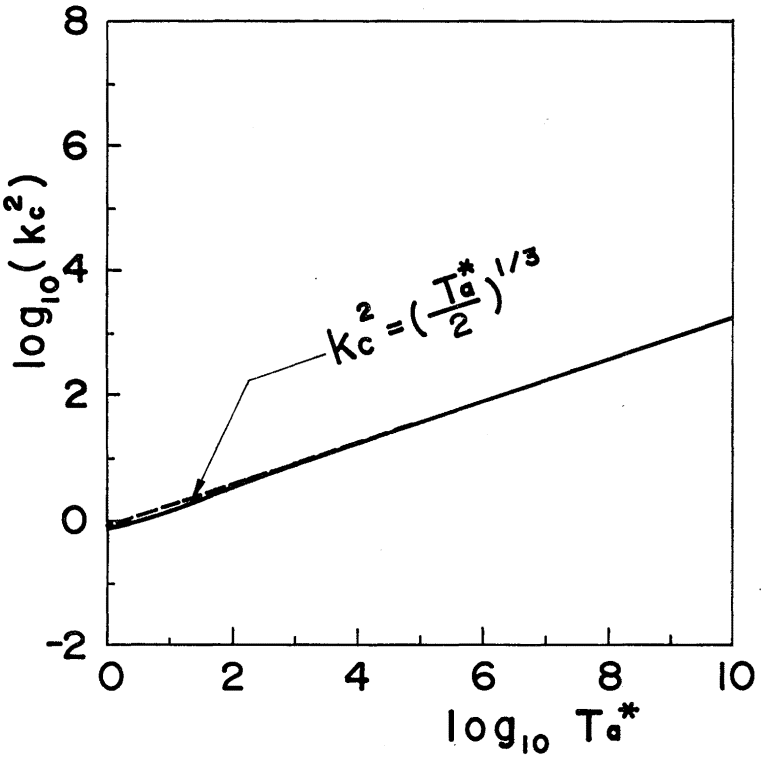


図 2 (b) 単調モードの臨界波数 R_c のテーラー数 T_a^* に対する関係．破線はテーラー数が大きいときの漸近形を示す．

意する必要がある．

臨界レーリー数 R_c^*，臨界波数 k_c のテーラー数 $T_a^*\to\infty$ での漸近形は Chandrasekhar (1961)[1] によって求められており，我々の定義に従って書きなおすと

$$R_c^*\sim\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}}(T_a^*)^{\frac{2}{3}} \quad , \tag{15}$$

$$k_c\sim\left(\frac{1}{2}T_a^*\right)^{\frac{1}{6}} \tag{16}$$

となる．とくに臨界レーリー数は，次元をもった形では

$$g\left(\frac{\beta\Delta S}{\tau}-\alpha\Delta T\right)\sim\left(\frac{27}{4}\pi^4\right)^{1/3}f^{4/3}\nu^{-1/3}\alpha^{-1/3} \tag{17}$$

と表わされる．粘性 ν が大きいほど (17) の値は小さく，不安定になりやすいわけで粘性の不安定化効果を示している．これは非回転系では考えられない現象であり，系を不安定化するためには，角運動量保存による復元力を粘性消散によって減少せしめることが必要なことを意味する．

臨界レーリー数 R_c^* と臨界波数 k_c のテーラー数 T_a^* に対する関係を図—2で示す．図中，破線は

漸近式 (15), (16) を表わす．図—2(a) では，鉛直波数nが2，3，4，5に等しい場合も加えてある．

3.2. 振動モード

振動モードとは振動数 q が 0 でないものをいう．方程式 (10), (11) から

$$Q\equiv(1+\tau+2\sigma)\left(\frac{l^2}{k^2}\right)q^2$$

$$=(\sigma+\tau)R_T-(1+\sigma)R_s+[\{\sigma^2(1+\tau)+2\sigma\tau\}l^6+(1+\tau)T_a] \quad , \tag{18}$$

$$(\sigma+\tau)Q^2+(1+\tau+2\sigma)[\{(\sigma+\tau)(\sigma^2+1)l^6+(\sigma-\tau)T_a\}/k^2+B]Q$$

$$+\frac{\sigma^2l^6}{k^2}(1+\tau+2\sigma)^2[\{(\sigma+\tau)l^6+\frac{(\sigma-\tau)}{\sigma^2}T_a\}/k^2+B]=0 \quad , \tag{19}$$

$$(\sigma+1)Q^2+(1+\tau+2\sigma)[\{(\sigma+1)(\sigma^2+\tau^2)l^6+(\sigma-1)T_a\}/k^2+\Gamma]Q$$

$$+\frac{\sigma^2l^6}{k^2}(1+\tau+2\sigma)^2[\tau^2\{(\sigma+1)l^6+\frac{(\sigma-1)}{\sigma^2}T_a\}/k^2+\Gamma]=0 \tag{20}$$

が得られる．ただし，$B\equiv(1-\tau)R_T$，$\Gamma\equiv(1-\tau)R_s$ である．方程式 (18) と (19) または (18) と (20) を連立させて，Qに対する二次方程式の正根の存在領域を決定する．

二次方程式 (19) あるいは (20) に正根が存在するための条件から簡単に導ける結論を示そう（付録参照）．

(i) テーラー数 T_a* が0に等しく回転がない場合，中立振動モードは，温度レーリー数 R_T* および塩分レーリー数 R_s* がともに負のいわゆる diffusive regime* に限られる．

(ii) プラントル数 σ が1以上のとき，テーラー数 T_a* の大きさいかんによらず，中立振動モードは結論 (i) の場合と同様 diffusive regime に限られる．

(iii) プラントル数 σ が拡散率比 τ 以上のとき，テーラー数 T_a* の大きさいかんによらず，中立振動モードは温度レーリー数 R_T* が負の領域に限られる．プラントル数 σ が拡散率比 τ 以上であるとは，シュミット数が1以上ということに他ならないことに注意すべきである．

(iv) 中立振動モードの存在範囲についての結論 (ii) および (iii) はもう少し精密化できる．

プラントル数 σ が

$$(\sigma+\tau)+(\sigma-\tau)T_a^*\geqq 0$$

の関係をみたせば，つまり，プラントル数 σ が拡散率比 τ 以上か，テーラー数 T_a* が十分小さければ，中立振動モードの存在領域は温度レーリー数 R_T* が負の領域に限られる．また，プラントル数 σ が

$$(\sigma+1)+(\sigma-1)T_a^*\geqq 0$$

の関係をみたせば，つまりプラントル数 σ が1以上か，テーラー数 T_a* が十分小さければ，中立振動モードの存在領域は，塩分レーリー数 R_s* が負の領域に限られる．

---

* diffusive regime[2] とは，拡散率の大きい要素が不安定分布で拡散率の小さい要素が安定分布になっている場合をいう（図では第三象限に対応する）．

結論 (ii), (iii) は回転系熱対流におけるよく知られた結論『プラントル数 σ が1以上のとき，中立振動モードは存在しない』を一般化したものといえる．これらの結論によって，プラントル数 σ が等しいところおよび τ に等しいところで中立振動モードの存在範囲について，質的変化があらわれることがわかる．

3.3. 中立安定曲線の形

中立曲線の計算結果を図—3，4，5，6に示す．不安定領域には斜線が施してある．第3.1節で述べたように，縦軸，横軸にはそれぞれ，温度レーリー数，塩分レーリー数を臨海レーリー数で正規化した R_T^*/R_c^*, R_s^*/R_c^* をとってある．したがって，テーラー数 T_a^* がいろいろ異なっても単調モード中立曲線はただ一つである．これは破線で示され，その右下側が単調モードの不安定領域である．もし，$(R_s^*-R_T^*)$ 平面上に中立曲線を描くのなら，臨界レーリー数 R_c^* だけ拡大しなければならない（テーラー数 T_a^* の関数としての臨界レーリー数 R_c^* の大きさは図—2(a) を参照されたい）．その際，臨界レーリー数 R_c^* はテーラー数 T_a^* の単調増加関数であることに留意する必要がある．たとえば，$(R_s^*/R_c^*-R_T^*/R_c^*)$ 平面上で単調モードの中立曲線が各テーラー数に対して同一であるということは，テーラー数が大なるにつれて $(R_s^*-R_T^*)$ 平面上では不安定領域が図の原点から遠ざかる，つま

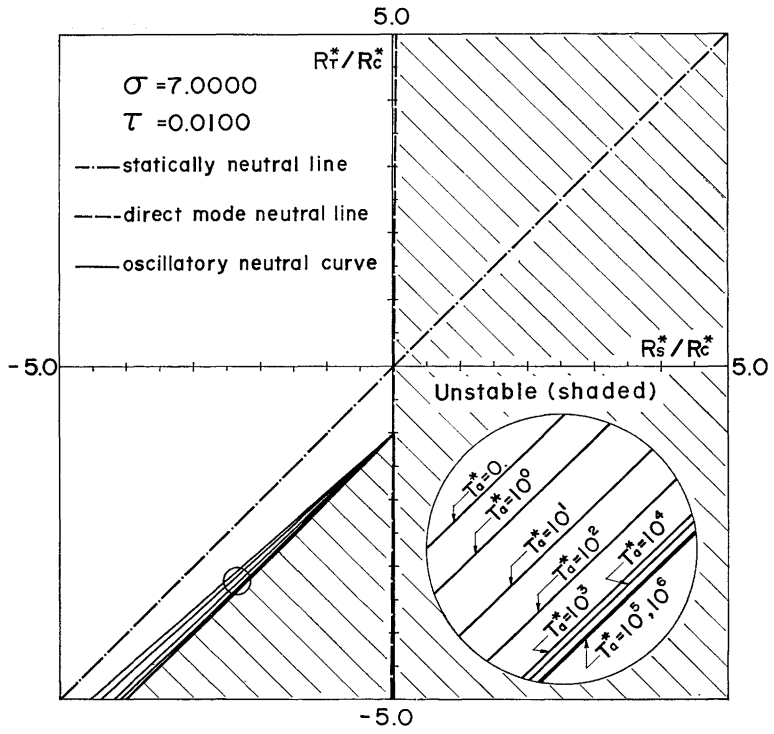
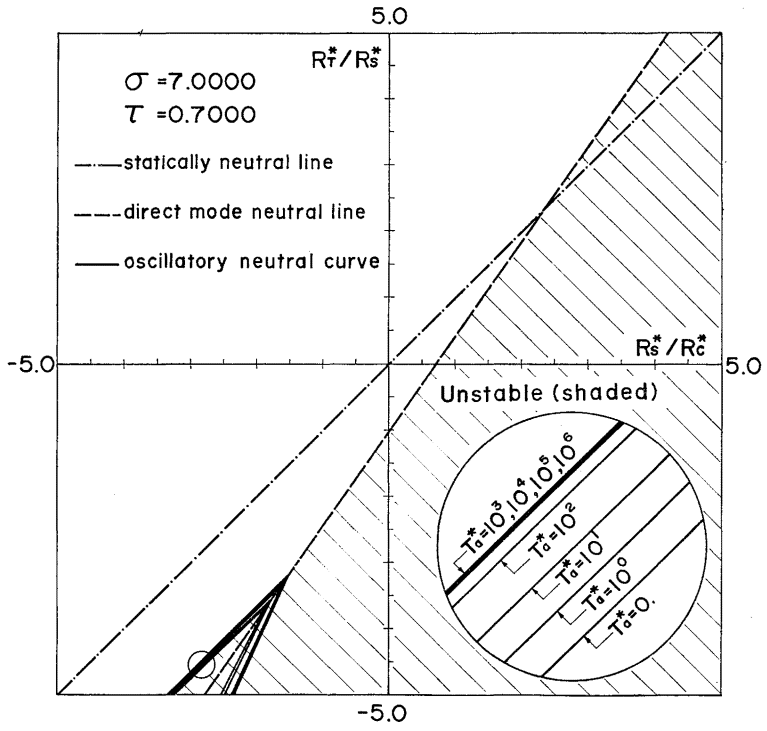


図 3(a)　$\sigma=7$, $\tau=0.01$（これは海水に相当する）



(b) $\sigma=7$, $\tau=0.7$

図 3　プラントル数が1より大きい場合の安定図

不安定領域には斜線が施してある．一点鎖線は静的中立曲線，破線は単調モード中立曲線であり，実線が各テーラー数 T_a^* に対する振動モード中立曲線である．右下の大きい円は，左下の小さい円の部分を模式的に拡大したもので，スケールは対応していない．

り不安定領域がせまくなることと見なければならない．これは前に説明した通り，回転が大きいほど単調モードが安定化してくることを示す．

図中，一点鎖線で示されるのは静的中立直線* で，その右下側が静的不安定領域，左上側が静的安定領域である．熱塩対流に特徴的なことは，静的安定が必ずしも系としての安定を意味しないことである．以下の各図において，斜線で示される不安定領域が静的安定領域内に存在することが見られるであろう．このことは，非回転の場合にすでに見出されていたことであるが，回転の存在も結果を定性的に変えることはない．

第3.2節で示されたように，プラントル数 σ の1あるいは τ との大小関係で，中立振動モードの存在領域が大きく変化する．このことをふまえて安定図を分類しよう．図—3がプラントル数 σ が1より大の場合，図—4が1より小で τ より大の場合，そして図—5が τ より小さい場合である．図—6

* 基本場の密度の鉛直分布でみたとき，鉛直上方程密度が小のとき静的安定分布，その逆を静的不安定分布という．

ではプラントル数 σ がちょうど1あるいは拡散率比 τ に等しい場合であり，図—3と図—4の中間，図—4と図—5の中間のつもりである．(実際には，$\sigma=1$ は $\sigma>1$ の場合と同類，$\sigma=\tau$ は $\sigma>\tau$ と同類である．)

図—3(a)は海水の場合に相当し，プラントル数 $\sigma=7$，拡散率比 $\tau=0.01$ である．振動モードの中立曲線は実線で示される．これはテーラー数が異なれば異なる．図中，右下の円内には diffusive regime の中の円の部分を拡大して描いてある．ただし，模式的なものでスケールは対応していない．図—3(b)は $\sigma=7$，$\tau=0.7$ の場合である．この図では，温度レーリー数 R_T^*/R_c^* を固定したとき中立振動モードの存在しうる R_s^*/R_c^* についての上限も同時に示され，それによれば確かに diffusive regime に存在が限られており，第3.2節の結論 (ii) と一致していることが見られる．

図—4(a)は $\sigma=0.5$，$\tau=0.1$，(b)は $\sigma=0.1$，$\tau=0.01$ の場合である．テーラー数 T_a^* が十分大であれば，第4象限 ($R_s^*/R_c^*>0$，$R_T^*/R_c^*<0$) 内にも中立振動モードが存在しうることがわかる．プラントル数 σ が1より小さくなったので，塩分レーリー数 R_s^* に対する中立振動モードが存在するための制限が外されたからである．第4象限内の，R_s^*/R_c^* の上限を示す実線に折れまがりがみられるが，計算精度が悪いためかもしれない．いずれにしろこの付近は，すでに単調モードの不安定領域内であるから，実際上の問題はない．図—4(a)でもみられるが，図—4(b)で顕著なことは，たとえ

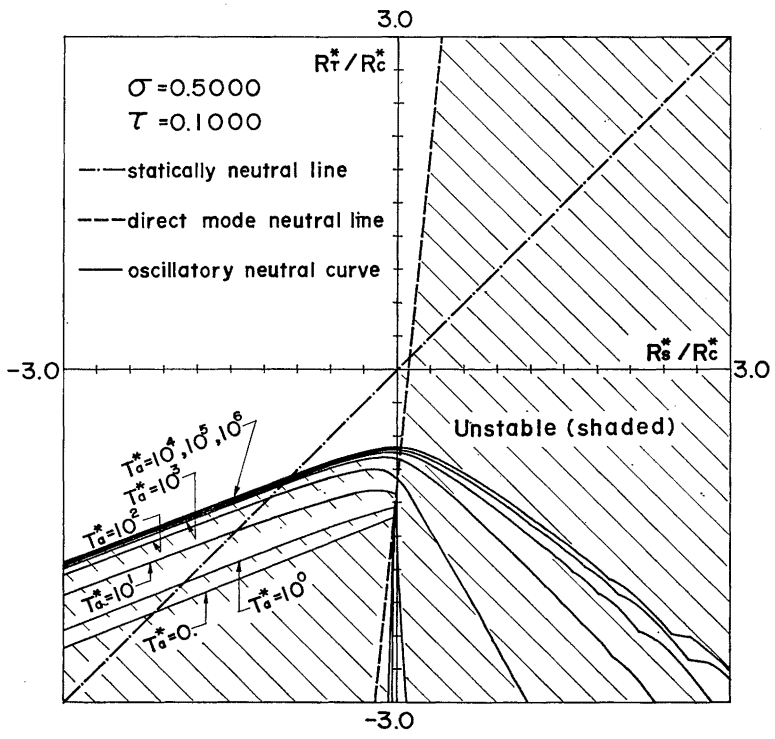
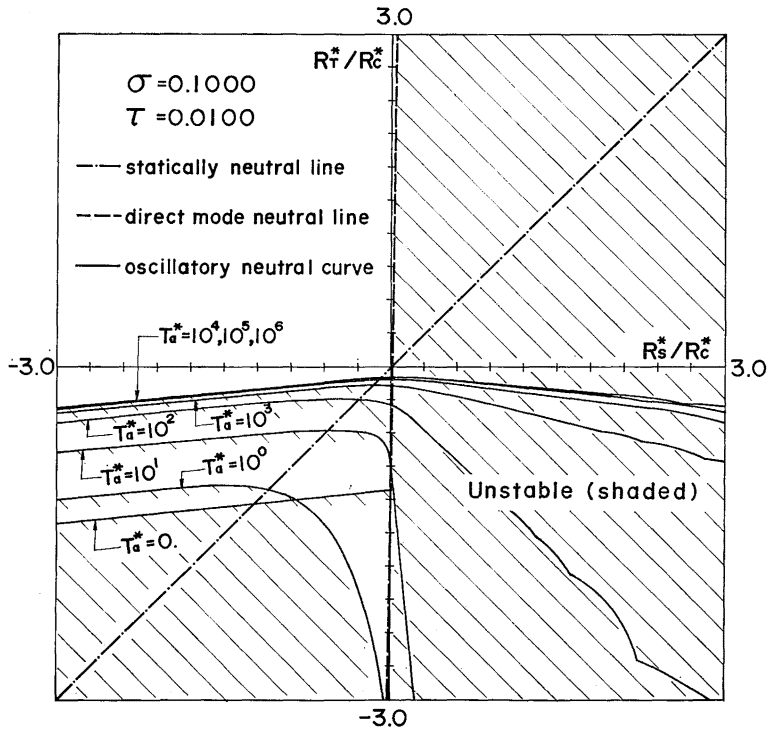


図 4(a)　$\sigma=0.5$，$\tau=0.7$



(b) $\sigma=0.1$, $\tau=0.01$

図 4　プラントル数が1より小さくて τ より大きい場合の安定図
記号は図3と同様.

ばテーラー数 $T_a^*=1$ のときある範囲の温度レーリー数 R_T^* に対しては，塩分レーリー数 R_s^* が十分に小さいとき（$R_s^*\to-\infty$）は安定で，少しづつ大きくして0に近づけると最初に振動モードの不安定領域にはいり，次にそこを出て安定となることである．さらに大きくすれば単調モードの不安定領域にはいる．普通に考えれば不安定要素である温度差 $\Delta T<0$ を固定しておいて，この場合の安定要素である塩分差 $\Delta S<0$ の絶対値を小さくしていく（R_s^* を $-\infty$ からOに近づける）と，ある塩分差の絶対値 $|\Delta S|$ より小さければ不安定であるだろうと予想される．しかし，そうはならないことが図—4によって示されたわけである．回転がなくテーラー数 T_a^* が0に等しいときは，図から明らかなように上の予想が成り立つ．すなわち，振動モードの不安定領域が切れ目なく単調モードの不安定領域に接続されている．このことが，回転という因子がある場合とない場合の熱塩対流を決定的に区別するものである．振動モードについては単調モードの場合と異なり，回転系熱対流から回転系熱塩対流への拡張が直接的に行なわれ得ないことがわかる．

図—5(a)には $\sigma=0.01$, $\tau=0.1$,(b)には $\sigma=0.01$, $\tau=0.5$ の場合が示してある．テーラー数を大きくすると，中立振動モードの存在するための塩分レーリー数 R_s^* に対する上限も無限大になる．

プラントル数 σ が拡散率比 τ よりも小さくなっているため，中立振動モードが存在するための温度レーリー数に対する制限が外され，第1象限の finger regime* にも中立振動モードが存在するようになる．図—5（b）では図—5（a）よりも原点付近の様子を詳しく知ることができる．第1象限においても十分大きいテーラー数 T_a* を固定してみると，温度レーリー数 R_T* が小さいうちは振動モードの方が広い不安定域をもつが，温度レーリー数 R_T* が大きくなるとやがて単調モードの方が振動モードの不安定域を凌駕するようになることがわかる．

図—6（a）は，$\sigma=1$, $\tau=0.1$,（b）は $\sigma=\tau=0.01$ の場合である．それぞれ図—3と図—4，図—4と図—5をつなぐプラントル数をもつ場合であるが，別段かわったことはみられない．

以上の図から，以下のような結論が導ける．

（i） プラントル数 σ が減少するにつれて，テーラー数 T_a* が十分大であれば，中立振動モードの存在する領域は第3象限（diffusive regime）から第4象限さらに第1象限（finger regime）へと拡がっていく．

（ii） 臨界レーリー数 R_c*$=R_c$*$(T_a$*$)$ で正規化したレーリー数 T_a* を用いる場合，テーラー数を無

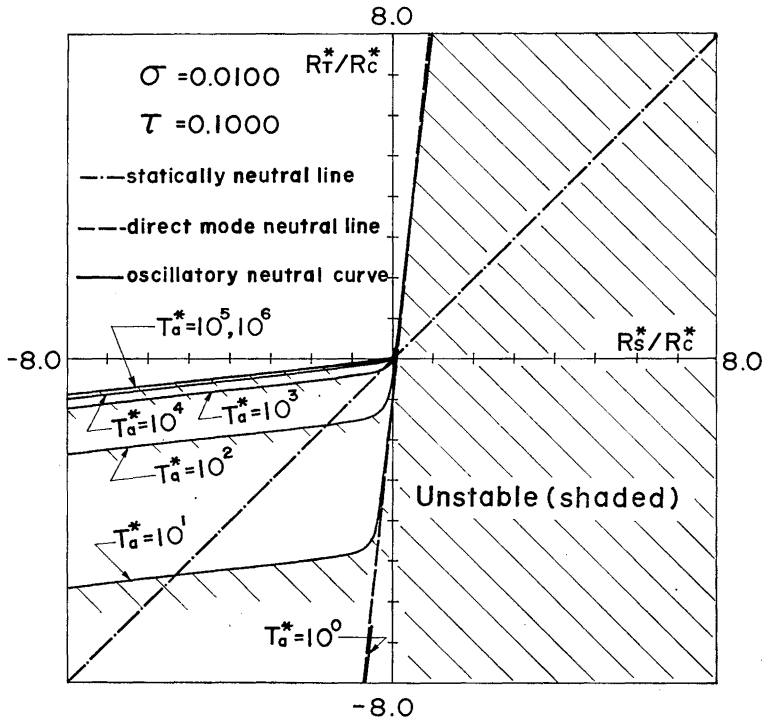
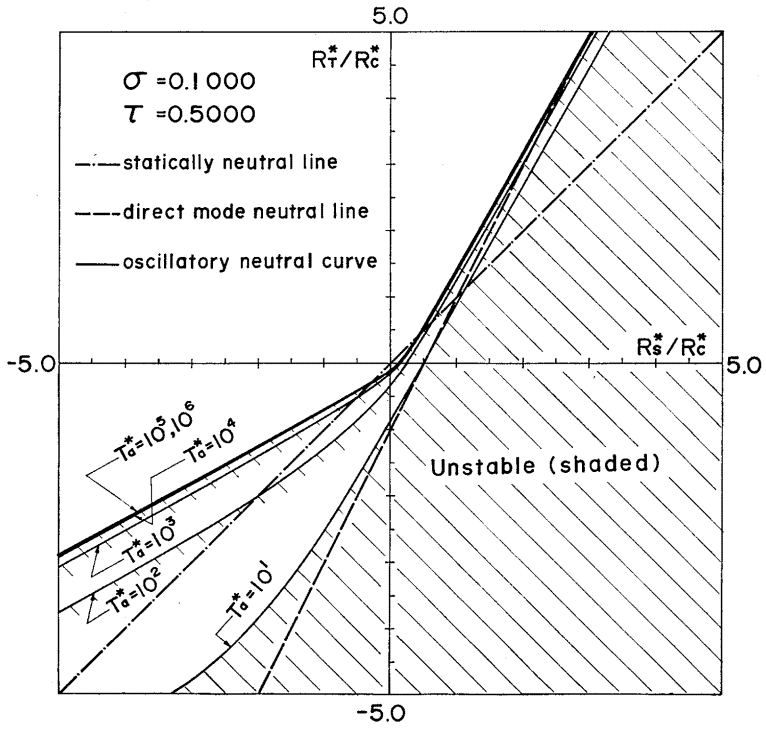


図 5（a）　$\sigma=0.01$, $\tau=0.1$

* finger regime[2] とは，diffusive regime と逆で，拡散率の大きい要素が安定分布，拡散率の小さい要素が不安定分布をしている場合である．ソルト・フィンガーと呼ばれる対流が生じることから名付けられた．



(b) $\sigma=0.01$, $\tau=0.5$

図 5 プラントル数が τ より小さい場合の安定図 記号は図3と同様.

限大に近づけると，単調モードだけでなく振動モードについても中立曲線は漸近形をもつ.

(iii) 結論 (ii) および臨界レーリー数がテーラー数の増加関数であることから，回転が大きいほど系は安定する.

(iv) 結論 (ii) からは，テーラー数が十分大きい場合，単調モードのときと同様振動モードについても粘性は不安定化作用を示すとは単純に言えない．テーラー数を固定しておいてプラントル数を小さくしていくときは，振動モードの不安定域はやはり拡がる.

(v) プラントル数が1より小さく拡散率比よりも大きい場合，回転がある程度大きいと，固定した負の温度レーリー数に対して塩分レーリー数を大きくすればするほど不安定とは必ずしもいえない．塩分レーリー数を大きくしていくと振動モードの不安定域にはいるが，やがてそこを抜け出して安定領域にはいるという場合があるからである．さらに塩分レーリー数を増大せしめると単調モードの不安定領域にはいる.

4. 考 察

まず，最初にエネルギー論と，温度および塩分による鉛直浮力輸送について触れる.

量Aの体積平均を＜A＞で表わす．水平波数ベクトルの方向を x 軸方向にとっておくと

$$<A>\equiv\frac{\int\int\int A\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int dx\,dy\,dz}=\frac{\int\int A\,dx\,dz}{\int\int dx\,dz}$$

とできる．方程式（1）−（5）からエネルギー方程式をつくると，次元をもった形で

$$p_r\cdot<\{|u|^2+|w|^2\}+\left\{\frac{g\alpha|T|^2}{(\Delta T/d)}-\frac{g\beta|S|^2}{(\Delta S/d)}+|v|^2\right\}>$$

$$=-<\nu|\nabla\boldsymbol{u}|^2+\frac{g\alpha\kappa|\nabla T|^2}{(\Delta T/d)}-\frac{g\beta\lambda|\nabla S|^2}{(\Delta S/d)}> \tag{21}$$

$$q\cdot<\{|u|^2+|w|^2\}-\left\{\frac{g\alpha|T|^2}{(\Delta T/d)}-\frac{g\beta|S|^2}{(\Delta S/d)}+|v|^2\right\}>=0 \tag{22}$$

となる．方程式（21），（22）には回転の強さを表わすコリオリ・パラメータは，もちろん陽には現われない．方程式（21）を用いて，物理的にはほとんど明らかな結論『温度差 ΔT かつ塩分差 ΔS が負（レーリー数でいえば第2象限で $R_T{}^*>0$，$R_s{}^*<0$）のとき，中立ないし不安定モードはありえない』を導くことができる．もし，温度差 ΔT が正で塩分差 ΔS が負なら方程式（21）の右辺は負であり，左辺の＜　＞の中は正である．よって p_r は負でなければならないことになるからである．方程式(22)

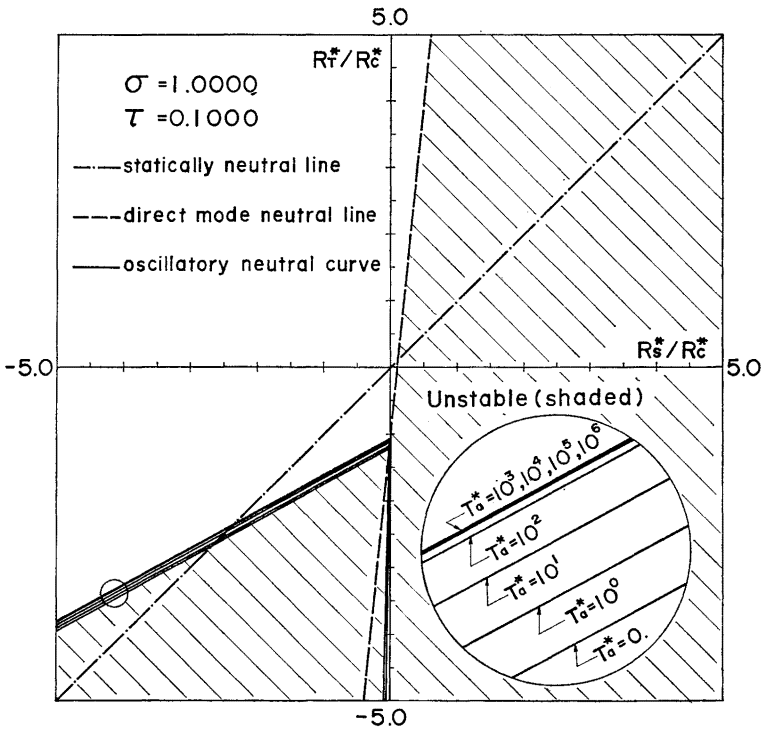
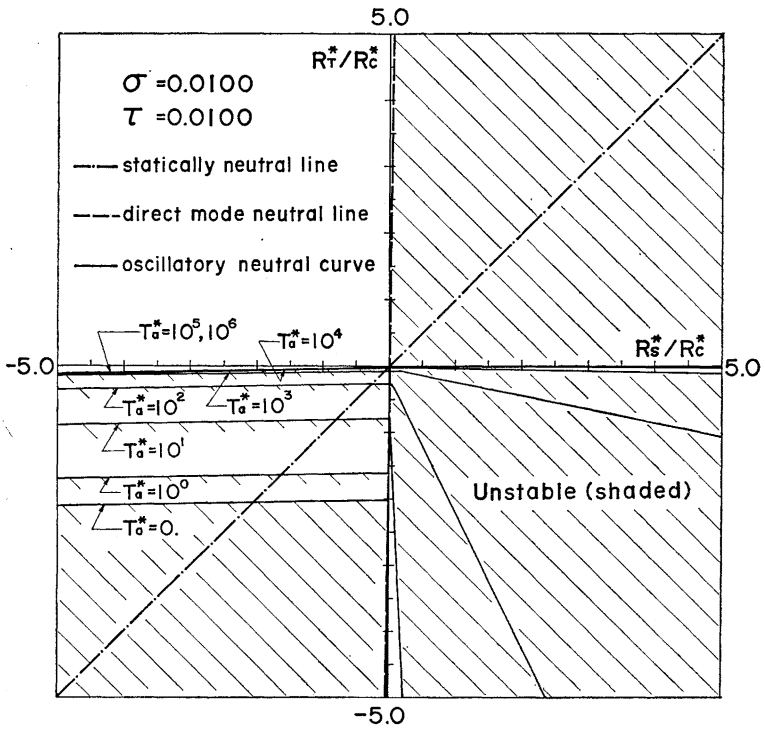


図 6（a）　$\sigma=1$，$\tau=0.1$



(b) $\sigma=\tau=0.01$

図 6　プラントル数が1に等しい場合および τ に等しい場合の安定図
記号は図3と同様.

からは振動モードに対する回転の重要性が指摘できる. 温度差 ΔT が負, 塩分差 ΔS が正のとき (両要素とも不安定分布), もし回転がなければ $v=0$ であることが言えるため, 方程式 (22) の左辺の $<\ >$の中は必ず正であり, よって振動数 $q=0$ となる. 振動モードはこの場合, 安定, 中立, 不安定モードかに拘らず存在しないことになる. 回転があれば $|v|^2$ が正であるため$<\ >$の中が0に等しくなるような振動モードが存在しうるようになる. この振動が慣性重力波起源であることは明らかであるが, 最も純粋な形である分子拡散率 ν, κ, λ が0に等しいときについて, 次のように説明することもできる. このとき

$$T=-(\Delta T/d)\eta, \qquad S=-(\Delta S/d)\eta,$$

η は水粒子の原位置からの鉛直変位である. バイサラ振動数Nは

$$N^2=-g\frac{\Delta\rho}{\rho_0 d}=g\cdot\frac{\alpha\Delta T-\beta\Delta S}{d}$$

で定義され, これを用いると, 方程式 (22) は

$$<|u|^2+|w|^2>=<N^2|\eta|^2+|v|^2>$$

となり，内部慣性重力波のエネルギー等分配を表わす．つまり，波の進行方向および鉛直方向の運動エネルギーの和が密度成層によるポテンシャルエネルギーおよび進行方向と直角方向の運動エネルギーの和に体積平均（あるいは一周期平均）において等しい．

熱塩対流の分野で常に問題とされる温度・塩分による浮力の鉛直輸送 F_T, F_s は，それぞれ

$$F_T=R_e\{g\alpha<wT^*>\},\qquad F_s=R_e\{g\beta<wS^*>\}$$

で表わされる．(T^*, S^*) は (T, S) の複素共役である．計算の結果，その比は

$$\frac{F_T}{F_s}=\frac{(R_T^*)}{(R_s^*)}\left(\frac{p_r+\kappa l^2}{p_r+\lambda l^2}\right)\left\{\frac{(p_r+\lambda l^2)^2+q^2}{(p_r+\kappa l^2)^2+q^2}\right\}$$

となるが，特に中立モード $p_r=0$ では，

$$\frac{F_T}{F_s}=\frac{(R_T^*)}{(R_s^*)}\cdot\left(\frac{1}{\tau}\right)\cdot\left(\frac{\lambda^2l^4+q^2}{\kappa^2l^4+q^2}\right)$$

である．振動数 q の大きさによって

$$q\gg\kappa l^2,\ \lambda l^2 \text{ のとき } \frac{F_T}{F_s}\sim\left(\frac{R_T^*}{R_s^*}\right)\frac{1}{\tau}$$

$$q\sim(\kappa l^2)\cdot(\lambda l^2)\text{のとき } \frac{F_T}{F_s}\sim\left(\frac{R_T^*}{R_s^*}\right)$$

$$q\ll\kappa l^2,\ \lambda l^2 \text{ のとき } \frac{F_T}{F_s}\sim\left(\frac{R_T^*}{R_s^*}\right)\tau \qquad (23)$$

となる．温度（塩分）による浮力輸送の絶対値を相対的に大きくするためには，振動数 q を大きく（小さく）する方がよいことがわかる．いわゆる diffusive regime では不安定モードとしては，振動モードが現われやすいこと，およびいわゆる finger regime では不安定モードとしては単調モードが現われやすいことは，それぞれの場合不安定要素が温度，塩分であることから，上の議論によっても説明できる．

本論文の計算はすべて鉛直波数 n を 1 と仮定して行なわれた．しかし，一般の鉛直波数 $n\neq1$ の場合についても Baines & Gill(1969)[3] と同様，次の変換

$$(k,\ n,\ R_T^*,\ R_s^*,\ T_a^*,\ p)\rightarrow\left(\frac{k}{n},\ 1,\ \frac{R_T^*}{n^4},\ \frac{R_s^*}{n^4},\ \frac{T_a^*}{n^4},\ \frac{p}{n^2}\right)$$

を考えれば鉛直波数 $n=1$ の場合に容易に帰着する．したがって，一般の鉛直波数 n のときの中立曲線を表わす方程式は，$n=1$ のときの中立曲線を表わす方程式において (R_T^*, R_s^*, T_a^*) を $\left(\frac{R_T^*}{n^4},\ \frac{R_s^*}{n^4},\ \frac{T_a^*}{n^4}\right)$ で置き換えたものによって表わされる．単調モードの場合，方程式 (12) は

$$\frac{R_s^*}{\tau}-R_T^*=\frac{(k^2+n^2)^3+T_a^*n^2}{k^2}$$

となり，右辺が鉛直波数 n について単調増加であることは明らかであり，したがって $n=1$ の最低モ

ードが最も広い不安定領域をもつ．とくにテーラー数 T_a^* を大きくすると，鉛直波数が n の場合の臨界レーリー数 ${}^{(n)}R_c^*$ は，

$$ {}^{(n)}R_c^*(T_a^*)=n^4R_c^*\left(\frac{T_a^*}{n^4}\right)\sim n^{4/3}R_c^*(T_a^*) $$

と表わされ，鉛直波数が1の場合の臨界レーリー数 R_c^* の $n^{4/3}$ 倍である．振動モードについていえば，テーラー数を大きくしていったとき（$R_s^*/R_c^*-R_T^*/R_c^*$）平面上で振動モードや中立曲線がある漸近形をもつことが第3.3節の結論（ii）からわかっているので，十分大きいテーラー数に対してはやはり，鉛直波数が1の最低モードが最も広い不安定領域をもつといえる．

本論文において，おそらく最も興味深く，かつ最も物理的説明が困難な結論は，第3.3節で結論（v）として述べた部分であろう．直観的描像とは相入れない結論である．説明を要するのは結論（v）の現象がおこるのは第一にプラントル数 σ が1より小さくかつ拡散率比 τ 以上である場合に限ること，第二に，回転が存在する場合に限ることである．今のところ，理由を一応以下のように考えている．まず，回転が存在するために振動モードの振動数は，回転がない場合に比較すれば増大するであろう．そうすれば，式（23）からわかるように不安定要素である温度の鉛直輸送が相対的に増加し，そのため振動モードの不安定がおこりやすくなると期待される．粘性が大きければ，振動数の増加は運動エネルギーのより大きな消散をまねくかもしれないが，今の場合，プラントル数は1より小さいから，温度の鉛直輸送の相対的増加の方が粘性消散の増加よりも大きい効果をもつのだろう．安定要素である塩分の効果を小さくすると（R_s^* を負から0に近づけると），塩分による復元力としての浮力は小さくなってしまう．コリオリカを主要な復元力とする振動モードが発生することも考えられるが，そのためには粘性が大きすぎることが第3.2節結論（iii）によりわかる．結局は，塩分の効果が小さくなると復元力が小さくなるために，振動モードの不安定はおこりえなくなるのだろう．以上の説明も十分納得がいくものではなく今後の問題である．

最後に粘性が厳密に0に等しい場合について調べておく．方程式（10），（11）より容易にわかるように，テーラー数が0でない限り中立単調モードはもはや存在しない．これは粘性の単調モードに対する不安定化作用を示す式（7）の関係から予想されることである．方程式（18）－（20）からは中立振動モードの存在領域が，関係

$$ R_s\geqslant\tau R_T \quad \text{または} \quad R_s\leqslant\frac{R_T}{\tau} $$

をみたす領域であることがわかる．図－5（a）でも，振動モード中立曲線が直線

$$ R_s=\tau R_T, \qquad R_s=R_T/\tau $$

に漸近していくらしい様子がみえる．

謝　　辞

有益な討論をして頂き終始激励して下さった光易恒教授に感謝致します．図表の作成をして頂いた江

藤賢次氏，田中道芳氏ならびに原稿清書をして頂いた浦口信子嬢に感謝致します．なお，計算には九州大学応用力学研究所のU 230-48を使用しました．

参 考 文 献

1) Chandrasekhar, S: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. (Clarendon, Oxford, 1961).
2) Turner, J. S.: Buoyancy Effects in Fluids. (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
3) Baines, P. G. and Gill, A. E.: On thermohaline convection with linear gradients, J. Fluid Mech. 37 (1969) 189.

(昭和51年6月2日　受理)

付　　録

中立振動モードが存在するための条件について，予備的に二つのことを調べておく．まず，二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a>0)$$

の正根が存在しないための十分条件に

$$b>0 \text{ かつ } c>0 \qquad \text{(A・1)}$$

がある．

次に，関数

$$y=\frac{\alpha(x+1)^3+\beta}{x} \qquad (x>0;\ \alpha>0)$$

のふるまいを調べると次のようになる．

(i) $\alpha+\beta$ が正のとき，ある $x=x_c>0$ で正の最小値をもつ．これを $y_c=y_c(\alpha,\ \beta)$ と書こう．

(ii) $\alpha+\beta$ が 0 に等しいとき，$x=0$ で最小値 $y_c=3\alpha$ をもつ．

(iii) $\alpha+\beta$ が負のとき，y は $x>0$ について単調増加関数であり，$x\to+0$ での $-\infty$ から $x\to\infty$ での $+\infty$ までの値をとる．

以上の二つを組み合わせて方程式 (13) あるいは (14) に適用すれば，第3.2節の結論 (i)-(iv) が導かれる．さらに中立振動モードが存在するための条件を精密に評価することができる．例として第3.2節の結論 (ii) の場合にそのことを示そう．

方程式 (13) から

$$(\sigma+\tau)(\sigma^2+1)+(\sigma-\tau)T_a>0 \text{ かつ } (\sigma+\tau)+\frac{(\sigma-\tau)}{\sigma^2}T_a>0$$

のとき，すなわち

$$(\sigma+\tau)+\frac{(\sigma-\tau)}{\sigma^2}T_a>0$$

のとき，上の場合分けの (i) になることがわかる．条件 (A・1) から，

$$B>-\max\left\{y_c\left((\sigma+\tau)(\sigma^2+1),\ (\sigma-\tau)T_a\right),\ y_c\left(\sigma+\tau,\ \frac{(\sigma-\tau)}{\sigma^2}T_a\right)\right\} \qquad (A\cdot 2)$$

をみたすときは振動モードが存在しないことになる．不等式（A・2）の右辺はあきらかに負値であり，もっとも精密な評価は次のように与えられる．

『プラントル数 σ が

$$(\sigma+\tau)+(\sigma-\tau)T_a{}^*>0$$

の関係をみたすとき，中立振動モードが存在するための温度レーリー数 $R_T{}^*$ に対する必要条件は

$$R_T{}^*<\left(\frac{-1}{1-\tau}\right)\max\left\{y_c((\sigma+\tau)(\sigma^2+1),\ \sigma^2(\sigma-\tau)T_a{}^*),\ y_c(\sigma+\tau,\ (\sigma-\tau)T_a{}^*)\right\}$$

をみたすことである．』