

環状き裂の応力拡大係数

西谷, 弘信
九州大学工学部材料強弱学教室 : 教授

村上, 敬宜
九州工業大学工学部機械工学科 : 講師

<https://doi.org/10.15017/4743552>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 45, pp.129-139, 1976-11. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



環 状 き 裂 の 応 力 拡 大 係 数

西 谷 弘 信*
村 上 敬 宜**

(樋口正一紹介)

概 要

一様引張応力場における環状き裂の応力拡大係数を体積法によって求めたものである。環状き裂の応力拡大係数は、内半径と外半径の比が1に近づけば2次元平面ひずみにおけるき裂の場合に一致し内半径が0の場合には円板状き裂 (penny shaped crack) の場合に一致することを示す。また、その他の場合には、内側の応力拡大係数の方が外側より大きく、き裂はまず中心に向かって進み円板状き裂になる傾向があることを示す。

1. 緒 言

材料の破壊の問題と関連して応力拡大係数 (Stress Intensity Factor, SIF) の重要性が近年とくに認識されてきた。現在では、応力集中とともに広く実際に利用され、種々の場合について計算がなされ続けている。応力拡大係数の計算法についての総説や資料もいくつか見られるが¹⁾⁻⁴⁾、実際問題と関連して重要な3次元き裂の解は比較的少ない⁵⁾⁻¹¹⁾。

本研究は、一様引張応力場にある環状き裂の応力拡大係数を体積法¹²⁾によって求めたものである。環状き裂の問題は、丸棒の外側から入った円周き裂の問題の基礎になるが、その他の3次元き裂の問題とも関連している。

たとえば、内径が0に近づくと中心付近は深い軸対称3次元き裂と等価となり、き裂全体としては円板状き裂の状態に近づく。また、内径と外径の比が1に近づけば、2次元平面ひずみの問題と等価となる。

F. Erdogan¹³⁾ も同じ問題を試みているが数値は得られていない。

2. 計 算 方 法

体積法¹²⁾を2次元問題に適用する場合には、無限板の一点に作用する集中力による応力場が基本となる¹²⁾。それを3次元問題に適用する際には、無限体の一点に作用する集中力による応力場が基本となる。き裂の問題では、2次元の場合^{4), 14)}と同様に集中力が作用する場合の応力場を微分したものが基本解となる。本方法では、この基本解をき裂となるべき面上にそって分布させ、その両側で境界条件を満足させることによって解を得る。以下、閉じた形で求まる特別な場合⁷⁾を例にとって計算法を説明し、その後で環状き裂の問題の具体的解法を述べる。

* 九州大学教授，工学部材料強弱学教室

** 九州工業大学講師，工学部機械工学科 北九州市戸畑区仙水町1

曲面の微小要素 $d\mathbf{A} = dA_{xy}\mathbf{i} + dA_{yz}\mathbf{j} + dA_{zx}\mathbf{k}$ に働く体積力の合力が $d\mathbf{p} = dp_x\mathbf{i} + dp_y\mathbf{j} + dp_z\mathbf{k}$ なるとき、ここでは体積力の密度 ρ_x, ρ_y, ρ_z を次式で定義する.

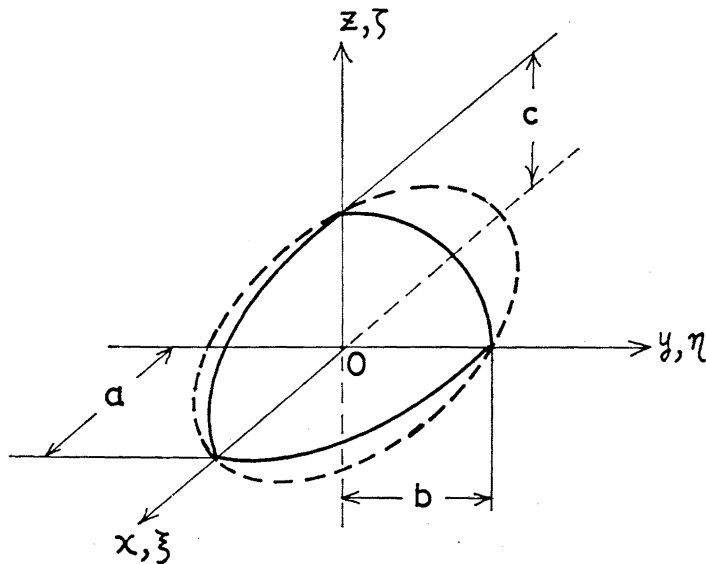
$$\rho_x = \frac{dP_x}{dA_{yz}}, \quad \rho_y = \frac{dP_y}{dA_{zx}}, \quad \rho_z = \frac{dP_z}{dA_{xy}} \quad (1)$$

2.1. 一様引張応力を受ける無限体中におけるだ円板状き裂の解

だ円板状き裂は、だ円体空かを無限に扁平にした極限の形と考えられるので、まず、だ円体空かについて考える. 図1のように、三つの主軸の長さがそれぞれ $2a, 2b, 2c$ ($a > b > c$) のだ円体空か ($\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 + \zeta^2/c^2 = 1$) が z 方向の引張応力 σ_∞ を受ける無限体中にある場合を考える. このとき、だ円体空か縁の任意の点における x, y, z 方向の変位を u^*, v^*, w^* とすれば、 $u^* \propto \xi^*$, $v^* \propto \eta^*$, $w^* \propto \zeta^*$ (ξ^*, η^*, ζ^* は u^*, v^*, w^* を考える点の ξ, η, ζ の値) となる¹³⁾.

ここで、だ円体空かと同形状のだ円体物体 (同材料でできているとする) を想像し、そのだ円体物体が

$$u = \frac{u^*}{\xi^*} \xi, \quad v = \frac{v^*}{\eta^*} \eta, \quad w = \frac{w^*}{\zeta^*} \zeta$$



$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c$$

図1 無限体中におけるだ円体空か

なる一様変形をするとすれば、表面における変位は u^* , v^* , w^* となる。このとき、そのだ円体物体の x , y , z 方向のひずみは次のようになる。

$$\varepsilon_x = \frac{u^*}{\xi^*}, \quad \varepsilon_y = \frac{v^*}{\eta^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{w^*}{\zeta^*} \quad (2)$$

(ε_x , ε_y , ε_z は、だ円体内部で一定)

また、この ε_x , ε_y , ε_z を生ずるためのだ円体物体の応力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 E : 縦弾性係数, ν : ポアソン比,

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

したがって、だ円体空かのない無限体から出発して、だ円体空かのある無限体が引張応力 σ_∞ をうける場合の応力場をうけるためには、 σ_∞ をうける空かのない無限体中に想像しただ円体の曲面上に密度 ρ (成分, ρ_x , ρ_y , ρ_z) が次式で表わされる x , y , z 方向の集中力 (連続的に分布させることによって体積力と考えることができる) を分布させればよいことになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \rho_y &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \rho_z &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式 (4) で表わされる密度 ρ が決まれば、この場合の応力を計算することができるが、この式には式 (2) の ε_x , ε_y , ε_z が含まれているので ε_x , ε_y , ε_z を知る必要がある。それらは、Eshelby¹⁵⁾ によってすでに得られているだ円体空かに関する解を利用すれば求まり、以下のように表わされる。

$$[S]\{\varepsilon\} = \{A\} \quad (5)$$

ここで、

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\{A\} = \begin{pmatrix} -\nu \frac{\sigma_{\infty}}{E} \\ -\nu \frac{\sigma_{\infty}}{E} \\ \frac{\sigma_{\infty}}{E} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$[S] = \begin{pmatrix} (1-S_{11}) & -S_{12} & -S_{13} \\ -S_{21} & (1-S_{22}) & -S_{23} \\ -S_{31} & -S_{32} & (1-S_{33}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= Qa^2 I_{aa} + RI_a, & S_{12} &= Qb^2 I_{ab} - RI_a, & S_{13} &= Qc^2 I_{ac} - RI_a \\ S_{21} &= S_{12}, & S_{22} &= Qb^2 I_{bb} + RI_b, & S_{23} &= Qc^2 I_{bc} - RI_b \\ S_{31} &= S_{13}, & S_{32} &= S_{23}, & S_{33} &= Qc^2 I_{cc} + RI_c \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$Q = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}, \quad R = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \quad (10)$$

$$I_a + I_b + I_c = 4\pi \quad (11)$$

$$I_{aa} + I_{ab} + I_{ac} = 4\pi/3 a^2 \quad (12)$$

$$a^2 I_{aa} + b^2 I_{ab} + c^2 I_{ac} = I_a \quad (13)$$

$$I_{ab} = \frac{I_a - I_b}{3(a^2 - b^2)} \quad (14)$$

$$I_a = -\frac{4\pi abc}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{1/2}} (F - E) \quad (15)$$

$$I_c = -\frac{4\pi abc}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)^{1/2}} \left\{ \frac{b(a^2 - c^2)^{1/2}}{ac} - E \right\} \quad (16)$$

F, E : 第 1 種, 第 2 種だ円積分

$$F = F(\theta, k), \quad E = E(\theta, k) \quad (17)$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{(a^2 - c^2)^{1/2}} \quad (18)$$

式 (9) における I_{bb}, I_{bc} などは, 式 (11) 以下の諸式で, a, b, c を順番に交換させることによって求めることができる. 式 (5) より $\{\epsilon\}$ は,

$$\{\epsilon\} = [S^{-1}] \{A\} \quad (19)$$

となる. 式 (19) の $\{\epsilon\}$ の各成分を式 (4) に代入すれば, だ円体空かの場合の体積力の密度 ρ_x, ρ_y, ρ_z が決定できる.

次に, だ円板状き裂は, だ円体空かにおいて $c \rightarrow 0$ とすればよい. $c \rightarrow 0$ となるとき, だ円体空かの境界上の z 座標 ζ も $\zeta \rightarrow 0$ となるから, このことを考慮に入れて式 (4) の ρ_x, ρ_y, ρ_z において

$c \rightarrow 0$ とともに応力場に関係なくなる項を省略すれば（以下これらを ρ_{x0} , ρ_{y0} , ρ_{z0} とかく）次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{x0} &= \frac{\nu(1-\nu)}{(1-2\nu)} \cdot \frac{\sigma_{\infty} b}{E(k)} \cdot \frac{2\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}}{\zeta} \\ \rho_{y0} &= \rho_{x0} \\ \rho_{z0} &= \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} \cdot \frac{\sigma_{\infty} b}{E(k)} \cdot \frac{2\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}}{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{1/2} d\varphi \quad (21)$$

2次元問題では、解（応力成分）は、ポアソン比に無関係となるため、 $\nu=0$ において ρ の成分のうち 0 でないものを考えればよいが、3次元問題ではポアソン比が影響するので ρ_{x0} , ρ_{y0} は一般には 0 とおけない。しかし、 ρ_{x0} , ρ_{y0} を考慮に入れて計算すれば、数値計算が複雑となるばかりでなく電算機の容量の制限とも関係してくるので、ここでは $\nu=0$, すなわち $\rho_{x0}=\rho_{y0}=0$ として ρ_{z0} だけを使って計算を進める。穴や切欠きの応力集中にポアソン比が影響する場合でもき裂の問題ではポアソン比の影響がない場合が多く、ここで取扱う問題でもポアソン比の影響は小さいことが予想されるので $\nu=0$ としても実用上十分であろう。

さて、無限体中の一点 (ξ, η, ζ) に z 方向の集中力 P が働くとき、点 (x, y, z) の応力 σ_z は¹⁶⁾,

$$\begin{aligned} \sigma_z^P &= -B [(1-2\nu)(z-\zeta)\{r_1^2+(z-\zeta)^2\}^{-3/2} \\ &\quad + 3(z-\zeta)^3\{r_1^2+(z-\zeta)^2\}^{-5/2}] \end{aligned} \quad (22)$$

$$B = \frac{P}{8\pi(1-\nu)}, \quad r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

で与えられるから、 $\zeta \rightarrow 0$ の場合、だ円体曲面上分布させる式 (20) の $\rho_{z0}(z=\pm\zeta)$ の位置に同じ大きさのものが逆向きに作用している）を対として考えれば、その対が $dA(=d\xi d\eta)$ 部分に働くとき、き裂面上 $(x, y, 0)$ に生ずる応力 $d\sigma_z$ は（以下 $\nu=0$ とする）,

$$\begin{aligned} d\sigma_z &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\rho_{z0} d\xi d\eta \frac{\partial \sigma_z^P}{\partial \zeta} \right]_{P=1} \frac{2\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{\sigma_{\infty} b}{2\pi E(k)} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}}{r_1^3} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) をき裂となるべきだ円面全体について積分し、応力分布を計算すれば、引張応力 σ_{∞} の場におけるだ円板状き裂の応力拡大係数を求めることができる。それは、

$$K_I = \frac{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}}{E(k)} \left(\frac{\sin^2 \theta + \frac{b^4}{a^4} \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta} \right)^{1/4} \quad (24)$$

ここで,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2.2. 環状き裂の問題の解法

本計算法では、結局境界条件を満足するように体積力の密度の分布をきめることが問題であるが、密度の分布が 2.1 節に示したように閉じた形で求まる場合は限られている。したがって、一般には数値計算が必要となる。

図 2 に示すような環状き裂の場合には、き裂に相当する部分を半径方向に等分割し、分割された各区間の中点の応力を境界条件として合せるようにする。以下に、具体的方法について説明する。

円板状き裂の場合には、 $\nu=0$ とするとき、式 (20) は特に次のようになる。

$$\rho_{z0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\sigma_\infty \sqrt{a^2 - t^2}}{\zeta} \quad (25)$$

上式は 2 次元き裂の場合の密度と同形式⁴⁾で、密度 $\frac{2}{\pi}$ だけが異なる。 $\frac{2}{\pi}$ は、円板状き裂の応力拡大係数と関係している。同様に、環状き裂 (図 2) の場合には、2 次元き裂を基準として考えることができるので、 ρ_z を

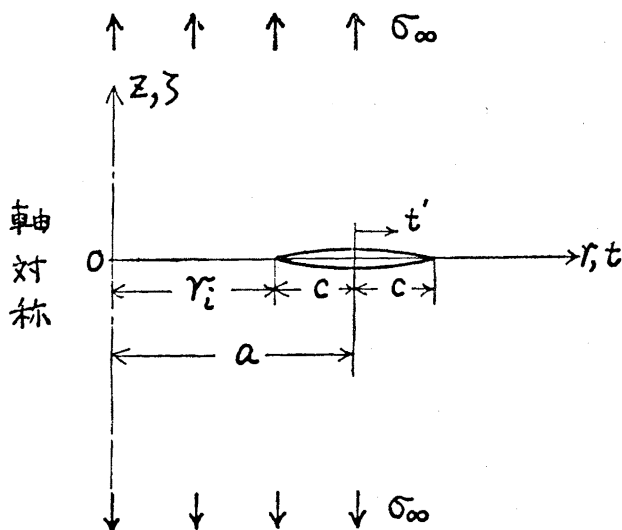


図 2 一様引張応力場における環状き裂

$$\rho_z = \frac{2\sqrt{c^2 - t'^2}}{\zeta} \quad (26)$$

の形におき、実際の問題では境界条件を満足するように式 (26) の ρ_z (以下、 ρ_0 と書くことにする) を場所によってある比率だけ変化させるという方法を探る。すなわち、問題は、体積力の密度 ρ_z を

$$\rho_z = f(t') \cdot \rho_0 \quad (27)$$

ρ_0 : 式 (26) の定義による ρ_z

の形におき、 $f(t')$ を境界条件に合うように決定することに還元される。

2.3. 基礎式

図3のようにB点 (t, φ, ζ) に z 方向の集中力 P が働くときA点 (r, θ, z) に生ずる応力は¹⁶⁾ 次式で与えられる。

$$\sigma_z = -C [(1-2\nu)(z-\zeta)\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{-3/2} + 3(z-\zeta)^3\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{-5/2}] \quad (28)$$

$$C = \frac{P}{8\pi(1-\nu)}$$

$$R^2 = r^2 + t^2 - 2rt \cos(\theta - \varphi)$$

き裂の場合 ($\zeta \rightarrow 0, z \rightarrow 0$), $t dt d\varphi$ 部分に式 (27) で表わされる体積力の対 (逆方向のものも入れて対とする) が働けば、さきに述べたように、点 ($r, \theta, 0$) におよぼす効果は次式で表わされる。

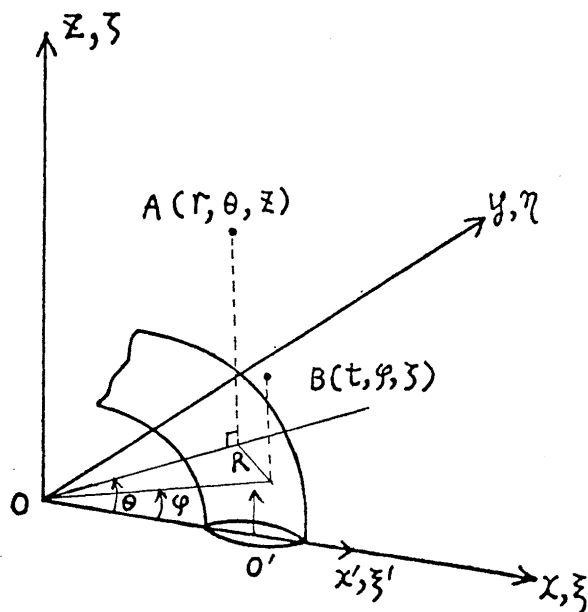


図3 座標のとり方

$$d(d\sigma_z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\rho_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial \xi} \right]_{p=1} \cdot 2\xi \left[t dt \, d\varphi \right] \quad (29)$$

式 (29) に、式 (28) と式 (27) で $f(t')=1$ とおいたもの ($f(t')$ は未定なので 1 とおいたものを基礎式とする) を代入すると

$$d(d\sigma_z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - t'^2}}{R^3} \cdot t dt \, d\varphi \quad (30)$$

式 (30) をまず、 φ に関して ($\varphi=0 \sim 2\pi$) 積分するわけであるが、軸対称問題であるので $\theta=0$ の断面についてだけ境界条件を考えればよいことになり、そのことを考慮すると (記号については図 3 参照)

$$\begin{aligned} d\sigma_z &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2(a+\xi')}{(2a+x+\xi')^2} \cdot \frac{E(k)}{(x'-\xi')^2} \cdot \sqrt{c^2 - \xi'^2} \, d\xi' \\ &= F_1(x', \xi') d\xi' \end{aligned} \quad (31)$$

$$F_1(x', \xi') = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2(a+\xi')}{(2a+x'+\xi')^2} \cdot \frac{E(k)}{(x'-\xi')^2} \sqrt{c^2 - \xi'^2}$$

$$k^2 = 4(a+x')(a+\xi') / (2a+x'+\xi')^2$$

となり、2 次元の場合と同形式で書けることになる。2 次元の場合 $F_1(x', \xi')$ に相当する関数は、

$$F_2(x', \xi') = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - \xi'^2}}{(x'-\xi')^2} \quad (32)$$

となる。 $a \rightarrow \infty$ とすれば、 F_1 は F_2 に一致することは容易に確かめられる。

実際に計算を行なう際、式 (31) は、 ξ' に関しては閉じた形の積分ができないが、式 (32) は閉じた形の積分が可能であるので、環状き裂では、このことを利用し、積分を次のような形におきかえる。

$$\sigma_z^j = \int_{\xi'_{1j}}^{\xi'_{2j}} (F_1 - F_2) d\xi' + \int_{\xi'_{1j}}^{\xi'_{2j}} F_2 d\xi' \quad (33)$$

ここで、 σ_z^j : 分割区間 i の中点におよぼす分割区間 j に分布させた体積力の影響。

$$i=1 \sim M, \quad j=1 \sim M$$

M : 分割区間の数

式 (33) の第 2 項は閉じた形で得られている⁴⁾ ので、第 1 項のみシンプソン則による数値積分を行なえば、少い分割数で精度を上げることができる。

図 2 の 2 c 間を M 分割し、分割した各区間 ($j=1 \sim M$) において、式 (27) で定義した f を f = 一定として連立方程式を立てれば次のようになる。

$$\sum_{j=1 \sim M} f_j \sigma_z^j = -\sigma(x'_i) \quad (34)$$

$\sigma(x'_i)$: $x=x'_i$ (区間 i の中点) における境界条件

式 (34) を解いて f_j を求めれば, f_i, f_M から環状き裂の内側, 外側に相当する応力拡大係数 K_{1i}, K_{10} を求めることができる。

3. 計算結果と考察

応力拡大係数は連立一次方程式の解 f_i, f_M によって次のように表わされる。

$$K_{1i} = f_i \sigma_\infty \sqrt{\pi c} \quad (35)$$

$$K_{10} = f_M \sigma_\infty \sqrt{\pi c} \quad (36)$$

しかし, 有限な分割数で得られた f_i, f_M は誤差を含んでいるため $M \rightarrow \infty$ としたときのこれらの値 f_i, f_0 を求める必要がある。 f_i, f_0 を求めるには, M を漸増し, 結果を外そうによって求める。

外そうの例を図4に示す。図4の結果は, $r_i/r_0=0.05$, $M=10, 20, 40$ についての結果であり, ほぼ直線的に変化するので, 外そうによって精度のよい f_i, f_0 を求めれば, $f_i=1.863$, $f_0=0.6229$ となる。他の場合も同様な手順で, 最終結果を求めた。 r_i/r_0 の種々の値に対する $K_{1i}/\sigma_\infty \sqrt{\pi c}$, $K_{10}/\sigma_\infty \sqrt{\pi c}$ の値を表1に示す。

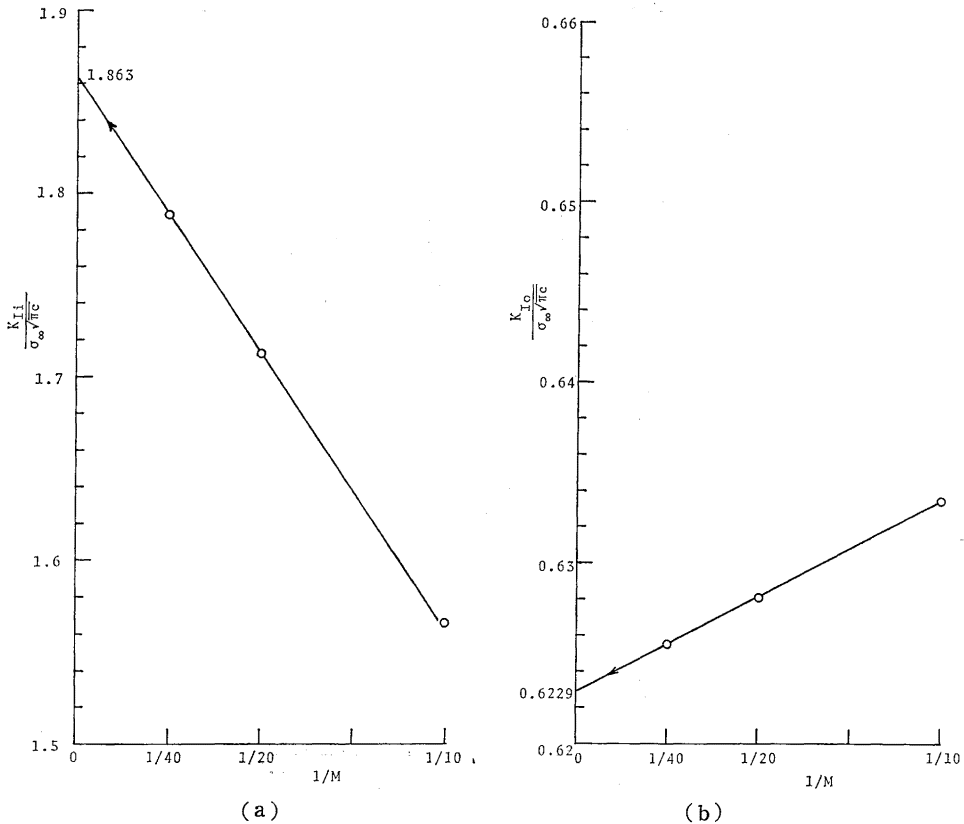


図4 数値結果の外そう

図5は、表1の結果を、 r_i/r_0 を横軸にとってプロットしたものである。 $K_{I0}/\sigma_\infty\sqrt{\pi}$ は、 $r_i/r_0 \rightarrow 0$ のとき無理なく厳密解⁵⁾ $2/\pi$ に一致する。

また、表2は、 $r_i/r_0=0.998$ のときの $K_{I1}/\sigma_\infty\sqrt{\pi c}$ の値と、 $r_i/r_0=0.0476$ ($r_i/c=0.1$) のときの K_{I1} と深い双曲線き裂の応力拡大係数 K_{I1}^* との比を示している。いずれの場合もほぼ極限の場合の

表 1 環状き裂の内側と外側における応力拡大係数

r_i/r_0	$K_{Ii}/\sigma_\infty\sqrt{\pi}$	$K_{Io}/\sigma_\infty\sqrt{\pi}$
0.0	—	(0.637)
0.05	1.863	0.623
0.1	1.331	0.609
0.2	0.955	0.580
0.5	0.569	0.473
0.7	0.410	0.374
0.9	0.227	0.221

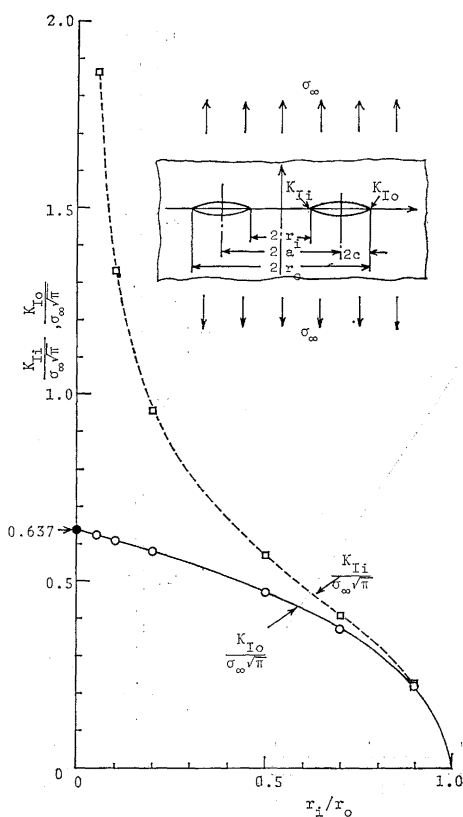


図 5 環状き裂の応力拡大係数 ($r_0=1.0$)

表 2 環状き裂の極限状態における応力拡大係数

r_i/r_0	$K_{Ii}/\sigma_{\infty}\sqrt{\pi c}$	$K_{I0}/\sigma_{\infty}\sqrt{\pi c}$	r_i/r_0	K_{Ii}/K_{I*}
0.998	1.000	1.000	0.0476	0.97

$$K_{I*} = -\frac{1}{2}\sigma_{\text{net}}\sqrt{\pi r_i}$$

σ_{net} : 環状き裂の中心部断面における公称応力

値⁵⁾を示しており、本計算値は両極端で厳密解に一致すると考えられる。

図5にみられるように環状き裂の応力拡大係数は内側の先端の値が常に大きく、環状き裂は先ず円板状き裂になろうとする傾向があることがわかる。

4. 結 言

体積力法による3次元き裂問題の一般解法について述べ、例として一様引張応力場における環状き裂の応力拡大係数を求めた。

き裂の内側先端、外側先端の半径の比をそれぞれ r_i/r_0 とし、応力拡大係数を K_{Ii} , K_{I0} とするとき $r_i/r_0 \rightarrow 1.0$ では K_{Ii} , K_{I0} はともに2次き裂の値に一致する。また、 $r_i/r_0 \rightarrow 0$ のとき K_{I0} は、円板状き裂の値と一致し、 K_{Ii} は中心断面における公称応力を基準にした深い3次元き裂の解に一致する。 K_{Ii} は K_{I0} より常に大きく、環状き裂の伝ばはまず円板状き裂の状態に近づく方向に起るものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Mechanics of Fracture: Vol. 1 (1973), ed. Sih, G.C., Noordhoff.
- 2) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G.: The Stress Analysis of Cracks Handbook, (1973), Del Research Cooperation.
- 3) 石田誠: き裂の弾性解析と応力拡大係数, 破壊力学と材料強度講座 (培風館, 東京, 1976).
- 4) 西谷弘信, 村上教宜: 機械学会誌, 75-642 (1972-7), 1081.
- 5) Paris, P.C. and Sih, G.C.: ASTM STP, 381 (1965), 30.
- 6) 樋口正一, 今井康文: 機械学会論文集, 36-297 (1971-5), 869.
- 7) 西谷弘信, 村上敬宜: 機械学会論文集, 40-329 (1974-1), 31.
- 8) 村上敬宜, 西谷弘信: 機械学会論文集, 41-342 (1975-2), 360.
- 9) 山本善之, 角洋一: 日本造船学会論文集, 133 (1973), 247.
- 10) Smith, F.W. and Alavi, M.J.: Engng. Frac. Mech., 3-3 (1971), 241.
- 11) Shah, R.C. and Kobayashi, A.S.: ASTM STP, 513 (1972), 3.
- 12) 西谷弘信: 機械学会誌, 70-580 (1967), 627.
- 13) Erdogan, F: Trans. ASME, Ser. E, 32-4 (1965-12), 829.
- 14) 西谷弘信: 機械学会講演論文集 (九州), No. 69-2. (1969-2), 37.
- 15) Eshelby, J.D.: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 241 (1957), 376.
- 16) Timoshenko, S. and Goodier, J.N.: Theory of Elasticity, (1951), McGraw-Hill.

(昭和51年5月31日 受理)