

横衝撃荷重をうける半無限長梁の剛硬化塑性解析に 対する一考察

河島, 佑男
九州大学教授, 航空工学教室

大久保, 浩
防衛大学校講師, 航空工学教室

<https://doi.org/10.15017/4743531>

出版情報：應用力學研究所所報. 42, pp.23-35, 1975-01. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



横衝撃荷重をうける半無限長梁の剛硬化塑性解析 に対する一考察†

河 島 佑 男*
大 久 保 浩**

概 要

高速度横衝撃荷重をうける長い梁の塑性変形を調べるために、前報¹⁾において、衝撃速度が大である場合には弾性変形は塑性変形に比し微小であるのでこれを無視して梁を剛硬化塑性材と仮定し、さらに衝撃端から十分離れた範囲での歪履歴を無視して、Conroy²⁾の方法にならって数値解を得た。

本報告は同様な衝撃条件の場合に対し、梁を弾硬化塑性材として弾性領域の曲げ剛性を大きくとり、履歴曲線を考慮して解析を行なって、上に述べた解析結果の妥当性を検討したものである。

その結果、衝撃速度が大きい場合には比較的簡単な解析法である剛硬化塑性解析によって解析しても差支えないことがわかった。

1. 結 論

高速度横衝撃荷重をうける長い梁の塑性変形挙動を解析的に取扱う場合は、梁の歪履歴を考慮して解析することが必要である。Bohnenblust³⁾らは低炭素鋼および銅の梁の中央に一定速度 (Constant Velocity) の衝撃荷重を与え、梁が塑性変形をするような場合の解析として、低炭素鋼および銅をそれぞれ弾完全塑性材および弾硬化塑性材と仮定して、それぞれの歪履歴曲線にもとづいて数値解を得ている。この場合梁が低炭素鋼のように弾完全塑性材と見なし得る場合には比較的容易に数値解を得ることができるが、銅のように梁が弾硬化塑性材である場合には、衝撃速度に応じた多数の歪履歴曲線をすべて考慮する必要があるので、数値解を得ることは容易ではない。特に衝撃速度が大で、梁の形状および力学的性質によって定まる降伏曲げモーメント Me が比較的小であるような場合には、この歪履歴曲線は非常に多くの負荷 (loading)、除荷 (unloading) および再負荷 (reloading) を繰り返すことになるので数値解を得ることはさらに困難になる。これを解決するために、Conroy²⁾は衝撃速度が大きい場合には、弾性変形は塑性変形に較べて微小であるとしてこれを無視し、梁を剛完全塑性材および剛硬化塑性材と仮定して解析を行ない、梁を弾完全塑性材と仮定して衝撃速度を大きくした場合の結果は剛完

† 第14回構造強度に関する講演会 (昭和47年7月、福岡市) において講演

* 九州大学教授, 航空工学教室

** 防衛大学校講師, 航空工学教室

全塑性材と仮定した場合の結果に近づくことを数値計算によって示している。しかし、梁を剛硬化塑性材と仮定した場合については、歪履歴曲線上ですべての連続条件を満たす解を得ることは困難であるとして解析結果を示していない。

そこで、前報¹⁾において、衝撃速度が大で、衝撃開始後比較的短い時間の過渡的な塑性変形挙動を調べる目的から、この Conroy の方法にならって衝撃端 $\eta=0$ ($\eta=x^2/4t$) から梁の力学的性質および形状と衝撃速度 V_0 によってきまる η の特定な値 η_2 までの範囲だけの歪履歴曲線を考慮し、 $\eta=\eta_2$ から $\eta=\infty$ までの衝撃荷重による歪履歴応答は無視できると仮定して数値解を得ることを試みた。

この仮定と解析法は、高速衝撃荷重を与えた場合の梁の挙動を簡便に求める方法として有用であると考えられるが、弾性領域を剛体と見なしていることおよび $\eta=\eta_2$ から $\eta=\infty$ までの歪履歴曲線を無視していることについての検討が必要である。

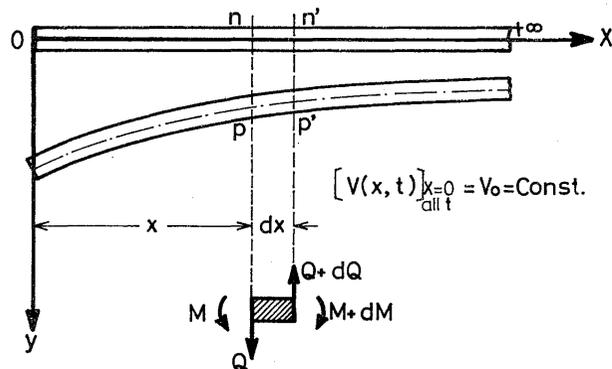
そこで、これらの仮定の妥当性を検討するために、衝撃速度を一定として、弾性領域における曲げ剛性 EI を仮想的に大きくとり、すべての歪履歴曲線を考慮した弾硬化塑性解析によって解の性質を調べ、剛硬化塑性解析によって得られた数値解との比較を行なった。

本報告は上に述べた仮定にもとづく剛硬化塑性解析による数値計算結果の妥当性を検討するために、一定衝撃速度 V_0 が半無限長の梁の自由端に与えられた場合について、衝撃開始後ある時間経過したときのたわみ曲線を弾硬化塑性解析によって求め、曲げ剛性 EI を仮想的に大きくとった場合のたわみ曲線と剛硬化塑性解析によって得られた結果とを比較し考察したものである。

その結果、 EI を仮想的に大きくとり、すべての領域における歪履歴を考慮した弾硬化塑性解析によるたわみ曲線は、上に述べた仮定にもとづく剛硬化塑性解析による結果に近づくことがわかった。したがって、衝撃速度が大きくて、降伏曲げモーメント Me が比較的小さな材料からなる梁の衝撃塑性曲げ変形を解析する場合には、弾硬化塑性解析に較べて比較的簡単な解析法である剛硬化塑性解析を用いて解析して差支えないものと考えられる。

2. 基礎方程式²⁾

梁の横方向の運動方程式は回転慣性および剪断力による変形の影響を無視し、第 1 図に示したような



第 1 図 変形した半無限長梁

座標および符号のとりきめに従えば力のつりあい条件から

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = 0 \quad (2)$$

となる。この方程式において、 x 、 y および t は、それぞれ、梁に沿っての距離、たわみおよび時間であり、 ρ 、 A 、 M および Q はそれぞれ、梁の密度、断面積、曲げモーメントおよび剪断力である。

いま、曲げモーメント M は曲率 $K (= \partial^2 y / \partial x^2)$ のみの関数であると仮定する。弾性曲げにおける曲げモーメントと曲率の関係は

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

となる。ただし、 E はヤング率、 I は梁の断面二次モーメントである。

基礎方程式 (1) および (2) を解くために、 y/t は x^2/t のみの関数であるという Boussinesq によって得られた結果を用いて、つぎの変数 η を導入する。

$$\eta = \frac{1}{4a^2} \frac{x^2}{t} \quad (4)$$

ここで

$$a^2 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

である。したがって、梁のたわみ y は

$$y = tf(\eta) \quad (5)$$

のように表わされる。この新しい変数 η と関数 f を用いて変数変換すれば

$$K = \frac{1}{2a^2} (f' + 2\eta f'') \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\eta^2}{t} f''(\eta) \quad (7)$$

$$Q = \frac{1}{a\sqrt{t}} \sqrt{\eta} \frac{dM}{d\eta} \quad (8)$$

となる。ここで、 f' および f'' はそれぞれ η についての微分を表わす。

ここで問題を η のみの関数として取り扱うために、剪断力 Q に関するつぎの変数 S を導入する。

$$S = \frac{2a^3}{EI} \sqrt{t} Q = \frac{2a^3}{EI} \sqrt{\eta} \frac{dM}{d\eta} \quad (9)$$

式 (4) から式 (9) を運動方程式 (1) および (2) に代入して変形すると

$$S' + \sqrt{\eta} (2a^2 K - f') = 0 \quad (10)$$

となる。さらに、微分して整理すれば

$$S'' + EIS \frac{dK}{dM} = 0 \quad (11)$$

を得る。

このように、横方向の運動方程式 (1) および (2) は、 $\eta=(1/4a^2)(x^2/t)$, $y=tf(\eta)$ および $S=(2a^3/EI)\sqrt{t}Q$ の変換によって、式 (11) のような常微分方程式になる。したがって、梁の曲げモーメント・曲率曲線から dK/dM の値を求めて、式 (11) の解 $S(\eta)$ を定め、 $\eta=\infty$ における境界条件を考慮すれば、曲げモーメント $M(\eta)$ 、剪断力 $Q(\eta)$ 、曲率 $K(\eta)$ およびたわみ $y(\eta)$ は η のみの関数としてつぎのように求めることができる。

$$M(\eta)=-\frac{EI}{2a^2}\int_{\eta}^{\infty}\frac{S(\eta)}{\sqrt{\eta}}d\eta \quad (12)$$

$$Q(\eta)=\frac{EI}{2a^3}\frac{1}{\sqrt{t}}S(\eta) \quad (13)$$

$$K(\eta)=\frac{1}{2a^2}\int_{\eta}^{\infty}\frac{S'(\eta)}{\sqrt{\eta}}d\eta \quad (14)$$

$$y(\eta)=-\frac{t}{2}\int_{\eta}^{\infty}\frac{S'(\eta)}{\sqrt{\eta}}d\eta+\frac{t}{2}\eta\int_{\eta}^{\infty}\frac{S'(\eta)}{\eta^{\frac{3}{2}}}d\eta \quad (15)$$

式 (15) から、衝撃点 $x=0$ が一定の衝撃速度 V_0 の運動状態におかれた場合を考えると、衝撃点の速度は

$$V_0=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{S'(\eta)}{\sqrt{\eta}}d\eta \quad (16)$$

のように表わすことができる。

2. 1. 弾性変形の場合

衝撃速度 V_0 があまり大きくなくて、変形が弾性領域内にある場合は曲げモーメントと曲率の関係式 (3) から $dK/dM=1/EI$ となるので式 (11) は簡単になって

$$S''(\eta)+S(\eta)=0 \quad (17)$$

となる。方程式 (17) の解は

$$S(\eta)=-B\sin(\eta-\eta_1) \quad (18)$$

のようにおくことができる。ここで、 B および η_1 は積分定数であり、つぎの二つの衝撃端条件から定めることができる。いま、半無限長の梁の自由端 ($x=0$) が一定衝撃速度 V_0 の運動状態におかれた場合を考えると

- (a) 衝撃端の速度が V_0
- (b) 衝撃端の曲げモーメントが 0

からつぎの条件式を得る。

$$V(0,t)=\frac{B}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\eta-\eta_1)}{\sqrt{\eta}}d\eta=V_0 \quad (19)$$

$$M(0,t)=\frac{EI}{2a^2}B\int_0^{\infty}\frac{\sin(\eta-\eta_1)}{\sqrt{\eta}}d\eta=0 \quad (20)$$

式 (19) および式 (20) を連立に解いて、 B および η_1 が定まり式 (18) は

$$S(\eta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} V_0 \sin\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (21)$$

となる。この式 (21) の $S(\eta)$ を式 (12)~(15) に代入して、半無限長の梁の自由端に一定衝撃速度 V_0 が作用したときの弾性挙動を知ることができる。

η_1 は曲げモーメントが極値をとる点を表わすので、衝撃速度 V_0 がさらに大きくなり、最初に塑性領域があらわれるのは、 $M(\eta_1) = M_e$ (降伏曲げモーメント) となるときである。したがって、塑性変形を生じない弾性限の衝撃速度 V_e は

$$M(\eta_1) = \frac{EI}{2a^2} B \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\sin(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta = M_e \quad (22)$$

という条件式から

$$V_e = \sqrt{\pi} \cdot \frac{a^2}{EI} \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\sin(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta \quad (23)$$

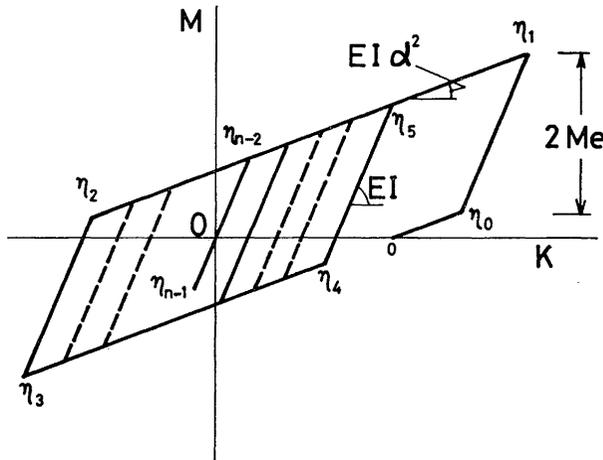
のように求められる。

2. 2. 弾硬化塑性変形の場合

いま、梁の自由端 $x=0$ が一定の衝撃速度 V_0 の運動状態におかれ、この衝撃速度 V_0 が弾性限衝撃速度 V_e に較べて充分大きい場合 ($V_0 \gg V_e$) を考える。

実験によって得られた曲げモーメントと曲率の関係を近似的に第 2 図のように理想化し、負荷 (loading)、除荷 (unloading) および再負荷 (reloading) の場合の曲げモーメントと曲率の関係は第 2 図に示したような履歴曲線に従うと仮定すれば、この曲線の勾配は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dK} &= EI && \text{(弾性負荷および塑性除荷領域)} \\ \frac{dM}{dK} &= EI\alpha^2 && \text{(塑性負荷領域)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$



第 2 図 曲げモーメントー曲率曲線の履歴

となる。ただし α は $0 \leq \alpha < 1$ であり、塑性領域の曲げ剛性あるいは歪硬化の程度をあらわす定数である。ここで、塑性負荷後の除荷領域では弾性的に変化し、そのときの曲げモーメントの変化は $2M_e$ であると仮定する。

したがって、変換された基礎方程式 (11) は

$$\left. \begin{aligned} S''(\eta) + S(\eta) &= 0 && \text{(弾性負荷および塑性除荷領域)} \\ S''(\eta) + \frac{1}{\alpha^2} S(\eta) &= 0 && \text{(塑性負荷領域)} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

となり、それぞれの領域における式 (25) の解を求めることによって、弾性変形をする場合と同様に式 (12)~(15) を用いて、梁の弾硬化塑性挙動を知ることができる。

一般に、塑性変形が生じる場合には、第 2 図に示したように、弾性領域、塑性負荷領域、塑性除荷領域 (挙動は弾性的) が現われることになり、現われる領域の数は衝撃速度 V_0 の大きさと、降伏曲げモーメント M_e の値に関係する。第 2 図に示した場合より衝撃速度がさらに大きくなると、第 2 図の $\eta = \eta_{n-1}$ 点が負の降伏曲げモーメントに達し、さらに塑性負荷および弾性負荷の二つの領域が現われる。したがって、さらに領域の数が増加する限界の衝撃速度は

$$M(\eta_{n-1}) = \frac{EI}{2a^2} \int_{\eta_{n-1}}^{\infty} \frac{S(\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta = -M_e \quad (26)$$

となるような衝撃速度から定められる。

いま、衝撃速度 V_0 によって、第 2 図に示したように、弾性負荷および塑性除荷等の領域が現われ、その数が n 個である場合を考える。その n 個の領域内で式 (25) の解 $S(\eta)$ はつぎのようにおくことができる。

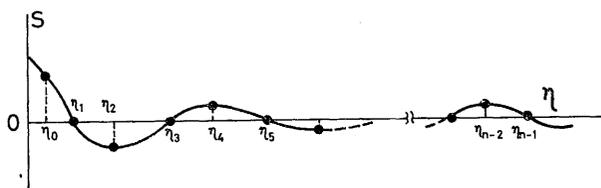
$$\left. \begin{aligned} S_0 &= c_0 B_0 \sin \frac{1}{\alpha} (\eta - \eta_0) && (0 \leq \eta \leq \eta_0) \\ S_1 &= c_1 B_1 \sin (\eta - \eta_1) && (\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1) \\ S_2 &= c_2 B_2 \sin \frac{1}{\alpha} (\eta - \eta_1) && (\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2) \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ S_i &= c_i B_i \sin (\eta - \eta_i) && (\eta_{i-1} \leq \eta \leq \eta_i) \\ S_{i+1} &= c_{i+1} B_{i+1} \sin \frac{1}{\alpha} (\eta - \eta_i) && (\eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1}) \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ S_{n-1} &= c_{n-1} B_{n-1} \sin (\eta - \eta_{n-1}) && (\eta_{n-2} \leq \eta) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ただし、 $c_0 = -1$, $c_i = c_{i+1} = -(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}$, $c_{n-1} = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ であり、 j を 1 から $(n/2-1)$ まで変化する整数であるとすれば

$$i = 2j - 1 \quad (1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1)$$

である。

この $S(\eta)$ の分布を図式的に描いたのが第 3 図である。 $S(\eta)$ は剪断力に関する変数として定義されているので $S(\eta) = 0$ となる $\eta_1, \eta_3, \dots, \eta_{n-3}, \eta_{n-1}$ 点は第 2 図に示した曲げモーメントと曲率の



第 3 図 関数 $S(\eta)$ の分布

履歴曲線上で曲げモーメントの値が極値をとる点に対応している。

式 (27) において, $B_0, B_1, \dots, B_{n-2}, B_{n-1}$ および $\eta_c, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}, \eta_{n-1}$ は積分定数である。この $(2n+1)$ 個の積分定数は

- (a) 自由端 ($x=0$) の曲げモーメントについての条件式 $M(0)=0$
- (b) 塑性除荷領域の曲げモーメント変化についての条件式, 例えば $M(\eta_1)-M(\eta_0)=2M_e$,
 $M(\eta_3)-M(\eta_2)=2M_e$ 等
- (c) 自由端 ($x=0$) での衝撃速度についての条件式 $V(0)=V_0$

などの $(n/2+1)$ 個の条件式と

- (d) $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-2}$ 点における $(n-1)$ 個の $S'(n)$ の連続条件式
- (e) $\eta_0, \eta_2, \eta_4, \dots, \eta_{n-4}, \eta_{n-2}$ 点における $n/2$ 個の $S(\eta)$ の連続条件式
- (f) $\eta=\eta_{n-2}$ における曲げモーメントの条件式 $M(\eta_{n-2})=(-1)^{\frac{n}{2}} M_e$

等の $(2n+1)$ 個の条件式からすべて定めることができる。これを式に書き表わせれば, 条件式 (a), (b) および (c) から

$$\left. \begin{aligned}
 F_0 &= c_0 C_0 \int_0^{\eta_0} \frac{\sin \frac{1}{\alpha} (\eta - \eta_c)}{\sqrt{\eta}} d\eta + \sum_i c_i C_{i+1} \left\{ \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \frac{\sin (\eta - \eta_i)}{\sqrt{\eta}} d\eta + C_{i+1} \right. \\
 &\quad \left. \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \frac{\sin \frac{1}{\alpha} (\eta - \eta_i)}{\sqrt{\eta}} d\eta \right\} + c_{n-1} C_{n-1} \int_{\eta_{n-2}}^{\infty} \frac{\sin (\eta - \eta_{n-1})}{\sqrt{\eta}} d\eta = 0 \\
 F_1 &= C_1 \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{\sin (\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta - 2 \int_{\eta_{n-2}}^{\infty} \frac{\sin (\eta - \eta_{n-1})}{\sqrt{\eta}} d\eta = 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 F_j &= C_j \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} \frac{\sin (\eta - \eta_j)}{\sqrt{\eta}} d\eta - 2 \int_{\eta_{n-2}}^{\infty} \frac{\sin (\eta - \eta_{n-1})}{\sqrt{\eta}} d\eta = 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 F_m &= C_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \frac{\sin (\eta - \eta_m)}{\sqrt{\eta}} d\eta - 2 \int_{\eta_{n-2}}^{\infty} \frac{\sin (\eta - \eta_{n-1})}{\sqrt{\eta}} d\eta = 0 \\
 F_{m+1} &= \frac{B_{n-1}}{2} \left\{ C_0 \int_0^{\eta_0} \frac{\cos \frac{1}{\alpha} (\eta - \eta_c)}{\sqrt{\eta}} d\eta + \sum_i c_i C_i \left(\int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \frac{\cos (\eta - \eta_i)}{\sqrt{\eta}} d\eta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \frac{\cos \frac{1}{\alpha} (\eta - \eta_i)}{\sqrt{\eta}} d\eta \right) + c_{n-1} C_{n-1} \int_{\eta_{n-2}}^{\infty} \frac{\cos (\eta - \eta_{n-1})}{\sqrt{\eta}} d\eta \right\} + V_0 = 0
 \end{aligned} \right\} (28)$$

となる。ただし、 $i=2j-1$ ($1 \leq j \leq m$) であり、 $m=(n/2-1)$ である。

また、条件式 (d), (e) および (f) から、つぎのそれぞれの式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\eta_0, \eta_0) \\ \dots\dots\dots \\ \eta_k &= f_1(\eta_{k-2}, \eta_{k-1}) \\ \dots\dots\dots \\ \eta_{n-1} &= f_1(\eta_{n-3}, \eta_{n-2}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここで、整数 k は $k=2j+1$ ($1 \leq j \leq m$) であり関数 $f_1(x, y)$ は

$$f_1(x, y) = \tan^{-1} \frac{\tan y (1 + \tan \frac{y}{\alpha} \cdot \tan \frac{x}{\alpha}) - \alpha (\tan \frac{y}{\alpha} - \tan \frac{x}{\alpha})}{\alpha \tan y \cdot (\tan \frac{y}{\alpha} - \tan \frac{x}{\alpha}) + 1 + \tan \frac{y}{\alpha} \cdot \tan \frac{x}{\alpha}} \quad (30)$$

である。さらに定数 B, C 等の関係式は

$$\left. \begin{aligned} B_{n-1} &= \frac{2a^2}{EI} \frac{M_e}{\int_{\eta_{n-2}}^{\infty} \frac{\sin(\eta - \eta_{n-1})}{\sqrt{\eta}} d\eta} \\ B_{n-2} &= C_{n-2} \cdot B_{n-1} \\ B_{n-3} &= \frac{B_{n-2}}{\alpha} \\ \dots\dots\dots \\ B_2 &= C_2 B_{n-1} \\ B_1 &= \frac{B_2}{\alpha} \\ B_0 &= C_0 B_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{n-1} &= 1 \\ C_{n-2} &= f_2(\eta_{n-3}, \eta_{n-2}, \eta_{n-1}) C_{n-1} \\ C_{n-3} &= \frac{C_{n-2}}{\alpha} \\ \dots\dots\dots \\ C_2 &= f_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) C_3 \\ C_1 &= \frac{C_2}{\alpha} \\ C_0 &= f_2(\eta_0, \eta_0, \eta_1) C_1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。ここで、関数 $f_2(x, y, z)$ は

$$f_2(x, y, z) = -\frac{\sin(y-z)}{\sin \frac{1}{\alpha}(y-x)} \quad (33)$$

である。

このように、式 (25) の解 $S(\eta)$ を定めるための条件式は式 (28) から式 (32) のようになる。これ

らの式において、 α , a , E , I および M_e は材料の力学的性質から定まる定数であり、 V_0 は衝撃端の速度で、与えられたものである。また、履歴曲線上に現われる領域の数 n も、材料の力学的性質および衝撃速度 V_0 によって決まる整数である。したがって、式 (27) において、求めるべき積分定数は $B_0, B_1, \dots, B_{n-2}, B_{n-1}$ (いずれも > 0) と $\eta_c, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}, \eta_{n-1}$ ($\eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{n-2} < \eta_{n-1}$) であり、これらの値が求められれば式 (12) ~ 式 (15) を用いて梁の弾硬化塑性挙動を知ることができる。

2. 3. 数 値 計 算

前項で述べた式 (28) ~ 式 (33) は多元連立の超越方程式であって、解析的に解くことはできない。そこで、多変数ニュートン法によってつぎのように数値的に解くことができる。式 (28) は一般的に

$$F_i(\eta_i) = 0 \quad (34)$$

のようにおくことができる。ただし、 $1 \leq i \leq l$ で l は条件式の数を表わす。いま、 $\eta_i^{(1)}$ を式 (34) の第 1 次近似値とし真の解を η_i とすれば、近似値との差 h_i は

$$h_i = \eta_i - \eta_i^{(1)}$$

となる。この関係を式 (34) に代入すれば

$$F_i(\eta_i^{(1)} + h_i) = 0 \quad (35)$$

となる。式 (35) を Taylor 展開して、2 次以上の微小項を無視すれば

$$F_i(\eta_i^{(1)}) + \sum_{k=1}^l \frac{\partial F_i(\eta_i^{(1)})}{\partial \eta_k} h_k = 0 \quad (36)$$

を得る。したがって、第 1 次の近似値に対する修正量 h_i はつぎの式を解いて得られる。

$$\mathbf{DH} = \mathbf{G} \quad (37)$$

ここで、マトリクス \mathbf{D} , \mathbf{H} および \mathbf{G} の要素はそれぞれつぎのようになる。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} & \dots & d_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{i1} & \dots & d_{ik} & \dots & d_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{l1} & \dots & d_{lk} & \dots & d_{ll} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_i \\ \vdots \\ h_l \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_l \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$d_{ik} = \frac{\partial F_i(\eta_i^{(1)})}{\partial \eta_k}, \quad g_i = -F_i(\eta_i^{(1)}) \quad (39)$$

式 (37) から求められた h_i によって第 1 次近似値を修正して第 2 次近似値を定め、式 (34) を満足するまで近似計算を繰り返す。式 (39) の要素 d_{ik} は関数 F_i の偏導関数である。式 (28) のような超越方程式の偏導関数を解析的に求めることはできないのでつぎのように近似的に差分におきかえることができる。

$$d_{ik} = \frac{\partial F_i(\eta_i^{(1)})}{\partial \eta_k} \approx \frac{F_i(\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_k^{(1)} + \Delta\eta_k^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}) - F_i(\eta_i^{(1)})}{\Delta\eta_k^{(1)}} \quad (40)$$

ここで、 $\Delta\eta_k^{(1)}$ の値はこの $\Delta\eta_k^{(1)}$ の値の範囲で関数 F_i の値がほぼ直線と見なし得るように十分小さくとる必要がある。

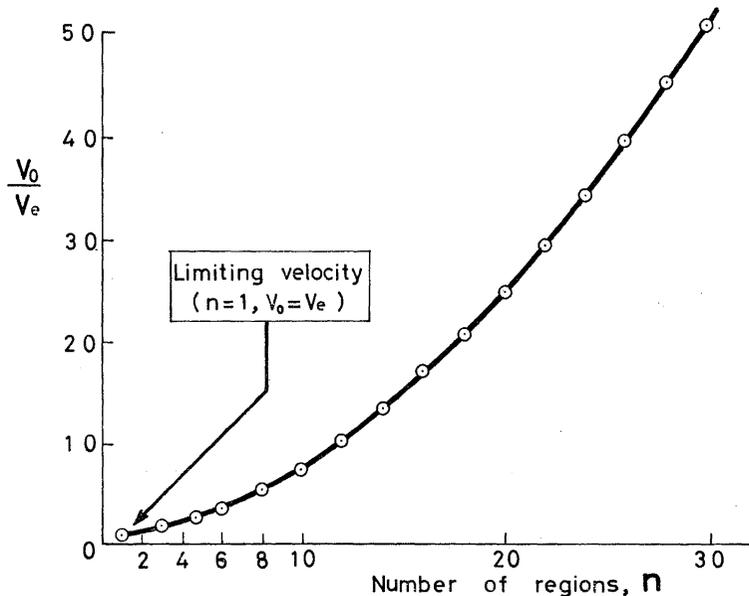
式 (28) において、未知定数として選ばれるのは、 $\eta_c, \eta_0, \eta_2, \eta_4, \dots, \eta_{n-4}, \eta_{n-2}$ である。これらの第 1 次近似値と式 (29), (30) から η に関するすべての近似値を定め、さらに、式 (31), (32),

(33) から B および C に関する第 1 次近似値を定めて, 式 (28) に代入して関数 F_i の値を求める. すべての F_i について $F_i=0$ が成立すれば, そのとき選んだ未知定数 $\eta_c, \eta_0, \eta_2, \dots, \eta_{n-4}, \eta_{n-2}$ は真の解である. また, もし $F_i \neq 0$ ならば式 (37)~(39) によって, 変数 η_i の修正量 h_i を定め第 2 次近似値とし, F_i の値を計算して収束するまでこの手順を繰り返す.

3. 計算結果

前報¹⁾ の高速横衝撃荷重に対する剛硬化塑性解析結果の妥当性を調べるために, 前節で述べたような弾硬化塑性解析によってつぎのような項目について計算を行ない検討を試みた.

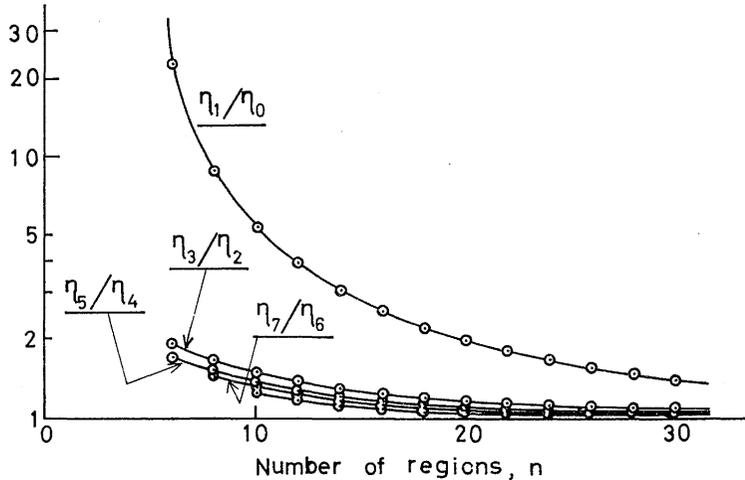
- (a) 降伏曲げモーメント M_e および曲げ剛性 EI を一定とし, 衝撃速度 V_0 を大きくした場合の履歴曲線上の領域の数 n の変化.
 - (b) M_e および V_0 を一定とし, EI を仮想的に大きくした場合の履歴曲線上の領域の数 n の変化.
 - (c) 曲げ剛性 EI を仮想的に大きくした場合のたわみ曲線.
- (a), (b) および (c) 項とも, 梁を弾硬化塑性材と仮定し, 自由端 ($x=0$) に一定速度 (Constant Velocity) V_0 の衝撃荷重が作用したときの挙動を第 2 節で述べた方法によって解析したものである. (a) に述べた V_0 と領域の数 n の関係を数値計算により求めて第 4 図に示した. 縦軸には弾性限衝撃速度



第 4 図 衝撃速度と現われる領域の数

V_e と V_0 の比をとり, 横軸には領域の数 n をとった. これによると, $V_0/V_e=50$ となるような高速衝撃の場合には領域の数 n は 30 程度になる. したがって, 梁の挙動を知るためには 30~60 元連立の超越方程式を解く必要があることがわかる. また, このような高速衝撃速度 V_0 が与えられた場合に履歴曲線上の境界点 η_i がどのように変化するかを計算により求めて第 5 図に示した. 縦軸には相隣り合

う η_i の比 η_{n-2}/η_{n-3} 等の値をとり、横軸には領域の数 n をとった。これによると、衝撃速度が大きくなって、領域の数 n が増加すると、 η_1/η_0 を除いた $\eta_3/\eta_2, \eta_5/\eta_4, \dots$ 等の比は徐々に 1 に近づき、さらに、それぞれの値の差が小さくなるのがわかる。これは $\eta > \eta_2$ において、 $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{n-1}$ の値がそれぞれ近似的に等しい値をとると見なして差支えないことを示している。



第 5 図 η_i の値と現われる領域の数

つぎに、(b) に述べたような、 M_e および V_0 を一定とし、 EI を仮想的に大きくとった場合には弾性限衝撃速度 V_e が小さくなるので、(a) に述べた場合と同様に、 EI を仮想的に大きくとることによって領域の数 n が増加する。したがって、第 4 図および第 5 図は曲げ剛性 EI を仮想的に大きくとった場合の結果と同等であると見ることができる。

以上二つの結果をさらに確かめるために、降伏曲げモーメント M_e を一定として、三種類の衝撃速度 V_0 (30, 53, 90 m/s) の場合のある時間 $t=t_0$ のたわみ曲線を曲げ剛性 EI を仮想的に変えて計算し、第 6 図に示した。第 6 図の中で、破線は前報¹⁾ の剛硬化塑性解析による結果であり、実線は曲げ剛性 EI を仮想的に変えて弾硬化塑性解析によって求めたたわみ曲線である。これらの結果から EI を大きくとれば、剛硬化塑性解析による結果に近づいていることがわかる。

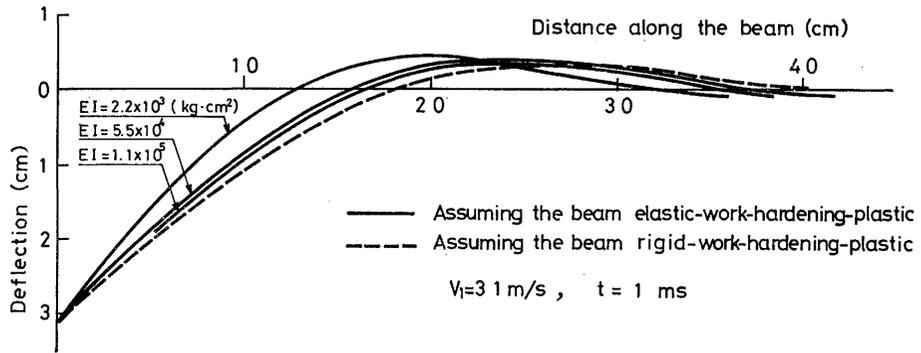
これらの数値計算に用いた諸定数の値はつぎの通りである。

$$E=6.650 \times 10^9 [\text{kg}/\text{m}^2], I=8.333 \times 10^{-10} [\text{m}^4], A=1.000 \times 10^{-4} [\text{m}^2]$$

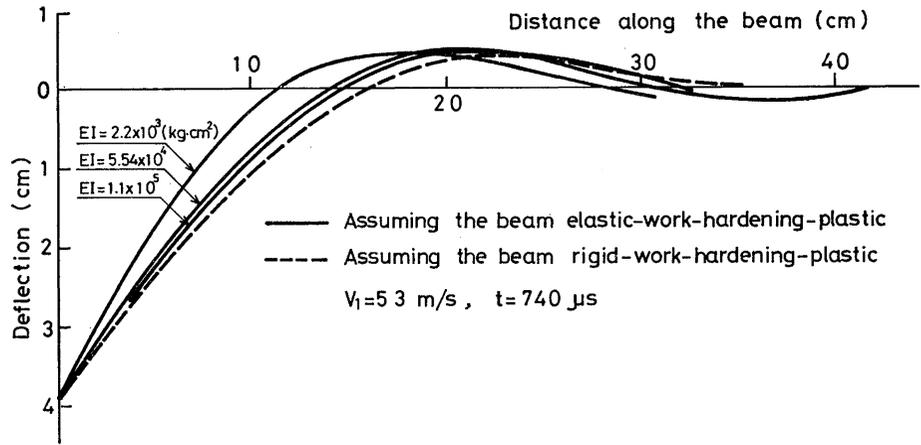
$$\rho=2.754 \times 10^2 [\text{kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4], M_e=9.000 \times 10^{-1} [\text{kg} \cdot \text{m}], \alpha=0.7$$

4. 考 察

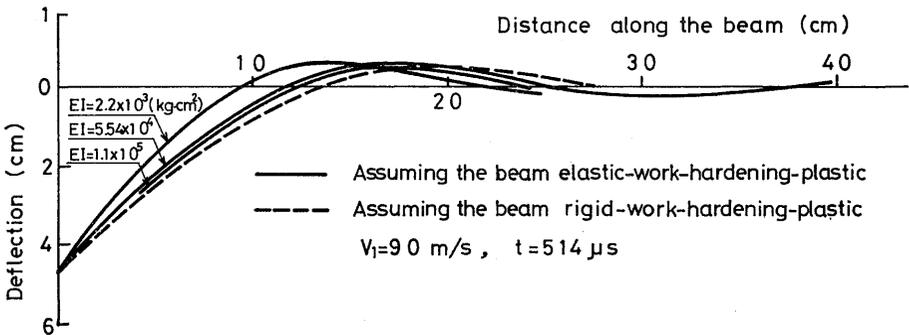
梁の横衝撃荷重による塑性変形を取扱う場合に弾硬化塑性解析を用いると、衝撃速度 V_0 が大となるにつれて、履歴曲線上に現われる弾性負荷、塑性負荷、塑性除荷 (挙動は弾性的) 等のそれぞれの領域の数 n は第 4 図に示したように次第に増加する。また式 (23) からわかるように弾性限衝撃速度 V_e



(a) 衝撃速度 31 m/s, 衝撃持続時間 1 ms



(b) 衝撃速度 53 m/s, 衝撃持続時間 0.74 ms



(c) 衝撃速度 90 m/s, 衝撃持続時間 0.514 ms

第 6 図 梁 の た わ み 曲 線

はつぎのように表わすことができるので

$$V_e = \sqrt{\frac{\pi}{\rho A}} \cdot \frac{M_e}{\sqrt{EI}} \frac{1}{\int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\sin(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta} \quad (41)$$

降伏曲げモーメント M_e , 密度 ρ , 断面積 A 等が一定ならば, 曲げ剛性 EI を仮想的に大きくすると, 弾性限衝撃速度 V_0 の値は小さくなる. したがって, 第4図, 第5図に示したように衝撃速度 V_0 を一定にとっても, EI を大きくとった場合には, V_0 を大きくとった場合と同様に履歴曲線上の領域の数 n は増加することになるので, EI を大きくとること, V_0 を大きくすることは領域の数 n が増加するという点に関して同じ効果をもつことになる.

このように, EI を大きくすると, 第5図に示したように, $\eta \geq \eta_2$ において, 各領域の境界点を示す定数 $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{n-1}$ の値は互いに非常に近い値をとり 近似的に等しいと見なして差支えないことがわかる. これをある時間 $t=t_0$ について考えれば, 梁の長さ x に沿って $x \geq x_2 (=2a\sqrt{t_0\eta_2})$ では x がわずかに変化するだけで曲げモーメントと曲率の履歴が繰り返されていることを示す. そしてこの履歴曲線上での曲げモーメントと曲率の履歴は $x \rightarrow \infty$ で 0 となる.

したがって, EI を仮想的に大きくとった極限として, 梁を剛硬化塑性材と仮定し, $\eta \geq \eta_2$ における履歴を無視して, $M(\eta) = M_e (\eta \geq \eta_2)$ とした前報の仮定は近似的に妥当なものと考えられる.

さらに第6図に示したように, 降伏曲げモーメント M_e を一定として, 三種類の衝撃速度 V_0 (30, 53, 90 m/s) を与えた場合のたわみ曲線は, EI を仮想的に大きくとるに従って前報の方法によって得られた剛硬化塑性解析結果 (破線) に近づくことがわかった.

以上のことから, アルミニウムのような硬化特性をもつ梁が高速度横衝撃荷重をうけて, 塑性変形をするとき, 梁の過渡的な塑性挙動を調べる方法として, 比較的簡単な数値解析によって結果を求めることができる剛硬化塑性解析を用いることは実用上差支えないと考えられる. これは, 梁に高速度横衝撃荷重が作用する場合は塑性変形が弾性変形に比較して充分大きいこと, また, 衝撃持続時間が比較的短い過渡的な変形を考える場合, 衝撃荷重による塑性変形は衝撃点に近い部分にのみ生じていると考えられることなどからも妥当であると考えられる. 剛硬化塑性解析では近似的に $\eta \geq \eta_2$ における衝撃荷重の影響を無視したので, η_2 点での曲率 K の不連続を許すことになる. 塑性関節理論において, 塑性関節では曲率が不連続となるが, この場合の η_2 点も一種の塑性関節と見なすことができる.

参 考 文 献

- 1) 河島佑男, 大久保浩, 横衝撃荷重をうける半無限長梁の剛硬化塑性解析による計算, 九州大学工学集報, 第43巻, 第3号, 昭和45年.
- 2) Conroy, M.F. Plastic-Rigid Analysis of Long Beams Under Transverse Impact Loading, J. Appl. Mech., 1952.
- 3) Duwez, P.E., Clark, D.S., and Bohnenblust, H.F. The Behavior of Long Beams Under Impact Loading, J. Appl. Mech., 1950.

(昭和49年10月28日 受理)