

「メタクリル樹脂の疲労破壊」の資料解析

樋口, 正一
九州大学応用力学研究所 : 教授

<https://doi.org/10.15017/4743519>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 40, pp.401-408, 1973-11. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



「メタクリル樹脂の疲労破壊」の資料解析†

樋口 正一*

概 要

学会誌に発表された「メタクリル樹脂の疲労破壊」¹⁾に、繰返し曲げを受ける梁の亀裂成長速度測定結果があるが、解析がない。そこに示されている速度の増加と減少の二つの過程は測定条件によって現われるもので材料自体の性質ではないと思われる。種々の実験的な疲労の研究は測定条件の影響を分離して材料定数と見られるものを抽出することに意味があるとする筆者は、発表された資料の解析をおこなって、亀裂底の実効的な半径を求め、そこに働く応力の6乗式で亀裂伝播速度が表わされることを示し、測定結果を説明した。

その計算方法は梁を三つの部分よりなるとし、亀裂を含む短い梁の両端の条件を両側の梁のそれぞれの端面条件と一致させるという材料力学的な計算である。終りに一般におこなわれる stress intensity factor による表現の根拠をふりかえり、ここにおこなわれた計算の意味を考察した。

1. 序

「メタクリル樹脂の疲労破壊」¹⁾に疲れ亀裂の成長速度の測定結果が報告されているが、応力の状態も、その変化の状態も単純でない荷重条件が用いられているために充分な解析がおこなわれていない。ここに報告するのは簡単な材料力学的な計算による解析の試みである。

2. 公称曲げ応力

上記報告の試験片形状は図1-(a)に示すものであるが、亀裂が成長しつつある状態を図1-(b)のような形の梁で表わされるものとする。すなわち亀裂のある断面を中心軸に対称な形の微小長さ λ 、厚み $2h-2n-c$ の梁で置きかえ、梁を三つの部分に分けて考える。梁の左端は固定、右端は曲げモーメントなしで所定の撓み ($a\sin\omega t$) を生ずるような荷重を受ける、 λ 部分の両側ではそれぞれ両隣の部分と撓みと傾きが一致する、という条件とする。

$\lambda/L \ll 1$ を考えに入れて、 λ 部分の公称曲げ応力は

$$\sigma = \frac{3Eahl}{L^3} \cdot \frac{1 - \frac{2n+c}{2h}}{\left(1 - \frac{2n+c}{2h}\right)^3 + \frac{3\lambda^2}{L^3}} \quad (1)$$

となる。 E はヤング率である。

† 日本機械学会 (1970年4月) において講演、講演論文集 No.700-2 に所載

* 九州大学教授、応用力学研究所

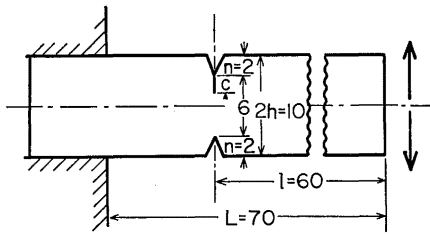


図 1 (a) 試験片の形状と寸法

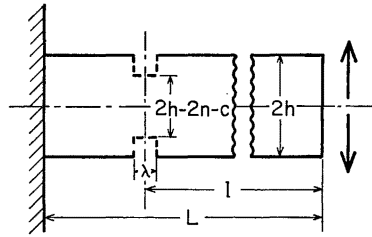


図 1 (b) 計算に用いる三連梁

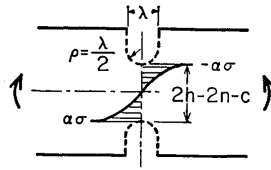


図 1 (c) 亀裂部の実効的な半径と応力分布

図 1

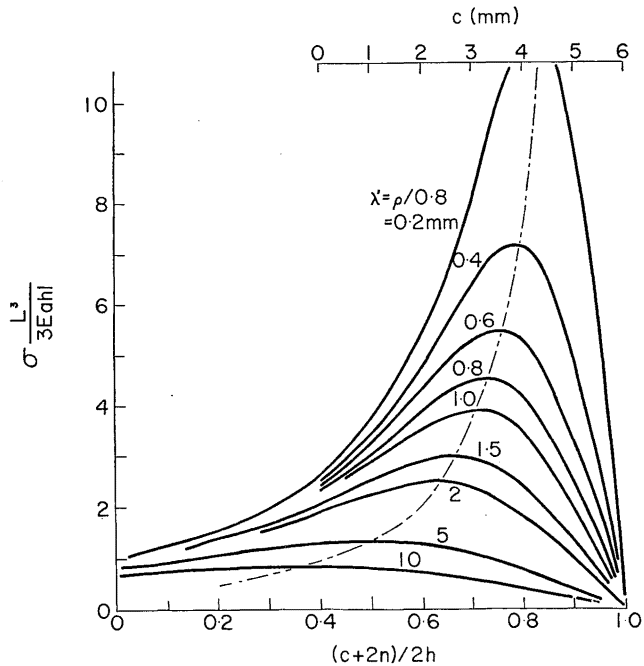


図 2 三連梁の計算による亀裂底応力と亀裂長さの関係 a は梁端の偏位振幅

亀裂発生直前は $c=0$ 、破断し終るとき $c=6\text{ mm}$ になる。 $(2n+c)/2h=0.4\sim 1.0$ の範囲の応力変化を $\lambda(=\lambda^3/L^3)$ をパラメタにして描くと図2のようになる。図から分るように公称応力は一般に亀裂成長とともに上昇するが、 λ 部分の長さに関するある亀裂長さで極大に達し以後は低下する。 λ' が大

きいと極大値はこの範囲には現われない。

3. 応力集中係数

λ 部分は実は亀裂部なので大きい応力集中を持っているはずである。しかし亀裂先端には集中塑性ひずみを生じている、実質的には図1-(c)のような場合と同じだと見做すことになる。応力集中係数 α は²⁾

$$\alpha = 1 + \left[\frac{\left(1 - \frac{2n+c}{2h}\right) \cdot \frac{2n+c}{2h}}{1.07 - \left(1 - \frac{2n+c}{2h}\right)} \right]^{0.83} \times \left(\frac{2h}{8\lambda}\right)^{0.83} \quad (2)$$

を用いる。図3は切欠き底の応力 $\alpha\sigma$ を $(2n+c)/2h=0\sim 1.0$ の範囲について示したものである。横軸の0.4は $c=0$ の時期を、1.0は破断の時期を示す。

この試験片では $l=60\text{ mm}$, $L=70\text{ mm}$ だから切欠き底半径 $\rho=0.8\lambda'$ となる。しかし ρ はいま分らない。そこで測定結果を説明し得るように ρ の大きさを選びながら切欠き底の応力 $\alpha\sigma$ と亀裂成長速度との関係を定めることにする。

4. 切欠き底応力と亀裂成長速度との関係

図4に文献1)の測定値から亀裂長さ(横軸)に対する亀裂成長速長(縦軸)を再録した。所定の偏位振幅 $a=0.75, 0.6, 0.4\text{ mm}$ の3種がある。3本の曲線は以下の手数によって求めようとするもの

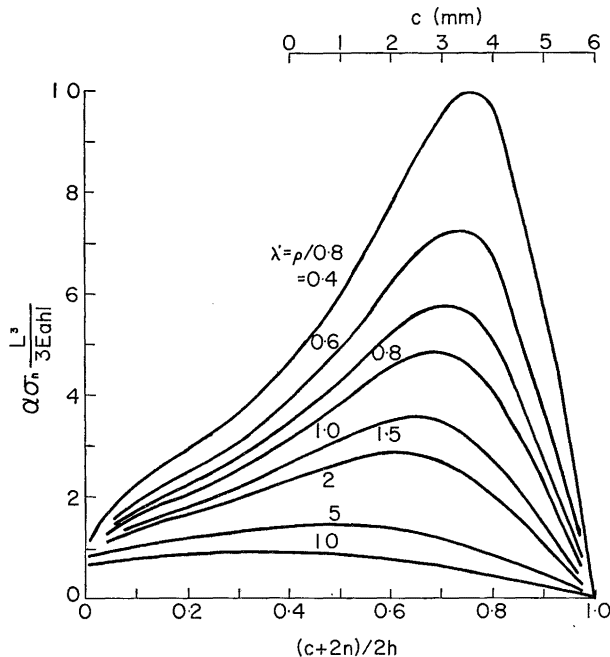


図 3 応力集中係数を考慮に入れた応力と亀裂長さの関係

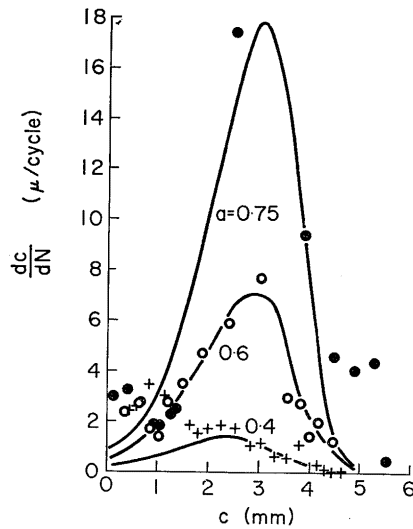


図 4 亀裂成長速度の測定値と表式による計算値 (曲線)

である. $a=0.4$ mm のものは後まわしにして, 先ず $a=0.75, 0.6$ mm の各測定点の c を読み, $(2n+c)/2h$ を計算して, それに対する $\alpha\sigma \times \frac{L^3}{3Eahl}$ の値を図 3 から読む. このとき ρ を, 即ち λ' を, 仮定しなければならない. いま $\lambda'=1.0, 0.8, 0.6$ の 3 種を仮定して $\alpha\sigma$ を求める.

あとで論ずるように, stress intensity factor が亀裂成長速度と一対一の関係にあるものならば, いま求めた応力もまたそうであるはずだと筆者は考える. $(\alpha\sigma)^m$ は石橋博士の用いた表現でもある. このことを認めれば, 亀裂成長速度が加速される前半の過程でも, 減速される後半の過程でも等しい応力 $\alpha\sigma$ に対しては等しい亀裂成長速度があるはずであるし, Paris³⁾ が示したようにそれは stress intensity factor のべき形で表わされるものならば, 応力 $\alpha\sigma$ に対してもべき形で表わされるものと推論される. そこで応力と亀裂成長速度を両対数紙にプロットする. 図 5 には無次元化した応力を用いてあるが, 無次元化のための係数は亀裂成長に無関係な定数であるから単に横軸に平行なシフトを与えるだけのもので以下の手法に影響するところはない.

図 5 左は振幅 0.75 mm に対するものである. 図 4 の資料から見られるように亀裂成長速度が小さいところでバラツキがあるため対数目盛にすれば下半部でそれがことさらに拡大されるが, 亀裂成長速度が割に大きいところで着目する. そして速度の加速過程と減速過程とで同じ直線を辿るような λ' を選ぶ. いまの場合 $\lambda'=0.8$ が近い. そして傾斜 $m=6$ の直線を探る. λ' がこれより大きいと上り下りが一致しない. これより小さいと上り下りはループを描いてやはり一致しない. 図 5 右では $\lambda'=1.0$ がよい. そしてやはり $m=6$ である. すなわち

$$\frac{dc}{dN} = k \left(\frac{\alpha\sigma L^3}{3Eahl} \right)^6 (\mu/\text{cycle}) \quad (3)$$

ただし, k の値にわずかの相違がある. 残された $a=0.4$ mm に対する測定点も式(3)で表示することに

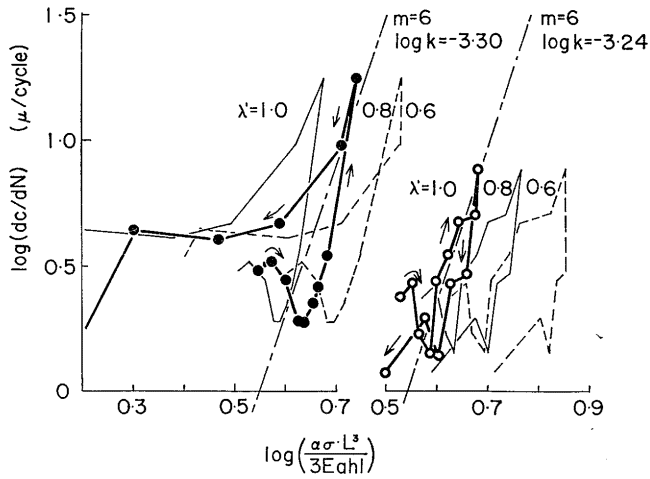


図 5 無次元応力 $a\sigma L^3 / (3Eahl)$ の何次ベキが最もよいかを定める作図

する。そして今度は簡単に最高値を合わせるように k を選んで 0.73 を得た。これら三つの k の値は a のそれぞれの値に対して両対数目盛上直線にならぶ、すなわち

$$k = 0.42a^{-0.6} \times 10^{-3} \quad (4)$$

図4の3本の曲線はこれらの k の値を用い、 $m=6$ として描いたものである。しかし図4の測定値を見ると分るように、 $a=0.4 \text{ mm}$ に対して図5の方法で λ' すなわち ρ を求めることはうまくいかない。図6に示すように ρ と a の関係を外挿（破線部分）して $a=0.4 \text{ mm}$ に対する ρ の値 1.2 mm を定める。すなわち

$$\rho = 0.48a^{-1} \quad (5)$$

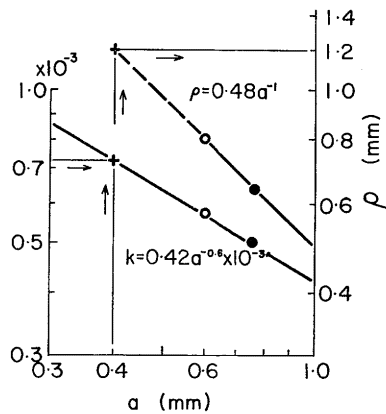


図 6 偏位振幅 a と定数 k , 実効半径 ρ の関係

表 1

$a(\text{mm})$	λ'	$\rho(\text{mm})$	$k(10^{-8}\mu/\text{cycle})$	$(dc/dN)_{\text{max}}$
0.75	0.8	0.64	0.50	~17.6
0.6	1.0	0.8	0.57	~7.10
0.4	1.5	1.2	0.73	~1.44

本来、できるならば k の値は材料定数であってほしいが、振幅 a の値によって変ることは、測定方法が a に比例して荷重速度が増減する方式になっているためであると思われる。すなわち a が小さいことは速度が小さいことであって、そのとき式(5)に示されるように ρ は大きい。すなわち塑性変形領域が大きく亀裂先端が鈍い。このことは、上記報告中の 50°C における測定例が ρ の大きい値に対する傾向を示していることを考え合わせて合理的な解釈だと思われる。そこで k の a 値依存は実はひずみ速度依存を表わしていると解すべきものであろう。

さらに、 k を完全な材料定数として定めることに困難があるとすれば、固定端と荷重端の条件が計算の仮定といくらか相違することにあると思われる。

図4を見ると亀裂成長の初期と後期に式(3)からのはずれが目立つ。特に $a=0.4\text{ mm}$ に対する初期のはずれは亀裂成長速度を違った傾向のものに変えている。これは切欠き底に亀裂が発生して 1 mm ほどの深さに達するまでの成長が切欠き底でかならずしも均等におこなわれていないためであると思われる。観測は側表面についておこなわれているので、切欠き底で部分的にクレーズから微小亀裂への成長があっても観測にかからない。側表面に現われたときはかなり速い速度で切欠き底からそこまで成長したように思われるが、現象は二次元的には起っていない。後期のはずれは、一方の切欠きから成長してきた亀裂が他方の切欠きに近づくときのくい違いによるものと思われる。亀裂長さ c が 5 mm になっても、くい違いがあれば実質的に 1 mm より大きい残り断面があって、応力は計算値より大きく、従って亀裂成長速度も大きい。これらの解釈は原著者の肯定を得たものである。

最近ポリカーボネートについては同様な測定がなされ、上記の方法に従って解析した結果が発表された⁴⁾。この場合の実験には充分の注意が払われたものと思われ上記のはずれがほとんどない。

5. 切欠き底応力と Stress Intensity Factor

疲れ亀裂の伝播速度は Paris と Erdogan⁵⁾ の論文以来 stress intensity factor で整理されていなければ無意味であるかのような風潮がある。しかし Paris, Erdogan の法則自体、亀裂底の応力を用いて整理する方法は結局 stress intensity factor を用いてする方法に帰するはずだ、という考えから生れたものである。stress intensity factor は、応力集中係数の計算と異って亀裂先端の実効的な半径のような定めにくい量を用いないでよいという利点がある。しかし stress intensity factor が分らないならば、Paris の時点に立ち帰ることも一つの道である⁶⁾。stress intensity factor のベキの形で亀裂伝播速度が整理されるものならば、やはり推算応力のベキの形に表わされるはずだと考え、亀裂底の半径を推算しながらベキ指数を定めることは無意味ではない。実験の荷重条件とは違うと思われる

stress intensity factor によって漠然とした定性的なことを述べるよりはさらに一步を進め得る。

stress intensity factor は弾性力学的な計算によって求められるものではあるが、Irwin⁶⁾ も示したように破壊面の局所的な塑性ひずみにともなって消費される仕事に対応もっている。また stress intensity factor の限界値 K_{Ic} は Barenblatt の modulus of cohesion そのものと解し得る関係にある。もっとも、ほとんど脆性と思われる破壊について考える Barenblatt⁷⁾ や Orowan⁸⁾ の微小な非線形ひずみ領域に較べて、Irwin のものはいくらか広い領域を考えているような感じがあるとは言え、線形弾性力学的な計算をもって破壊を論じる点において違いはない。すなわち、第一に亀裂先端に微小な非線形ひずみ領域を認める (Barenblatt はこの部分をも亀裂と呼ぶのでまぎらわしい。凝集力がはたしている限り物理的には亀裂とは呼べない。ただ数学的な計算ではこの部分を周辺と考えることになるので亀裂と呼びたくなるのだらう。Barenblatt がこんな鋭い亀裂は誰も考えなかったと言っているのは滑稽に聞える)。その領域の真の応力状態を解析することはできない。ただその領域の周辺の応力状態とひずみ状態は線形弾性力学の計算値に等しいとする。しかもそれは微小な内部領域が、いわば亀裂領域が、あたかも弾性的に変形したかのように計算された計算値に等しいとする。満足されるべき周辺条件は、ただ外周の弾性領域が亀裂領域に対してなした仕事、亀裂領域が消費したエネルギーに等しいということだけである。

Dugdale⁹⁾ は plastic wedge 領域を考えてその周辺条件に一定の降伏応力を用いて解決を求めたが、詮じつめればどれも Neuber¹⁰⁾ がのべているような鋭い切欠き底の plastic ball の考えにつながるものと思われる。以上のような条件で問題を近似し得るためには亀裂領域なり降伏領域なりは小さくなければならない。すなわち、擬脆性破壊あるいはひずみの小さい疲れ亀裂に限定される。その領域が大きいと外部の弾性領域の応力場そのものに無視できない乱れを誘起することになる。

弾性力学の計算による stress intensity factor で亀裂伝播速度が整理されるのは、塑性変形領域内の応力の弾性成分が利くためであろうという考えも一部にはあるが、双方の弾性応力がどのようにかわり合うのか、どんな論拠によるのかが分らない。筆者には首肯しがたい考えである。

筆者は、stress intensity factor で表現することを軽視しているわけではないことを付言したい。実効的な応力と stress intensity factor との間の決定的な関係式が分れば 4 節の結果は当然 stress intensity factor による表現に換えられる。多くの data が stress intensity factor で整理される現在、そのような表現の方が比較に便利であることはいうまでもない。

6. 結 論

(1) 繰返し曲げを受ける梁の亀裂先端部の応力は梁を三つの部分に分け、それらの境界条件を合わせて計算することができる。

(2) それによって亀裂長さが短いときは亀裂伝播速度は亀裂成長とともに増し、最大値に達し、亀裂長さが長くなるとその伝播速度は減少することを表わすことができる。

(3) その場合亀裂先端の部分の不詳な実効半径は亀裂伝播速度が亀裂底応力のベキに比例し、その関係式は亀裂伝播速度増大の過程でも同じであると考えることによって定められる。

- (4) 測定されたような条件の場合、ベキ指数は6である。
- (5) 上記実効半径は荷重速度が小さいとき、また温度が高いとき大きい傾向にあるが、0.64~1.2 mm である。
- (6) 得られた表式から亀裂伝播の初期と終期の測定値ははずれるが、初期の場合は亀裂成長が一樣に2次元的でないことにより、終期の場合は伝播した亀裂が反対側初亀裂と喰い違った位置に到達することによると思われる。
- (7) stress intensity factor で亀裂伝播速度を整理することは便利であるが、stress intensity factor が計算されていないから整理できないというものではない、適切な(そして簡単であればなおよい)計算によって、整理できるならばその計算をおこない、材料定数と思われるものを抽象し疲労の亀裂成長の機構につなぐことを試みるべきだと思われる。stress intensity factor で表現すること即解決ではないからである。

文 献

- 1) 黒部利次, 若島久男, Proc. 13th Japan Congr. Mat. Res., 1970, p. 192.
- 2) 西田正孝, 応力集中, 森北出版, 1967, p. 565.
- 3) Paris, P. C., and Erdogan, F., Trans. ASME, 85, D 4, 1963, p. 528.
- 4) 黒部利次, 若島久男, 材料, 21, 1972, p. 800.
- 5) 瓜生恒美, Proc. 3rd Japan Congr. Test. Mat., 1960, p. 40.
- 6) Irwin, G. R., J. Appl. Mech., 24, 1957, p. 361.
- 7) Barenblatt, G. I., Advances in Applied Mechanics, 7, 1962, p. 55.
- 8) Orowan, E., *Fatigue and Fracture of Metals*, (ed. W. M. Murray) J. W. & Sons, 1952, p. 139.
- 9) Dugdale, D. S., J. Mech. Phys. Solids, 8, 1960, p. 100.
- 10) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, Springer, 1937, p. 142.

(昭和48年6月6日 受理)