

## 三次元境界層流の線型安定性

山下, 巖

九州大学応用力学研究所 : 助手

竹松, 正樹

九州大学応用力学研究所 : 助教授

<https://doi.org/10.15017/4743503>

---

出版情報 : 應用力学研究所所報. 40, pp.59-73, 1973-11. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :



## 三次元境界層流の線型安定性†

山 下 巖\*  
竹 松 正 樹\*\*

## 概 要

壁面近くに比較的強い二次流れを有する、ある種の三次元境界層流の線型安定性を問題にし、特に、この種の流れの遷移現象を支配するものとして興味をもたれている、壁面に対して静止した stationary mode の不安定攪乱の実体に、より満足の「説明」を与えることに主眼がおかれる。

この安定問題は、局所平行流の仮定を拡張し、さらに二～三の妥当な近似を導入すると、個々の攪乱に対して、その伝播方向の主流の速度成分を“平均流”とする通常の Orr-Sommerfeld 固有値問題を解けばよいことが知られている。当面の三次元境界層流に関して考えられるさまざまな“平均流速”分布のうち、実験結果との関連において特に興味があるのは、その分布の変曲点で、丁度、流速=zero の点と一致する、J-プロファイルと呼ばれる分布である。ここでは、J-プロファイルとそれに近い二～三の“平均流”プロファイルに対して、数値解法を併用して固有値方程式を解き、攪乱の位相速度 ( $c_r$ )、および成長率 ( $c_i$ ) を波数 ( $\alpha$ ) と Reynolds 数 ( $R$ ) の関数として求めた。

この計算により初めて明らかにされた重要な点は、不安定領域 ( $R > R_{cr}$ ) において、それぞれの  $R$  数に対して二つの stationary mode ( $c_r = 0$ ) の攪乱が存在することである：一つは、非常に小さな増幅率 ( $ac_i$ ) を持つ、ほぼ中立攪乱ともいべきものであるのに対し、他の一つは、増幅率が大きいのが特徴で、その波数は比較的小さい。自然条件のもとで観測される stationary mode の攪乱——それは増幅率の最も大きなものを意味する——が前者の攪乱であるとする通説に反し、後者の攪乱の方が、観測結果に対してより妥当な「説明」を与えるように思われる。

## 1. 序 論

後退翼 (Yawed Wing) 面上、あるいは静止流体中に置かれた回転円板上の境界層流は、圧力勾配によって壁面近くに誘起される“二次流れ”のために、比較的強い三次元性を示すことが知られている。それでは、こうした流れの三次元的構造は、境界層流の遷移現象にどのような影響を及ぼすであろうか？ この問題の研究は、1940年代の後半以来多くの研究者によってなされてきたが、就中、Royal Aircraft Establishment と National Physical Laboratory の両グループによる組織的研究が有名である。Gray (R. A. E.) は、翼面に china-clay を塗布して飛行実験を行ない、後退翼面上の三次元

† 第四回流体力学講演会 (1972年10月, 航空宇宙技研) において講演

\* 九州大学助手, 応用力学研究所

\*\* 九州大学助教授, 応用力学研究所

境界層流が、後退角のない翼面上の二次元的境界層流よりも早く乱流に遷移すること、しかも、その遷移に先行して、翼面に付着するように、静止した規則正しい渦列が存在することに気がついた。Gregory と Walker<sup>1)</sup> (N. P. L.) は、同様な渦現象が、回転円板上の三次元境界層流の場合にも存在することを示した——Rosenhead の書物<sup>2)</sup> の口絵参照——。この N. P. L. のグループは、“evaporation”法による定性的な観察だけに止まらず、特殊な聴診器を用いて、その遷移領域の定量的な側面についても調べ、観測される定常攪乱（渦）が非常に強いものであることを示した。

三次元境界層流に特有なこの渦現象に対する最も定評ある理論的説明は Stuart の論文（参考文献 2）の Part II）に見られる。この論文は、三次元定常流に重畳された二次元的な微小攪乱を支配する方程式を吟味し、この三次元的安定問題が、ある妥当な近似のもとに、通常の二次元問題、すなわち Orr-Sommerfeld 固有値問題に帰着されることを示した：ただし、この場合の“平均流”としては、攪乱の伝播方向の主流の速度成分をとらねばならない。従って、どのような方向に伝播する攪乱を考えるかによって、“平均流速”分布はさまざまな形をとるわけであるが、Stuart が観測結果との関連において特に注目したのは、剣離流に似て、壁面近くに逆流域を含み、そのプロフィールの変曲点（inflexion point）が丁度、流速=zero の点と一致するような“平均流速”分布である。これは J-プロフィールと呼ばれている。このような特別な速度プロフィールに対しては、非粘性の極限で、位相速度 zero の定常中立攪乱が存在することは、安定論でよく知られた性質である。一方、J-プロフィールの実現する方向の軌跡から予測される攪乱の配置は観測結果と見事に一致する。従って、当の定常渦現象は、J-プロフィールに固有な“inflexional instability”であるとするのが、Stuart の説明であり、今では定説となっている<sup>2)</sup>。Stuart は、実際に非粘性固有値問題を J-プロフィールについて解き、中立攪乱に対する波数を決定した。その計算値は、観測される波数のほぼ四倍となったが、この食違いは粘性の効果によるものであるとして片付けられた。

上述の Stuart の説明は、波数の食違いはともかくとして、自然条件のもとで観測にかかる攪乱は増幅率の最も大きなものであるはずであることから考えると、説得力に乏しいように思われる。Stuart の説明のこうした難点を解決しようとするのが本研究の主目的である。J-プロフィールとそれに近い二～三のプロフィールにつき、非粘性問題から出発し、完全な粘性固有値問題を厳密に解き、中立攪乱ばかりでなく全ての増幅攪乱の性質を詳細に調べた。その結果、Stuart の考えた定常中立攪乱の他に、もう一つ、波数が小さく、増幅率の大きい stationary mode（位相速度=zero）の攪乱が存在することが明らかにされた。この新たに見出された安定特性を Gregory らの実験結果と対比して論じた。

## 2. 問題の記述

### 2.1. “平均流”の速度分布

“平均流”のプロフィールは、安定特性を支配する重要な要素であり、文献に詳細に述べられているが、便宜上、その簡単な記述から始める。対象とする定常三次元境界層流の速度場を、境界層の外側の流線に沿う方向の成分と、それに垂直な方向の成分とに分解すると、接線成分は通常の境界層型、一方、垂直成分（“二次流れ”）は壁面噴流型の分布をもつ。

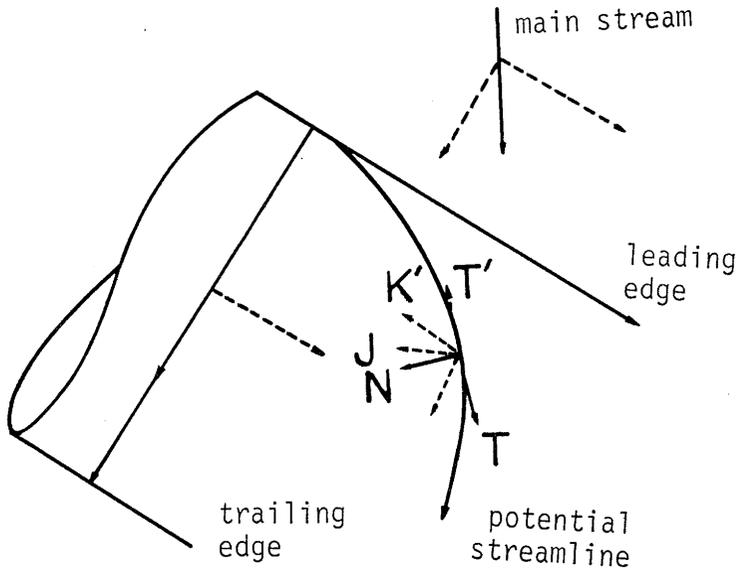


図 1 三次元境界層流の主要な方向

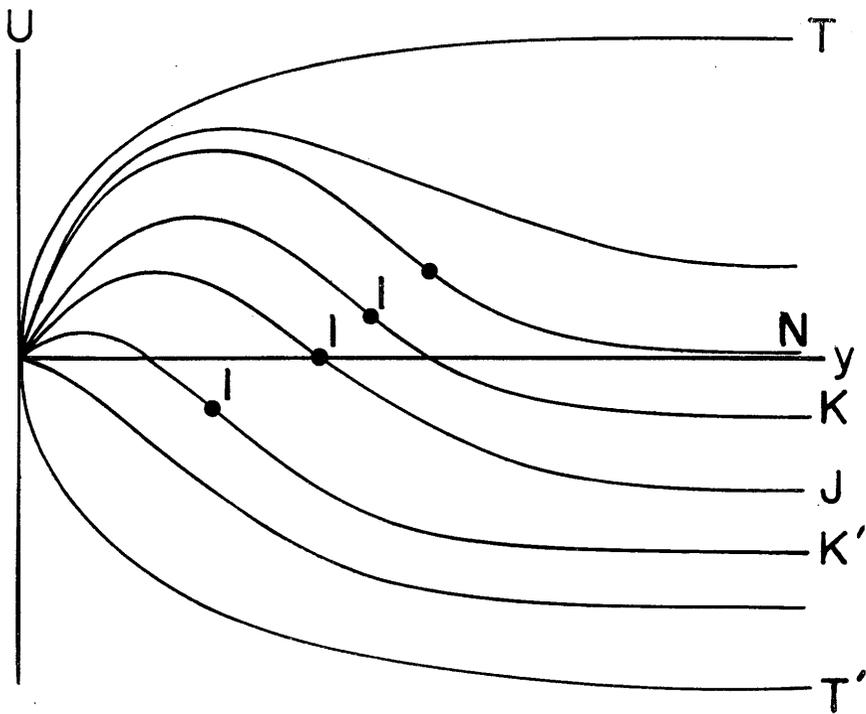


図 2 速度成分 ( $I$  = 変曲点)

その他の任意方向の速度プロファイルは、これら二つの速度分布の合成によって得られる。この関係を、後退翼の場合について説明したのが図 1, 2\* である。図 1 に示す各方向の速度成分が図 2 に示されている。本研究では、序論でも述べたように、J-プロファイルとそれからわずかに異なる K, K'-プロファイルに特に注目する。

## 2.2. 安定問題

Stuart<sup>1)</sup> に従えば、三次元構造の主流に重畳される二次元微小攪乱の安定性は、局所的には、通常の Orr-Sommerfeld 固有値問題を解くことにより調べられる。すなわち、

$$(i\alpha R)^{-1}\{\phi^{iv}-2\alpha^2\phi''+\alpha^4\phi\}=(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi, \quad (2.1)$$

また、境界条件は

$$y=0 \text{ で } \phi=\phi'=0, \quad (2.2)$$

$$y=\infty \text{ で } \phi=\phi'=0, \quad (2.3)$$

である。すべての変数は適当な代表長さ ( $\delta$ ) と代表速度 ( $V$ ) について無次元化してある。 $R$  は Reynolds 数 ( $V\delta/\nu$ ) である。ここで  $x$  軸は攪乱の伝播方向にとられる。 $U(y)$  は“平均流”で、この場合、攪乱の伝播方向の主流の速度成分をとらねばならない。 $y$  は表面に垂直な座標である。 $\alpha$  は  $x$  方向の波数、 $c(=c_r+ic_i)$  は複素位相速度、 $\phi(y)$  は複素振幅を意味する：攪乱速度場の  $y$  方向の成分 ( $w$ ) は、これらの量を用いて  $w=\phi(y)\exp\{i\alpha(x-ct)\}$  のように表わされ、他の二方向の成分 ( $u, v$ ) は  $w$  から容易に計算される。方程式 (2.1) が (2.2), (2.3) の四つの齊次境界条件を満足する有意な解を持つためには、含まれるパラメータの間に一つの固有値関係  $\Delta(c, \alpha, R)=0$  が成立しなければならぬ。この関係から  $c(=c_r+ic_i)$  を  $\alpha$  と  $R$  の関数として求めることができる。 $c_i > 0$  であれば攪乱は増幅され、流れが不安定であることを意味する。 $c_i \leq 0$  は、それぞれ、安定・中立攪乱に対応する。

## 3. 問題の解法

### 3.1. 非粘性問題

“平均流”のプロファイルが変曲点を持つ場合には、非粘性の極限 ( $R=\infty$ ) においても不安定が存在することが良く知られている (non-viscous instability)。この種の不安定は粘性に比較的鈍感なのが特徴で、その(不)安定特性の概略は、簡単な非粘性問題を解くことによって知られる。今考えている不安定はこの部類に属するから、まず非粘性問題から取扱うのが得策である。

(2.1) 式において  $R=\infty$  とすると、次式が得られる

$$\phi''-\alpha^2\phi-\frac{U''}{(U-c)}\phi=0. \quad (3.1)$$

境界条件も簡単になり (no-slip の条件が除かれる),

$$\phi'(\infty)+\alpha\phi(\infty)=0, \quad (3.2)$$

\* これらの図は参考文献 1) からとられた。

$$\phi(0)=0, \tag{3.3}$$

となる。この簡単化された境界値問題は、以前 Stuart<sup>1)</sup> により、変分法を用いて  $c_i=0$  (中立攪乱) の特別な場合に関して解かれた。本研究では成長率  $c_i$  の分布に注目しているのであるから、 $c$  を一般に複素数として取扱わねばならない。 $c$  が複素数値をとり、しかも  $U(y)$  が 2.1 で述べたように複雑な形をとる場合、非粘性方程式 (3.1) に対する通常の解析的方法<sup>3)</sup> は役に立たない。この場合、最も簡単で正確な方法は、直接数値積分によるものであり、それによって、 $\alpha, c$  の値に制限を受けることなく、(3.1) の解を厳密に求めることができる。

数値解法の便宜上、次のような新しい従属変数、

$$G(y; \alpha, c) \equiv -\alpha \Phi(y) / \Phi'(y), \tag{3.4}$$

を導入する。ここで  $\Phi(y)$  は (3.1) の一つの解を意味する。この新しい従属変数を用いると (3.1) 式は

$$G' - \alpha(G^2 - 1) - \frac{G^2 U''}{\alpha(U - c)} = 0, \tag{3.5}$$

に帰着される。一方、境界条件 (3.2) および (3.3) は、それぞれ、

$$G(\infty; \alpha, c) = 1, \tag{3.6}$$

$$G(0; \alpha, c) = 0, \tag{3.7}$$

となる。なお、(3.1) と同様、(3.5) は  $U(y_c) = c$  なる点  $y_c$  で対数的特異性を示すことに注意しなければならない。これらの新しい表式が数値解法を適用するのに特別好都合な形であることがわかる。

Riccati 型の一階微分方程式 (3.5) は、“初期条件” (3.6) から出発し、壁面  $y=0$  に向って容易に積分することができる。積分には Runge-Kutta 法を用いる。なお、この場合の積分路は、図 3 に示すように、 $U'(y_c) > 0$  の場合は特異点の下側を、 $U'(y_c) < 0$  の場合は特異点の上側を通るように選ばねばならない<sup>4)</sup>。こうして積分値  $G(0; \alpha, c)$  が求められると、“判定条件” (3.7) により、その値を zero にするような  $(\alpha, c)$  の組として、固有値が決定される。この“固有値探し”は試行錯誤的になされる：すなわち、実数  $\alpha$  に対し、適当に  $c$  の複素数値を選んで上述の積分を繰返し、得られた結果  $G(0; \alpha, c)$  を複素面に  $c_r, c_i$  をパラメータとしてプロットする。積分値が zero 点に近づくように  $c_r, c_i$  を適宜調節し、最終的には内挿法によって正しい  $c (= c_r + ic_i)$  を決定する。一つの  $\alpha$  に対して固有値

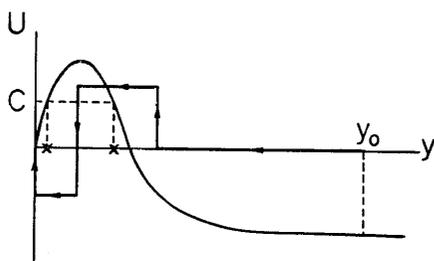


図 3 積分路

$c_r, c_i$  が求められると、その結果を足がかりとして、他の  $\alpha$  に対する値は比較的容易に求められる。

### 3.2. 漸近解法

大きいけれども有限な  $\alpha R$  の値に対しては、漸近解法が用いられる。しかしながら、漸近解法では、一般に  $c_i \neq 0$  の固有値を扱うのは容易でないので、それは前節と次節の純数値解法に委ね、ここでは  $c_i = 0$  の中立攪乱のみを考える。

Orr-Sommerfeld 方程式 (2.1) は四つの特解を持つ。そのうちの二つ  $\{\phi_2, \phi_4\}$  は  $y = \infty$  で発散するが、他の二つ  $\{\phi_1, \phi_3\}$  は  $y = \infty$  で消滅するように選ぶことができる。従って (2.3) を満足する (2.1) の解は一般に

$$\phi = A\phi_1 + B\phi_3, \quad (3.8)$$

と書かれる。ここで  $A, B$  は任意定数である。(3.8) に境界条件 (2.2) を課すことにより

$$\frac{\phi_1(0)}{\phi_1'(0)} = \frac{\phi_3(0)}{\phi_3'(0)}, \quad (3.9)$$

を得る。

大きな  $\alpha R$  に対して  $\phi_1$  は前節で取扱われた非粘性解  $\Phi(y)$  によって近似されることがよく知られている<sup>5)</sup>; すなわち、

$$\phi_1(y) \simeq \Phi(y) + O[(\alpha R)^{-1}]. \quad (3.10)$$

他方、 $\phi_3$  は、近似的に、次式のように求められる

$$\phi_3(y) \simeq \chi_3(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \eta^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[ \frac{2}{3} (i\eta)^{3/2} \right] d\eta + O(\varepsilon). \quad (3.11)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= (y - y_c) / \varepsilon, \\ \varepsilon &= \{\alpha R U'(y_c)\}^{-1/3}, \\ c &= U(y_c), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$H_{1/3}^{(1)}$  は  $1/3$  次の第一種 Hankel 関数である。(3.9) に (3.10) と (3.11) を代入し、 $\Phi$  に対して (3.4) の関係を用いると次の形の固有値方程式を得る

$$\frac{G(0; \alpha, c)}{y_c \alpha} = \mathcal{F}(z_c). \quad (3.13)$$

ここで、 $z_c = y_c / \varepsilon = \{\alpha R U'(y_c)\}^{1/3} \cdot y_c$ 。  $\mathcal{F}$  は変形 Tietjens 関数で、Miles の論文<sup>5)</sup> に正確な数表が掲載されている。なお、図 3 に見られるように、一つの  $c$  の値に対して一般に二つの  $y_c$  の値が存在するが、(3.13) 式に現われる  $y_c$  としては壁面に近い方の値をとらねばならない。

固有値方程式 (3.13) を解くには図式解法を用いると便利である。右辺の複素関数値は、Miles の数表から、“Argand 図”の上に、 $z_c$  をパラメータとする一本の曲線で表現される。一方、左辺の値は、

前節の数値積分法により容易に計算され、同じ図面の上に、 $c$  をパラメータとする  $\alpha = \text{const.}$  の曲線群として表わされる。両曲線の交点から、それぞれの  $\alpha$  の値に対する固有値  $c$  および  $z_c$  (すなわち、 $R$ ) を求めることができる。こうして求められた実数  $\alpha$  (または  $c$ ) を  $R$  の関数として図にプロットすると、安定・不安定の限界を定める、いわゆる中立曲線が得られる。

### 3.3. 純数値解法

今問題にしている型の不安定は粘性に比較的鈍感であることが特徴であると述べたが、これは当の不安定を抑えるのには相当大きな粘性の効果が必要であることを意味する：すなわち、相当低い  $R$  数に対しても不安定が存在することを示唆する。実際、前述の漸近解法により計算される中立曲線は、漸近近似の適用可能範囲を越えて、さらに低い  $R$  数の領域に向って伸びる。このような、漸近解法があやしくなるような低い  $R$  数の領域では純数値解法を用いねばならない。数値解法は、成長率  $c_i$  の分布の正確な算出を可能ならしめ、同時に、漸近解法の結果のチェックに役立つ。しかし、漸近解法か何かで、固有値に関して何らかの手掛り (“initial guess”) があらかじめ得られていなければ、純数値解法は全く能率の悪いものであることを、漸近解法の名誉のために付記しておく必要がある。

数値解法では有限の領域しか扱えない。従って、無限遠 ( $y = \infty$ ) での条件 (2.3) はそのままでは不便であるので、これを  $y$  の有限の点の同等な条件でおきかえる必要がある。境界層の外側では“平均流”はほぼ一様と考えられる：すなわち、適当に規格化すると、 $U(y) = -1, y > y_0$ 。このような簡単な“平均流”に対しては、(2.1) は厳密に解くことができ、(2.3) の条件を考慮するとこの領域の一般解は

$$\phi = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 e^{-\gamma y}, \quad (y \geq y_0), \quad (3.14)$$

の形で求められる。ここで、 $\gamma = \{\alpha^2 - i\alpha R(1+c)\}^{1/2}$ ,  $\text{Re}[\gamma] > 0$  であり、 $A_1$  と  $A_2$  は未定定数である。この解が境界層内部の解となめらかに接続されるためには、接続点  $y = y_0$  で、両者の解が三階の微係数まで一致しなければならない。この連続性の条件に (3.14) を用い、 $A_1, A_2$  を消去すると

$$\phi''(y_0) + (\alpha + \gamma)\phi'(y_0) + \alpha\gamma\phi(y_0) = 0, \quad (3.15)$$

$$\phi'''(y_0) + \gamma\phi''(y_0) - \alpha^2\phi'(y_0) - \alpha^2\gamma\phi(y_0) = 0, \quad (3.16)$$

が得られる。(2.3) のかわりにこれら二つの条件式を使うと、 $y > y_0$  の半無限領域は考える必要がなく、 $0 \leq y \leq y_0$  の有限領域のみを取扱えばよいことになる。

安定問題の数値解法はいくつか考案されているが、ここでは差分法による解法を用いる。有限な  $y$ -領域を  $n$  個の微小区間に等分し、各分点における微分を、中央差分を用いて、差分表現で近似する。こうして微分形式で書かれた境界値問題 (2.1), (2.2), (3.15) および (3.16) は次のような線型代数方程式に帰着される：

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi} = 0. \quad (3.17)$$

ここで、 $\mathbf{A}(\alpha, R, c)$  は  $(n+1)$  次の複素正方形行列で、 $\boldsymbol{\phi}$  は離散的な等分点における  $\phi$  の値を表わす列ベクトルである。

斉次方程式 (3.17) は、その係数行列式が zero の時のみ、恒等的には zero でない有意な解を持つ。

すなわち、含まれるパラメータの間に

$$|\mathbf{A}(\alpha, R, c)| = 0, \quad (3.18)$$

なる関係が成立しなければならない。この“固有値判定条件”を使って、 $c(c_r, c_i)$  を  $\alpha$  と  $R$  の関数として決定することができる。

(3.18) は非常に複雑な形をとり、試行錯誤的な数値解法のみが可能である。与えられた  $\alpha, R$  の値に対し、まず、 $c$  のおおよその値、すなわち複素  $c$ -平面上のどの領域を探せばよいかを推定する必要がある (initial guess)。この推定値はできるだけ真の値に近いことが望ましい。従って、“固有値探し”の作業を比較的高い  $R$  数領域から始めると、漸近解法の結果を良質の推定値として利用できるのが能率的である。目星をつけたこの  $c$ -面上の小領域を適当に細分し、各格子点の上で係数行列式の値を評価する。その際、係数行列式の値そのものを扱う必要はなく、その zero でない要素を枢軸として順次「掃出し」を繰り返し、最後に残った二次の行列式 ( $|\mathbf{A}'|$ ) を評価すれば充分である—— $|\mathbf{A}'| = 0$  と (3.18) は同等である——。なお、「掃出し」計算の反復の過程で「桁落ち」の起こる可能性もあるので、計算は「桁倍精度」で行なう。こうして、求める固有値を含む、 $c$ -面上の格子領域が突止められると、それをさらに細分し同様な手順を繰り返す。格子領域が充分狭められたら、単純な内挿法を用いて真の値を決定する。得られた結果は、一般に、独立変数  $y$  の領域の分割幅 ( $H$ ) に依存するが、 $H$  を充分小さくとると一定の値に収束する (次節図 13 参照)。適切な  $H$  の値をアприオリに決定するのは困難であるので、選んだ  $H$  の値が充分小さいものであるか否かを適当にチェックする必要がある。 $|\mathbf{A}'|$  を計算するためのプログラムも含め、以上の数値解法の手順の信頼性は、詳細な計算結果が報告されている二次元 Poiseuille 流の場合に適用することによってチェックされる。

#### 4. 計算結果及び検討

今問題にしている三次元境界層流の一般的性質については 2.1 節で簡単に説明したが、安定計算を実行するには、その速度場を具体的に表現する必要がある。ここでは Stuart の例に倣い、二つの主要な速度成分、すなわち、境界層型の速度成分とそれに垂直な方向の二次流れ成分の形をそれぞれ次のように表わすものとする；

$$\left. \begin{aligned} F_t &= 1 - e^{-y}, \\ F_n &= M(e^{-y} - e^{-2y}). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

その他の任意の方向の速度成分は、これらの合成として

$$\vec{U} = (r\omega) (F_n \cos \epsilon - F_t \sin \epsilon), \quad (4.2)$$

のように表わされる。この分布は、現実には、強い吸い込みを持つ回転円板上の境界層流の速度分布を表わす： $(r\omega)$  は中心からの距離  $r$  の点の周速度、 $\epsilon$  は半径方向から測った角度、 $M$  は吸い込みの程度を表わすパラメータである。(4.2) で  $\epsilon$  を変化させることにより、図 2 に示す一群のプロフィールを表現することができる。このプロフィールは  $y \rightarrow \infty$  で  $|\vec{U}_\infty| = (r\omega) \sin \epsilon$  なる値をとる。J, K, K' 等のプロフィールに対しては一般に  $\epsilon \neq 0$  であるから、この速度を尺度にして (4.2) の分布を表現することが

できる。すなわち、

$$U = -1 + (m+1)e^{-y} - me^{-2y}. \tag{4.3}$$

ここで  $m = M/\tan \epsilon$ . 特に,  $m=3.0$  の場合,  $y = \log_e 3$  で  $U = U'' = 0$  となり J-プロファイルが得られる.  $m$  の値を 3.0 より大きく (小さく) とると K(K')-プロファイルが得られる. 以下の計算例では K-プロファイルに対しては  $m=3.5$ , K'-プロファイルに対しては  $m=2.6$  を選んだ. なお, (4.3) の表現においては,  $\epsilon$  (従って  $m$ ) の値によって基準となる速度  $(r\omega) \sin \epsilon$  が異なることに注意しなければならない (用いられる基準速度は K', J, K の順で小さくなっている). これら三つのプロファイルに対する安定特性を前章の方法によって詳細に調べた. 主な結果を図 4~12 に順次示し, 実験結果と比較しながら論ずる.

図 4 は非粘性の極限 ( $R = \infty$ ) における J-プロファイル\* の (不) 安定特性を示す. この場合,  $0 < \alpha < 1.5$  で  $c_i > 0$ , すなわち, この波数帯に入る擾乱は時間と共に増幅されることがわかる. 特に,  $\alpha = 1.5$  ( $=\alpha_s$ ) で  $c_r = c_i = 0$  となるが, この一点はまさに Stuart<sup>1)</sup> が実際に計算で求めた点である. すでに序論にも述べたように, Stuart はこの特別の中立擾乱が観測される stationary mode の擾乱に対応するものと考えた. しかしながら, ここに提示されたより完全な不安定特性を前にすると, Stuart の説明はいささか疑問に思われる: J-プロファイルの実現する方向が観測される擾乱の配置 (その波数ベクト

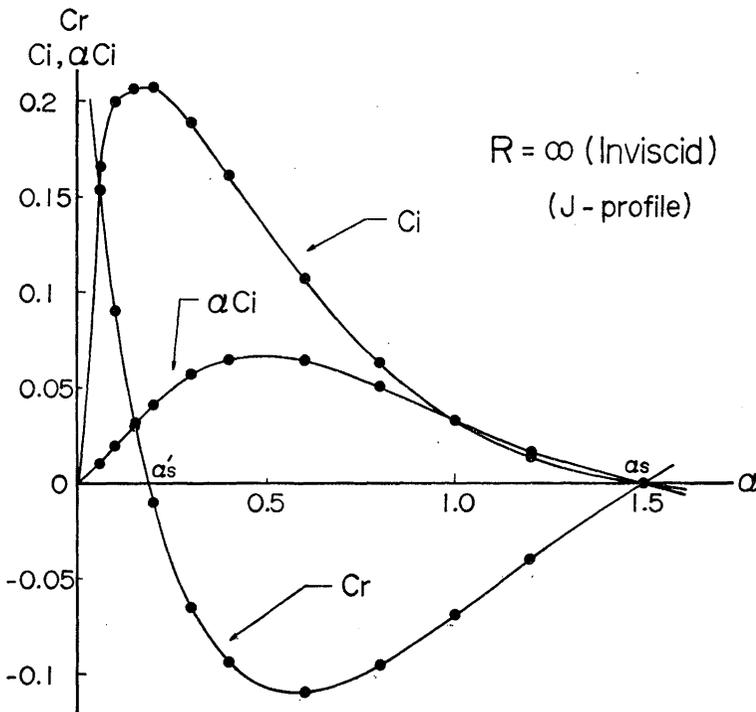


図 4 非粘性安定特性 (J)

\* 以下「プロファイル」を省略し単に J, K等と書く場合もある.

ル) と見事な一致を示すことだけでは説得力のある説明とはいいい難い。事実、図の計算結果は、 $\alpha (= \alpha_s) \approx 0.2$  に対しても  $c_r = 0$  となり、もう一つ別に stationary mode の攪乱が存在することを示す。しかも、この攪乱はかなり大きな増幅率 ( $\alpha_i$ ) を持つ——波数も観測結果に比較的近い——。自然条

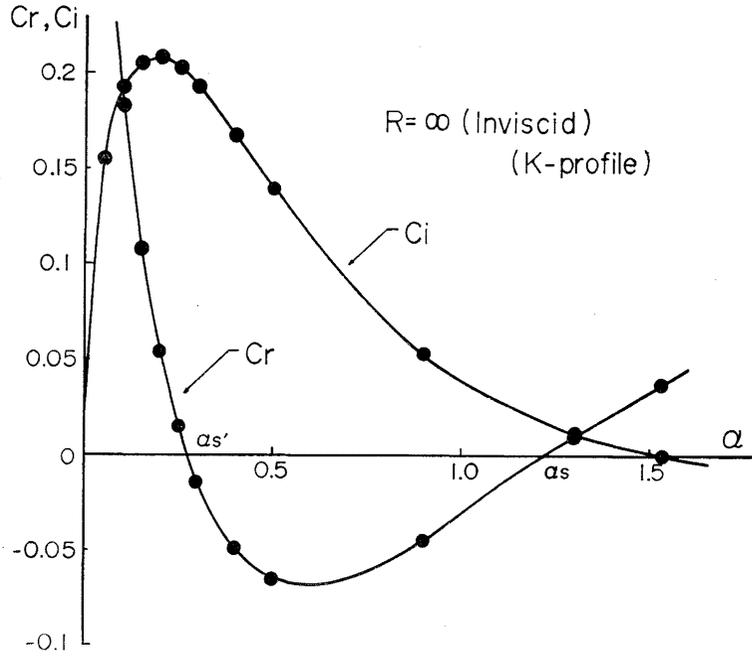


図 5 非粘性安定特性 (K)

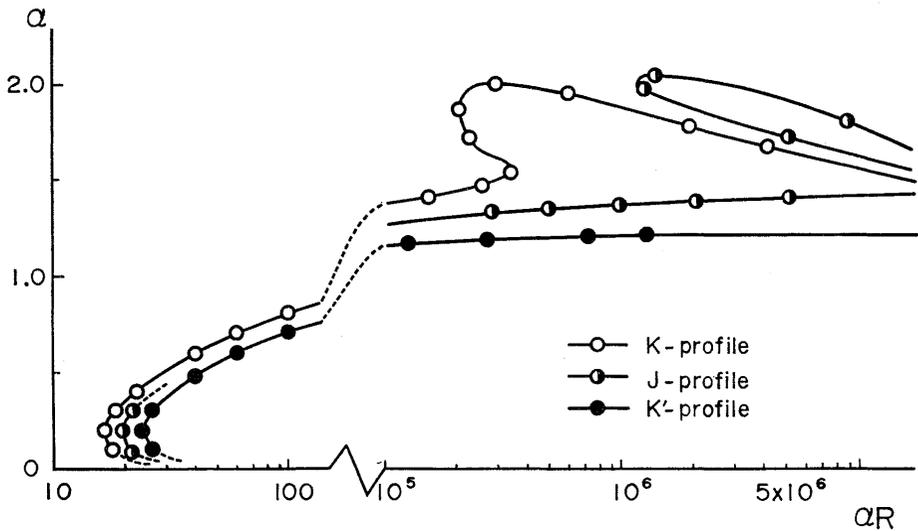


図 6 中立曲線 ( $\alpha$  vs.  $\alpha R$ )

件のもとでは増幅率の大きいものが優勢な攪乱として生き残り得ることから考えると、観測される渦現象の説明において、少なくともこの後者の攪乱の存在を無視するわけにはいかない。なお、この場合、最大の増幅率を持つ攪乱の波数はほぼ実験結果 ( $\approx \frac{1}{4}\alpha_s$ ) と一致するが、位相速度  $c_r$  は zero でない;  $c_r < 0$  であり、境界層の外側の流れと同じ方向に伝播することがわかる。K, K' の場合にも同様な特性が得られる (図5)。

現実の渦現象は有限な粘性の効果のもとに起こるのであるから、結論を出すには、有限な  $R$  数領域の安定特性も調べる必要がある。

まず、安定特性の概観を得るために、安定-不安定の限界を与える中立曲線を図6に示す。これらの

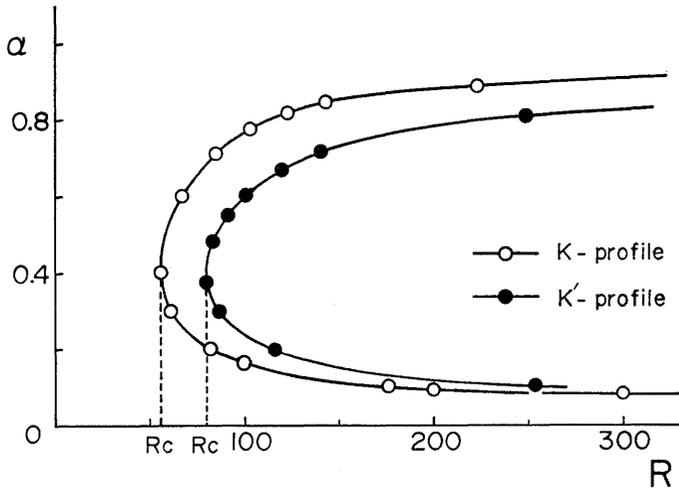


図 7 中 立 曲 線 ( $\alpha$  vs.  $R$ )

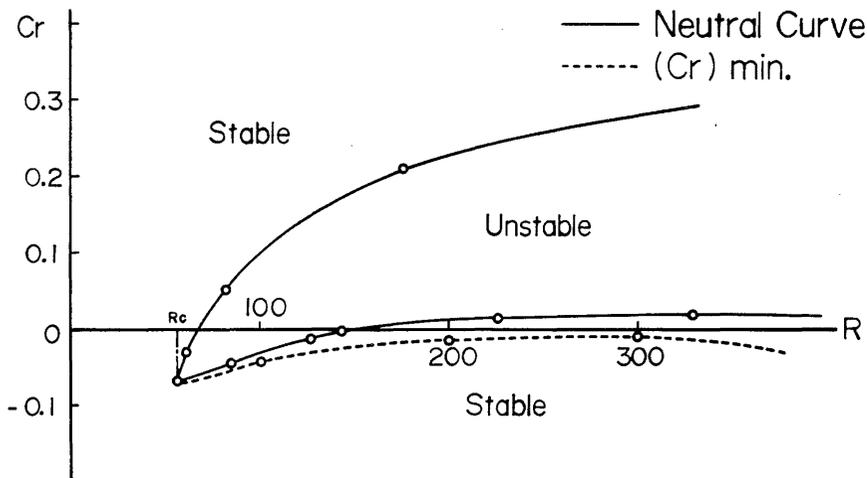


図 8 中 立 曲 線 ( $c_r$  vs.  $R$ )

曲線は漸近解法の結果 ( $\alpha R > 2 \times 10^3$ ) と数値解法の結果 ( $\alpha R < 2 \times 10^3$ ) をなめらかにつないで得られたものである。この図で特徴的な事柄は、 $K'$  の場合は通常の安定問題の場合と同様単調な形をしているが、 $K$  の場合は  $\alpha R$  の大きい領域にコブが現われることである。丁度、 $J$  の場合は、このコブが分離して独立のループを作るようである。

図7は、 $\alpha R$  の小さい領域の中立曲線を  $R$  を横軸にとって表わしたものである\*。臨界 Reynolds 数  $R_c$  が相当低いが、これは変曲点を持つ流れに共通の性質である。ここで特に注目すべきことは、図

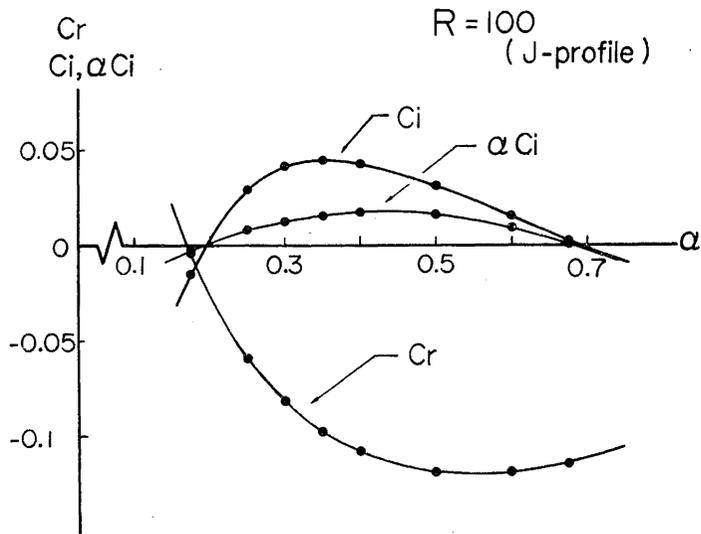


図 9  $R=100$  に対する安定特性 (J)

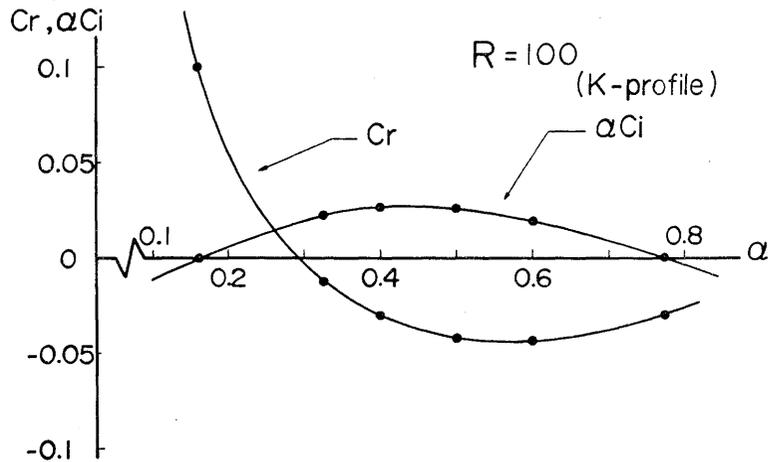


図 10  $R=100$  に対する安定特性 (K)

\*J は省略してあるが、KとK'の間にはさまれる。

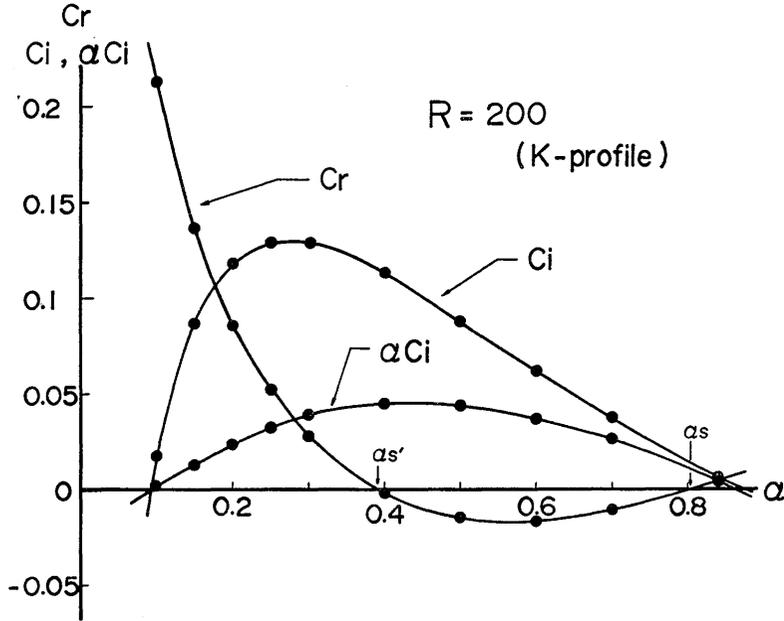


図 11  $R=200$  に対する安定特性 (K)

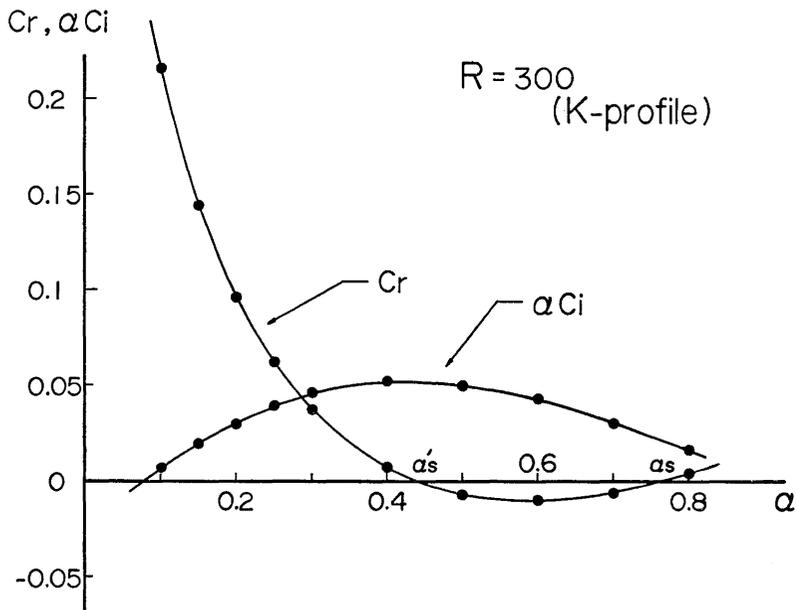


図 12  $R=300$  に対する安定特性 (K)

4, 5 にも見られるように, 各  $R = \text{const.}$  の断面における  $c_r$  の  $\alpha$  に対する変化が単調でないことである: 常に不安定波数帯のどこかで  $c_r$  は最小値をとる. 従って, 中立攪乱 ( $c_i = 0$ ) の特性を  $c_r - R$  の関係で示すと図 8 のようになり, 中立曲線が必ずしも不安定領域の境界線とはならない. 不安定領域は一本の中立曲線と  $c_r$  の最小値を示す線 (点線) で境される. 非粘性特性に関し,  $c_r = 0$  に対して二つの波数  $\alpha_s, \alpha_s'$  が対応することを述べたが, それは, この  $c_r - \alpha$  関係の多価性の一つのあらわれに他ならない. Stuart はこの多価性に気がつかなかったがために,  $\alpha_s'$  の存在を見落したのであろう.

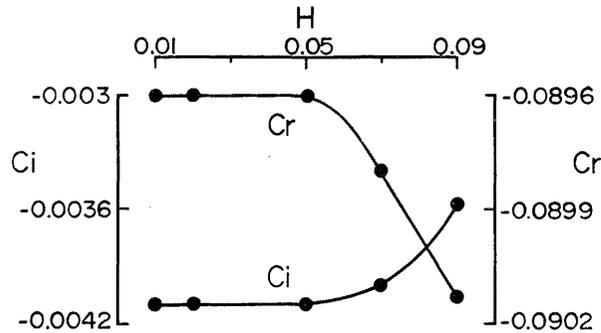


図 13 分割幅のチェック

$R = \text{const.}$  の断面における  $c_r, c_i$  (あるいは  $\alpha c_i$ ) の分布——いわゆる, “cross plot”——の例を図 9~12 に掲げる.  $R = \infty$  における, 対応する分布はすでに図 4, 5 に示した. なお, 図 13 は数値解法における  $y$  領域の分割幅 ( $H$ ) のチェックを示す. 安定図表の上のいくつかの点を適当に抽出し, このようなチェックを行なった.

J に対する中立曲線の  $R \rightarrow \infty$  の漸近枝の一つは, 図 4 で注目した  $\alpha_s = 1.5, c_r = c_i = 0$  なる点に入る. いいかえると, この特別な非粘性中立固有値に対する粘性の影響は中立曲線 J で表わされる. 図 6 あるいは図 7 に見られるように, この中立攪乱の波数は,  $R$  が臨界 Reynolds 数  $R_c$  に近づくにしたがって減少し, 実測値 ( $\approx \alpha_s/4$ ) に近づく; まさに Stuart が予測したとおりである. しかしながら, 同時に,  $c_r$  の値も  $R$  にしたがって変化し, 図 9 の例に見られるように,  $R_c$  の近くでは  $c_r$  はかなり大きな (負) の値をとり, 問題の渦現象の特性  $c_r = 0$  と一致しない. 結局, Stuart の示唆したように粘性を考慮すると, 波数は実測値に一致するが, 位相速度の食い違いがひどくなる. このことと, 自然条件のもとでは増幅率 zero の中立攪乱は観測にかかりにくいことから考えると, Stuart の与えた説明は適切でないように思われる.

$R = \text{const.}, c_r = 0$  に対して, 一般に二つの波数  $\alpha_s, \alpha_s' (\alpha_s > \alpha_s')$  が対応することはすでに指摘した. 今, 上のパラグラフに述べた理由から, より大きな増幅率 ( $\alpha c_i$ ) を持つ  $\alpha_s'$  に注目する. 特に興味があるのは K-プロファイルの場合である. 図 11, 12 に例示されるように, 増幅率がある程度大きくなる\*,  $R > R_c$  なる, 相当広範な  $R$  数領域において, この stationary mode の攪乱  $\alpha_s'$  は最も大きな増幅率

\* 図 10, 11, 12 の比較から,  $\alpha = \text{const.}$  とすると増幅率は  $R$  の増加関数であることがわかる.

を持つ。この波数 ( $\alpha_s' \approx 0.4$ ) 自身も実測値と一致する。なお、この計算例の K-プロファイルは、(4.3) 式で  $m=3.5$  としたものであるが、この  $m$  の値は何も特別な意味があるわけではなく、これに近い他の  $m$  の値 (例えば  $m=3.4$ ) を選んでもほぼ同様な安定特性が得られるようである。——これに反し、J-プロファイルに対する  $m=3.0$  は特別な値で、この場合に限り  $R=\infty$  で  $c_r=c_i=0$  なる攪乱が可能である——。

$m=3.5$  で代表されるような K-プロファイルの場合、 $R_c$  を越えた相当広範な  $R$  数領域において、 $\alpha_s' \approx 0.4$ ,  $c_r=0$  で、最大の増幅率をもつ攪乱が存在する。この種の攪乱をもって、観測される定常渦現象の説明とする方がより妥当ではないだろうか。ただし、K-プロファイルの実現する方向 ( $\epsilon$ ) は、回転円板の場合 (suction は含まない) について実測される渦の配置 (波数ベクトルの方向) と必ずしも一致しない:  $m=3.4$  とすると  $\epsilon=12.2^\circ$  となり、実測値  $\epsilon=13.3^\circ$  とほぼ 10% の違いがある。しかしながら、ここで用いたプロファイルは強い吸い込みを含む場合のものであることおよび定式化の過程にすでにいくつかの近似を導入していることから考えると、この程度の誤差は当然であろう。

## 5. 結 語

変曲点の位置によって区別される三種のプロファイル K', J, K の安定特性を、特に増幅攪乱の性質に重点をおき、粘性の影響も考慮して詳細に計算した。その結果、ある与えられた  $R$  数に対し、波数の異なる ( $\alpha_s, \alpha_s'; \alpha_s > \alpha_s'$ ) 二つの stationary mode ( $c_r=0$ ) の攪乱が存在することが明らかにされた。 $\alpha_s'$  の値は比較的  $R$  数の変化に対して鈍感でほぼ一定の値を示し、対応する増幅率は常に正である。特に K-プロファイルの場合、 $\alpha_s'$  なる波数の定常攪乱は、 $R > R_c$  なる広範な  $R$  数において最大の増幅率を示すことがわかった。

これらの計算結果を、三次元境界層流の遷移領域に特有な定常渦現象と対比して論じた。観測される渦現象は、J-プロファイルに固有な定常中立攪乱であるとする Stuart の説明に対し、ここでは、K-プロファイルの場合に可能な  $2\pi/\alpha_s'$  なる波長の定常増幅攪乱の方が、現象に対してより満足な説明を与えることを指摘した。

## 謝 辞

原稿の図面作成と浄書に全面的に援助して下さった小出正子嬢に対してお礼を申しのべる。

なお、本研究の数値計算は、九州大学大学計算機センターの FACOM 230-60 及び九州大学応用力学研究所の FACOM 270-20 を使用して行なわれた。

## 参 考 文 献

- 1) Gregory, N., Stuart, J. T. and Walker, W. S., Phil. Trans., A Vol. 248, 1955, p. 155.
- 2) Rosenhead, L., *Laminar Boundary Layers* (Oxford), 1963.
- 3) Lin, C. C., *The theory of hydrodynamic stability*. (Camb. Univ. Press), 1955.
- 4) Foote, F. R. and Lin, C. C., Quart. Appl. Math. 8, 1950, p. 265.
- 5) Miles, J. W., J. Fluid Mech. 8, 1960, p. 593.

(昭和 48 年 5 月 30 日 受理)