

壁のある乱れの統計理論について

大路, 通雄
信州大学工学部

<https://doi.org/10.15017/4743434>

出版情報：應用力學研究所所報. 26, pp.241-250, 1967. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



壁のある乱れの統計理論について*

大 路 通 雄**

平行平面枚の間の2次元定常剪断流に伴う乱れに対し、流れ方向(x)とスパン方向(z)の一樣性を仮定して、2点相関方程式およびその x, z 方向に関する2次元フーリエ変換をみちびく。次に、これらの2次元スペクトルを壁の近くで法線座標(y, y')のテイラー級数に展開し、運動学的条件を考慮して展開係数のはじめの数項につき運動方程式から要求される関係式を求めた。そのひとつの応用として、壁附近のレイノルズ応力の分布が従来予想されていたような y^3 則と異なり、 y^4 に比例する形となることが示される。

1. は し が き

管内の流れ、境界層の流れなど、固体壁をもつ流れの中の乱れに関しては、古く Osborne Reynolds 以来おびただしい数の研究が行なわれてきた。こゝでその詳細にふれる余裕をもたないが、現在では高度の実験技術によって乱れの構造が精密に測定される一方、初期の混合距離モデルや次元解析のような現象論から進んで、より基礎的な理論を見出だす方向に発展している。例えば、[7, 15]。一樣等方な乱れの統計理論 [1, 7] を壁のある場合に拡張する試みもそのひとつである。これは要するに乱れの場の統計的性質を Navier-Stokes 方程式に基いて解析しようとする立場であり、主流の勾配を考慮した取り扱い、Rotta[14], Burgers & Mitchner[2], Tchen[16], Deissler[3, 4], らによって始められた。しかし、今までのところ壁のある場合にふれたものは一、二の例を除けばきわめて少ない[12]。

他方、壁にごく近い層内の流れについて、早く Page & Townend[5] はその3次元性および不規則性が無視できない程度であることを光学的に見出だし、その後この事実は、管流に対しては Laufer [11], 境界層に対しては Klebanoff [10] らによって熱線測定の結果から定量的に裏づけられた。すなわち、ふつう粘性底層と呼ばれるこの部分の流れは決して単純な層流ではなく、すでに何らかの構造をもった乱れを含んでいるが、その研究はそれ自身の興味他に、壁からの拡散や熱伝達の見つもりに対しても重要である。

そこで、これらの問題への手がかりとして、この論文では、はじめに壁のある2次元平行剪断流の乱れに対し、等方な乱れの Kármán-Howarth 方程式に相当する基礎方程式をみちびき、ついで壁附近でのテイラー級数展開を用いて二、三の形式的な考察を行なった。たゞし、流体は非圧縮であるとし、さらに次の仮定をおく：

- (1) 壁はなめらかな平面で無限に広い。
- (2) 主流は定常な2次元平行流。

* 昭和41年9月、境界層・乱流京都シンポジウムにて講演。

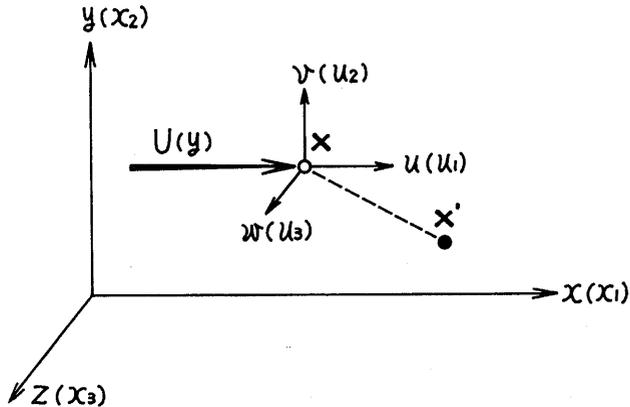
** 昭和42年4月より信州大学工学部(長野市若里)。

(3) 乱れの場の統計的性質も定常で壁からの距離のみに関係し、主流方向とスパン方向には一様である。

このような仮定は本来平行平板の間の流れに適當であるが、壁にきわめて近い層と限れば、管流や境界層の場合にも近似的に許されるであろう。

2. 相関とスペクトルの運動学

いま第 1 図に示すように座標軸をとり、主流を $U(y)$ 、ベクトルおよびテンソルの成分には添字記法を併用して、位置ベクトルを $\alpha \equiv (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ 、乱れ速度ベクトルを $u \equiv (u, v, w) \equiv (u_1, u_2, u_3)$ のように書く。平面 $y=0$ と $y=b$ が壁である。この流れの場の中に独立な点 α, α', \dots をとり、一様な乱れの理論 [1] にならって、これらの点に関する乱れ変動の相関 (より一般にはキュムラント) とそのフーリエ変換を考えるが、こゝでは前節の仮定 (3) のもとに、変換を特に x および z 方向だけにについて行ない、 y 方向はそのまゝに残しておく。従って、二重速度相関に対しては、



第 1 図

$\langle u_i(\alpha)u_j(\alpha') \rangle \equiv \langle u_i u_j' \rangle$ と略記する)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ij}(\alpha, \tau; y, y') \exp[i\alpha(x'-x) + i\tau(z'-z)] d\alpha d\tau \quad (2.1)^1$$

によって 2 次元スペクトル $\phi_{ij}(\alpha, \tau; y, y')$ が定義される。²⁾ こゝに $\langle \dots \rangle$ は平均値、 $i = \sqrt{-1}$ 、 α, τ はそれぞれ x, z 方向の波数をあらわす。

さらに、 $y=y'$ のとき、便宜上

$$\phi_{ij}(\alpha, \tau; y, y) \equiv \hat{\phi}_{ij}(\alpha, \tau; y) \quad (2.2)$$

1) 仮定 (3) から、 $\langle u_i u_j' \rangle$ は $x'-x, z'-z$ および y と y' の関数である。

2) 簡単のため $\phi_{ij}(\alpha, \tau; y, y')$ を誤解のおそれがない限り $\phi_{ij}(y, y')$ 、または単に ϕ_{ij} と書くことがある。

とおけば, $\alpha=\alpha'$ の場合として (2.1) から

$$\langle u_i u_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{ij}(\alpha, r; y) d\alpha dr = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{ji}(\alpha, r; y) d\alpha dr. \quad (2.3)$$

これは y だけの関数で, $-\rho \langle u_i u_j \rangle$ がレイノルズ応力を与える (ρ は密度).

また, (2.1) で α と α' を入れかえ, x, z 方向の一様性を考慮すると

$$\phi_{ij}(\alpha, r; y, y') = \phi_{ji}(-\alpha, -r; y', y) \quad (2.4)$$

が成り立ち, 速度が実数であることから, 複素共役を * で示して

$$\phi_{ji}(-\alpha, -r; y', y) = \phi_{ji}^*(\alpha, r; y', y) \quad (2.5)$$

が得られる. なお, (2.2), (2.4), (2.5) より直ちに

$$\hat{\phi}_{ij}(\alpha, r; y) = \hat{\phi}_{ji}^*(\alpha, r; y), \quad (2.6)$$

すなわち, $\hat{\phi}_{ij}$ はエルミート対称であるが, ϕ_{ij} 自身は一様な乱れの場合とちがってそうでない.

次に, 乱れの場合は xy 平面に関して統計的に対称と考えられるので, z 軸方向の反転に対し

$$\phi_{ij}(\alpha, r; y, y') = P \phi_{ij}(\alpha, -r; y, y') \quad (2.7)$$

である. たゞし, 二つの添字のどちらかひとつが3のとき $P=-1$, それ以外のとき $P=+1$ とするものとする.

同様に圧力-速度相関に対する2次元スペクトルを

$$\langle p u_j' \rangle = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{0j}(\alpha, r; y, y') \exp[i\alpha(x'-x) + i\tau(z'-z)] d\alpha dr \quad (2.8)$$

で定義すれば, $\pi_{0j}(\alpha, r; y, y')$ についても上の各式に相当する関係を容易に得ることができる.

連続の式 $\text{div} \mathbf{u}=0$ からみちびかれる条件は, 一対のベクトル演算子

$$\partial_i \equiv (-i\alpha, \partial/\partial y, -i\tau); \partial_i' \equiv (i\alpha, \partial/\partial y', i\tau) \quad (2.9)$$

を導入して

$$\partial_i \phi_{ij} = \partial_j' \phi_{ij} = \partial_j' \pi_{0j} = \partial_i \pi_{i0} = 0 \quad (2.10)$$

のように書くのが便利である (重複添字は 1, 2, 3 についての和をとる). こゝで ∂_i は第一の添字に, ∂_i' は第二の添字に作用させなければならない. 例えば $\partial_i' \phi_{ij} \neq 0, \partial_j \phi_{ij} \neq 0$ 等. 一様な乱れではこのような注意が不要であった.

この他に, 壁で流体がすべらないことから, $y=0$ または $y'=0$ で

$$\phi_{ij}(y, 0) = \phi_{ij}(0, y') = \pi_{0j}(y, 0) = \pi_{i0}(0, y') = 0. \quad (2.11)$$

これが壁のある乱れの本質的な特徴である. もちろん, もう一方の壁 $y=b$ または $y'=b$ でも同様の条件式が成り立つ.

以上の取り扱いを3点 $\alpha, \alpha', \alpha''$ に関する相関に拡張すれば

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j' u_k'' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ijk}(\alpha, \tau, \alpha', \tau'; y, y', y'') \\ &\quad \times \exp[\iota\alpha(x'-x) + \iota\tau(z'-z) + \iota\alpha'(x''-x) + \iota\tau'(z''-z)] d\alpha d\tau d\alpha' d\tau' \end{aligned} \quad (2.12)$$

などの表式が得られるが、特に $\alpha' \rightarrow \alpha$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} \langle u_i u_k u_j' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{(ik)j}(\alpha, \tau; y, y') \exp[\iota\alpha(x'-x) + \iota\tau(z'-z)] d\alpha d\tau; \\ \psi_{(ik)j}(\alpha, \tau; y, y') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ijk}(\alpha, \tau, \alpha', \tau'; y, y', y') d\alpha' d\tau' \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

となり、2点関数 $\psi_{(ik)j}$ が3点関数 ψ_{ijk} からみちびかれる。これらの3階テンソルに対する一般の運動学的条件を求めることも容易であるが、さし当っては2点関数について交換関係：

$$\begin{aligned} \psi_{(ik)j}(\alpha, \tau; y, y') &= \psi_{(ki)j}(\alpha, \tau; y, y') \\ &= \psi_{j(i)k}^*(\alpha, \tau; y', y) = \psi_{j(k)i}^*(\alpha, \tau; y', y), \end{aligned} \quad (2.14)$$

および非圧縮条件：

$$\partial_j' \psi_{(ik)j}(\alpha, \tau; y, y') = \partial_i \psi_{i(k)j}(\alpha, \tau; y, y') = 0 \quad (2.15)$$

を示すに止めよう。壁の条件は定義から自明であろう。

3. 運動方程式

長さの単位を流れの中 b 、速度の単位を摩擦速度 $U_\tau = [\nu(dU/dy)_{y=0}]^{1/2}$ (ν は動粘性係数)、圧力の単位を ρU_τ^2 にえらんで無次元表示を行なえば、乱れ速度 u に対する運動方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{R} \nu^2 u_i - U \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \frac{dU}{dx_2} u_2 \delta_{i1} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i u_2 \rangle}{\partial x_2} \quad (3.1)$$

と書ける [15]。ただし、 $R \equiv U_\tau b / \nu$ 、 δ_{ij} はクロネッカーの記号である。これと u' に対する同様な方程式とから通常の方法 [1] に従って $\langle u_i u_j' \rangle$ の方程式を作ると

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{R} (\nu^2 + \nu'^2) - \left(U \frac{\partial}{\partial x_1} + U' \frac{\partial}{\partial x_1'} \right) \right] \langle u_i u_j' \rangle &= \left[\frac{dU'}{dx_2'} \langle u_i u_2' \rangle \delta_{j1} + \frac{dU}{dx_2} \langle u_2 u_j' \rangle \delta_{i1} \right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial \langle p u_i' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u_i p' \rangle}{\partial x_j'} \right] + \left[\frac{\partial \langle u_i u_k u_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i u_k' u_j' \rangle}{\partial x_k'} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

こゝに、 $U' \equiv U(y')$ 、また乱れの定常性から $\partial \langle u_i u_j' \rangle / \partial t \equiv 0$ とおいた。方程式 (3.2) に (2.1)、(2.8)、(2.13) を代入し、2次元フーリエ変換を施せば、演算子：

$$Q \equiv \partial_k \partial_k + \partial_k' \partial_k' \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - 2\alpha^2 - 2\tau^2 \quad (3.3)$$

を用いて ϕ_{ij} に対する運動方程式：

$$\left[\frac{1}{R} Q + \iota\alpha(U - U') \right] \phi_{ij} = \left(\frac{dU'}{dy'} \right) \phi_{i2} \delta_{j1} + \left(\frac{dU}{dy} \right) \phi_{2j} \delta_{i1} + (\partial_i \pi_{0j} + \partial_j' \pi_{i0}) + [\partial_k \psi_{(ik)j} + \partial_k' \psi_{i(k)j}] \quad (3.4)$$

を得る。この式に θ_i をかけて縮約すれば非圧縮条件 (2.10) と (2.15) により

$$\theta_i \theta_j \pi_{0j} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \tau^2 \right) \pi_{0j} = 2i\alpha \left(\frac{dU}{dy} \right) \phi_{2j} - \theta_i \theta_k \psi_{(ik)j}. \quad (3.5)$$

さらに、二組の方程式 (3.4), (3.5) と連立して主流の運動方程式：

$$\frac{dU}{dy} = R \left[(1-2y) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{12}(\alpha, \tau; y) d\alpha d\tau \right] \quad (3.6)$$

をつけ加えたものが、いまの問題に対する2点方程式である。これらの式には3点相関に関係する項があらわれるから、一様な乱れの場合 (Kármán-Howarth 型の方程式) と同様に開いた方程式系であり、しかも未知関数として $U(y)$ をふくむ点で一層強い非線型性を示している。従ってその一般的な取り扱いは今後の研究にゆずり、以下では壁附近の層に対象を限ることとしよう。もっとも、前節の運動学的諸条件によって、各成分の方程式のすべてが独立なわけではなく、例えば、 ϕ_{11} , ϕ_{33} , ϕ_{31} , π_{01} , π_{03} の五つに注目して取り扱うことができる。

4. 壁附近のテイラー級数展開

壁面 $y=y'=0$ の近くを考え、 y, y' に関する二重テイラー級数：

$$\left. \begin{aligned} \phi_{ij}(\alpha, \tau; y, y') &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \phi_{ij}^{\lambda\mu}(\alpha, \tau) y^{\lambda} y'^{\mu}, \\ \pi_{0j}(\alpha, \tau; y, y') &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \pi_{0j}^{\lambda\mu}(\alpha, \tau) y^{\lambda} y'^{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

を仮定する。³⁾ そこで (2.4), (2.5), (2.7) を参照すれば、展開係数について

$$\phi_{ij}^{\lambda\mu}(\alpha, \tau) = \phi_{ji}^{\mu\lambda}(-\alpha, -\tau) = [\phi_{ji}^{\mu\lambda}(\alpha, \tau)]^* = P\phi_{ij}^{\lambda\mu}(\alpha, -\tau), \quad (4.2)$$

および

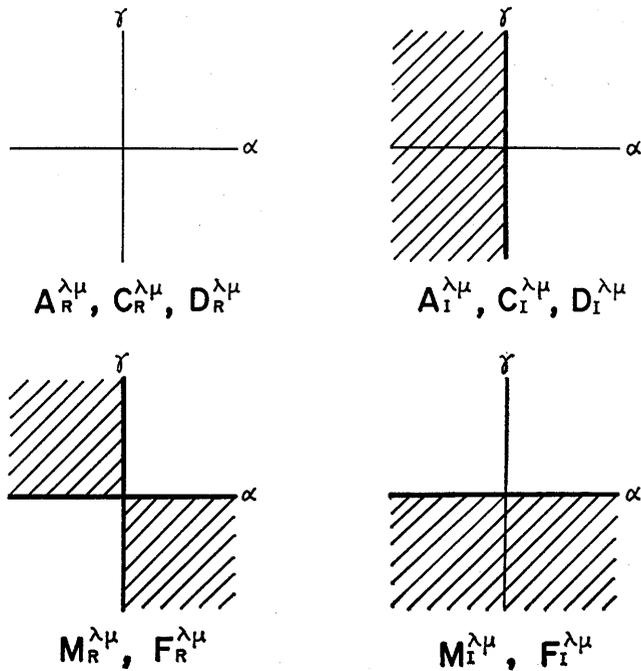
$$\pi_{0i}^{\lambda\mu}(\alpha, \tau) = \pi_{i0}^{\mu\lambda}(-\alpha, -\tau) = [\pi_{i0}^{\mu\lambda}(\alpha, \tau)]^* = P\pi_{0i}^{\lambda\mu}(\alpha, -\tau) \quad (4.3)$$

の関係が成り立たなければならない。ところで壁の条件 (2.11) と非圧縮条件 (2.10) から、展開のはじめのいくつかの項は消え、特に前節のおわりにあげた各成分に対しては

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11} &= yy' [A^{11} + (A^{21}y + A^{12}y') + \dots], \\ \phi_{33} &= yy' [C^{11} + (C^{21}y + C^{12}y') + \dots], \\ \phi_{31} &= yy' [M^{11} + (M^{21}y + M^{12}y') + \dots], \\ \pi_{01} &= y' [D^{01} + (D^{11}y + D^{02}y') + \dots], \\ \pi_{03} &= y' [F^{01} + (F^{11}y + F^{02}y') + \dots]; \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

のような展開が得られる。こゝに添字の繁雑をさけるため $\phi_{11}^{\lambda\mu}(\alpha, \tau) \equiv A^{\lambda\mu}$ 等とおいた。第2図は

3) この仮定が正しいかどうかは実は自明ではない。しかし乱れの実測結果からみると壁附近に特別な特異性は存在しないように思われる。こゝでは主流のいわゆる対数分布領域よりもさらに壁に近い層を考えているのである。



第 2 図

(4.2), (4.3) の条件からこれらの展開係数の実部 (R) および虚部 (I) に要求される対称性を α - γ 平面上に示したもので、図中斜線のある象限とない象限とで符号が反転することを意味している。⁴⁾ また、(4.2) の結果として $M^{\lambda\lambda}$ は一般に複素数であるが、 $A^{\lambda\lambda}$, $C^{\lambda\lambda}$ は常に実数である。

上記以外の成分は何れも (4.4) にふくまれた関数群を用いてあらわされ、その次数は、 y, y' の大きさの程度を h で代表させると、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \phi_{22} \sim O(h^4); \quad \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{23}, \phi_{32} \sim O(h^3); \\ \pi_{02}, \pi_{20} \sim O(h^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

となる。3重相関に由来する項は、同様の手続きで容易にたしかめられるように、2重相関の項よりも少なくとも1階次数が高く、展開 (4.4) の低次の項には直接寄与しない。さらに $U(0)=0$ の条件と方程式 (3.6) から、主流は

$$U(y) = R[(y-y^2) + U^{(4)}y^4 + O(y^5)] \quad (4.6)$$

の形に展開されるので、これを (4.4) と共に運動方程式系 (3.4), (3.5), (3.6) に代入すれば、低次の展開係数の間の関係が3重スペクトルに無関係に求められる筈である。⁵⁾ こうして多少の計算の後に次の結果に達する：

4) 従って図の大線上ではその関数は0となる。

5) 実際に計算する場合には、まず渦度相関のスペクトル方程式をみちびいた上で、これに代入する方が見通しがよい。

$$\left. \begin{aligned} U^{(4)} &= -\frac{1}{8} R \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r M_I^{11} d\alpha dr, \\ U^{(5)} &= \frac{1}{30} R \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha A_I^{21} - r(2M_I^{21} + 3M_I^{12})] d\alpha dr. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} M_I^{11} &= M_I^{22} = 0 \quad (\text{すなわち, } M^{11}, M^{22} \text{ は実関数}), \\ (2\alpha^2 + r^2)A^{11} + \alpha r M^{11} &= 6A_R^{31}, \\ (\alpha^2 + 2r^2)C^{11} + \alpha r M^{11} &= 6C_R^{31}, \\ \alpha r(A^{11} + C^{11}) + 3(\alpha^2 + r^2)M^{11} &= 6(M_R^{31} + M_R^{13}), \\ rA^{2\mu} &= \alpha M^{2\mu}, & rM^{\mu 2} &= \alpha C^{\mu 2}, \\ \alpha D^{0\mu} &= 2\alpha A^{2\mu}/R, & rF^{0\mu} &= 2\alpha C^{2\mu}/R, \\ D^{1\mu} &= \iota(\alpha A^{1\mu} + rM^{1\mu})/R, & F^{1\mu} &= \iota(\alpha M^{1\mu} + rC^{1\mu})/R, \\ \alpha D^{2\mu} &= \iota(\alpha^2 + r^2)A^{2\mu}/R, & rF^{2\mu} &= \iota(\alpha^2 + r^2)C^{2\mu}/R. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

(4.8)の後半では $\mu=1, 2, 3$ とし, (4.7) では第2図の対称性を考慮した. これらの関数は ϕ_{ij} に対し少なくとも $O(h^4)$, π_{0j} に対し同じく $O(h^3)$ までを与えるものである.

5. レイノルズ応力

上に求めた (4.8) の関係によって独立な展開係数の数はかなり少なくなるが, いまの段階でそれらの関数形自身をきめることはできない. しかも境界層などにおける実験結果からみると, 粘性底層の中での乱れはその外側の層の状態で支配されて受動的に定まると思わせる根拠がある [9]. この解釈をとれば, 粘性層の外側をふくめ方程式 (3.4), (3.5), (3.6) を流れの全領域にわたって解かない限り, 壁附近の定量的な議論はできないことになる. その意味では前節の解析はきわめて形式的なものであるが, ひとつの応用としてレイノルズ応力テンソル (実際はその逆符号) に相当する $\langle u_i u_j \rangle$ の展開形を吟味してみよう.

簡単のため, α - r 面での積分を

$$\left[\dots \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) d\alpha dr \quad (5.1)$$

と記号すると, ふたたび対称性と (4.8) を考慮して

$$\langle u^2 \rangle = [\phi_{11}] = [A^{11}] y^2 + 2 [A_R^{21}] y^3 + O(y^4), \quad (5.2)$$

$$\langle v^2 \rangle = [\phi_{22}] = \frac{1}{4} [\alpha^2 A^{11} + 2\alpha r M^{11} + r^2 C^{11}] y^4 + \frac{1}{3} [(\alpha^2 + r^2)(A_R^{21} + C_R^{21})] y^5 + O(y^6), \quad (5.3)$$

$$\langle w^2 \rangle = [\phi_{33}] = [C^{11}] y^2 + 2 [C_R^{21}] y^3 + O(y^4), \quad (5.4)$$

$$\langle uw \rangle = [\phi_{12}] = -\frac{1}{2} [r M_I^{11}] y^3 + \left[\frac{\alpha^2 - 2r^2}{6\alpha} A_I^{21} + \frac{\alpha}{2} C_I^{21} \right] y^4 + O(y^5), \quad (5.5)$$

$$\langle vw \rangle = [\hat{\phi}_{23}] = 0, \quad (5.6)$$

$$\langle wu \rangle = [\hat{\phi}_{31}] = 0. \quad (5.7)$$

このうち、 $\langle u^2 \rangle$ 、 $\langle v^2 \rangle$ 、 $\langle w^2 \rangle$ の形は運動学的条件からよく知られた通りであり、(5.6) と (5.7) は対称の条件から当然である [15]. ところが、 $\langle uw \rangle$ の第一項は (4.8) の第一式によって恒等的に 0 でなければならない. これに対し、第二項が 0 となる特別な理由は見出だされないから、いわゆるレイノルズ応力は、直観的な予想に反して y^3 でなく y^4 の項からはじまることになる. すなわち

$$\langle uw \rangle \sim O(y^4). \quad (5.8)$$

これは運動学的考察だけからはみちびかれない新しい結果である. あるいは、(5.2)、(5.3) と組み合わせると

$$\langle uw \rangle / (\langle u^2 \rangle \langle v^2 \rangle)^{1/2} \sim O(y) \quad (5.9)$$

となり、 u と v との相関は壁面で 0 で、壁からはなれると共にはじめ y に比例して増加することが分かる.

熱線測定 [10, 11] によれば、 $y \rightarrow 0$ のときむしろ $\langle uw \rangle \sim O(y)$ に近い傾向が得られているが、実際には (5.8) または (5.9) を検証できる程壁に近づいた測定は、熱線を用いる限りまず不可能であろう. 一方、管や境界層での乱流熱伝達の問題に関連して従来の y^3 則に疑問が持たれ [13]、さらに y^4 則を仮定すれば最も都合のよいことが報告されている [8]. しかし、その理論的根拠についてはこれまで明らかにされていなかった.

なお、(4.7) に於いては、(5.8) をみちびいたのと同じ理由で $U^{(4)} = 0$ であり、従って層流解とのちがいは y^5 に比例する項からはじまるものである. また、乱れの渦動粘性係数を $\varepsilon(y)$ とすれば、(4.6) と (5.8) から

$$\varepsilon = - \frac{\langle uw \rangle}{dU/dy} \sim O(y^4) \quad (5.10)$$

が得られる. ε それ自身ではないが、これと同程度の量とみなされる渦動拡散係数について最近 Hanratty [6] が電気化学的な方法で y^4 則を直接実験的に得ていることは興味深い.

ついでに、渦度の変動について簡単にふれる. 乱れ渦度を $\text{curl} \mathbf{u} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ とおくと、さきの展開に対応して

$$\langle \xi^2 \rangle = [C^{11}] + 4 [C_R^{21}] y + O(y^2), \quad (5.11)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = [\gamma^2 A^{11} - 2\alpha r M^{11} + \alpha^2 C^{11}] y^2 + O(y^4), \quad (5.12)$$

$$\langle \zeta^2 \rangle = [A^{11}] + 4 [A_R^{21}] y + O(y^2), \quad (5.13)$$

$$\langle \xi \eta \rangle = -2 \left[\frac{\gamma^2}{\alpha} A_1^{21} - \alpha C_1^{21} \right] y^2 + O(y^4), \quad (5.14)$$

$$\langle \eta \zeta \rangle = \langle \zeta \xi \rangle = 0 \quad (5.15)$$

であることが示される. こゝでも $\langle \xi \eta \rangle$ の第一項 (y に比例する) は 0 となって、 $\langle uw \rangle$ の場合と同

様の事情があること、および $\langle \eta^2 \rangle$ には ν^3 の項が欠けていることを注意しておこう。

6. む す び

以上、壁のある乱れの統計理論に対する準備として、特別なモデルあるいは仮説をおかないで得られる二、三の基本的性質を述べた。ふつうは一様でない乱れを取り扱う場合にも3次元スペクトルを用いるが [2, 3, 12], こゝでは x, z 方向の一様性を重くみてフーリエ変換をその方向に限ったことが特色である。さらに、壁の近くでは非圧縮性と壁面条件による運動学的制約がきびしいけれども、それだけでは乱れを規定するに不十分で、力学的関係の介入する一例を示した。しかし、定量的な結果を得るためには何等かの形で基礎方程式 (3.4), (3.5), (3.6) そのものを処理する必要があり、それは今後に残された課題である。

この研究に当っては文部省科学研究費総合研究の援助をうけ、また東京大学宇宙航空研究所の谷一郎教授、および Johns Hopkins 大学の L. S. G. Kovaszny 教授から有益な示唆を頂いたことを附記して深謝の意を表したい。

おわりに、永年にわたり流体力学、特に乱流理論について終始御指導とはげましを賜った九州大学名誉教授栗原道徳先生に厚く御礼申し上げます。

文 献

- [1] Batchelor, G. K., *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press (1953).
- [2] Burgers, J. M. & Mitchner, M., On homogenous nonisotropic turbulence connected with a mean velocity gradient. I, II. *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **B56** (1953) 228, 343.
- [3] Deissler, R. G., Effects of inhomogeneity and of shear flow in weak turbulent fields. *Phys. Fluids* **4** (1961) 1187.
- [4] Deissler, R. G., Problem of steady-state shear-flow turbulence. *Phys. Fluids* **8** (1965) 391.
- [5] Fage, A. & Townend, H. C. H., An examination of turbulent flow with an ultramicroscope. *Proc. Roy. Soc.* **A135** (1932) 656.
- [6] Hanratty, T. J., A study of turbulence close to a solid wall (*abstract*). *IUGG-IUTAM Symposium on Boundary Layers and Turbulence Including Geophysical Applications, Kyoto* (1966) 39.
- [7] Hinze, J. O., *Turbulence*. McGraw-Hill Inc. (1959).
- [8] Kestin, J. & Richardson, P. D., Heat transfer across turbulent incompressible boundary layer. *Engineering Paper, Brown Univ.* A7-7749/1(1961).
- [9] Kistler, A. L., The structure of laminar sublayer. *The Mechanics of turbulence*. Gordon and Breach Inc. (1964) 287.
- [10] Klebanoff, P. S., Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *N. A. C. A. Tech. Notes* 3178 (1954).
- [11] Laufer, J., The structure of turbulence in fully developed pipe flow. *N. A. C. A. Rep.* 1174 (1955).
- [12] Lumley, J. L., Spectral energy budget in wall turbulence. *Phys. Fluids* **7** (1964) 190.
- [13] Reichart, H., Vorständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung

- in glatten Leitungen. *Z. angew. Math. u. Mech.* **31** (1951) 208.
- [14] Rotta, J., Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Z. Phys.* **129** (1951) 547.
- [15] Townsend, A. A., *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press (1956).
- [16] Tchen, C. M., On the spectrum of energy in turbulent shear flow. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **50** (1953) 51.

(昭和 42 年 3 月 3 日 受理)