

## 基底部よりのエネルギー散逸による弾性柱の横振動の減衰について

栖原, 寿郎

<https://doi.org/10.15017/4743411>

---

出版情報：應用力學研究所所報. 22, pp.35-44, 1963. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：



## 基底部よりのエネルギー散逸による弾性柱の 横振動の減衰について

栖 原 寿 郎

### 緒 言

弾性柱がその一端を半無限に大きいと考えられる弾性体に固着されて、縦あるいは横振動を行なう場合にその振動減衰の原因には、例えば空気抵抗とか、材料の固体内部粘性等が考えられるが、もう一つの原因として弾性柱の振動エネルギーがその固着部を通つて外部の半無限体に弾性波として伝つてゆくための減衰がある。この原因による減衰率を求めることは、特定の振動実験で必要になることもあるが、特に煙突其他の罫状構造物の振動を問題とする場合この減衰率の推定が先ず必要となる。

本報告は以上の目的のために、円罫の一端面を半無限弾性体に固着させ、横振動を行なわしめた場合の、固着部からの振動エネルギーの散逸による減衰率を求め、簡単な近似式であらわしたものである。その結果によると、円罫の弾性常数に比べて、外部の弾性常数が小さい場合にはこの原因による減衰が他の原因によるものと比べて無視出来ない事もあり得ることがわかつた。この事は罫状構造物の振動を問題とする場合には一応注意しなければならぬものと思われる。尚本報告は著者が既に行なつた縦振動の減衰に関する理論解析<sup>1)</sup>と同様な方法によつて解析された結果である。本研究を行なうに当り有益な御教示をいただいた阪大千田香苗教授に厚く御礼申上げる次第である。

### I. 罫状体の横振動方程式

第1図に示すごとき罫状体の振動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

又境界条件として

$$x=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 \left\{ y, EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right\} = 0, \\ \Phi_2 \left\{ \frac{\partial y}{\partial x}, EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right\} = 0, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$x=l \quad \left\{ \begin{array}{l} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

ただし  $E, \rho g, A, I$  は夫々罫状体のヤング率, 単位体積の重さ, 断面積および断面二次モーメントをあらわす. 又  $\Phi_1, \Phi_2$  は罫状体と地面との結合条件によつてきまる関数である.

II. 罫状体基底部結合条件の決定

罫状体基底部下面に働く剪断力および曲げモーメントを夫々  $S_0, M_0$  であらわし, この面の応力分布を第 2 図に示す様に考える. すなわち剪断応力は基底部に一樣に分布し, 又垂直応力は原点を通る直線分布をするものとし, 夫々を次の様にあらわす.

$$\begin{aligned} \text{剪断応力} &= \begin{cases} C_S(t), & \xi^2 + \eta^2 < a_0^2, \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 > a_0^2, \end{cases} \\ \text{垂直応力} &= \begin{cases} C_N(t)\xi, & \xi^2 + \eta^2 < a_0^2, \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 > a_0^2, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

こゝで  $a_0$  は基底部の半径をあらわす.

これらの力による半無限体の原点 0 の変位および回転を罫状体の基部の変位および回転に等しいとおく.

1. 半無限体の弾性波動方程式および境界条件

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

ただし  $\rho_0 g$  は密度,  $\lambda, \mu$  は Lamé の常数,  $\mathbf{u}$  は変位. 又剪断力, 垂直力によつて生ずる変位を夫々  $\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_N$  とし

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_N. \quad (2.3)$$

$\mathbf{u}_S = \text{grad} \phi_S + \text{rot} \mathbf{A}_S, \mathbf{u}_N = \text{grad} \phi_N + \text{rot} \mathbf{A}_N$  とおけば

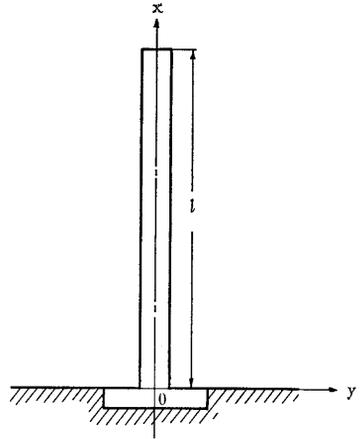
(2.2) 式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_{S,N} - h^2 \frac{\partial^2 \phi_{S,N}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{A}_{S,N} - j^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{S,N}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

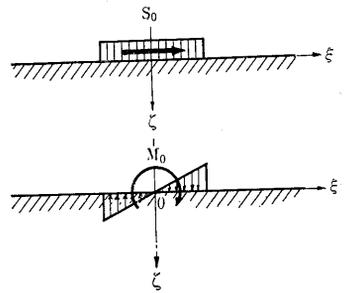
ただし  $h^2 = \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}, j^2 = \frac{\rho_0}{\mu}$  である.

次に境界条件は,  $\xi, \eta, \zeta$  の方向を第 2 図の如くとると

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 0: \lambda \text{div} \mathbf{u}_S + 2\mu \frac{\partial u_{S\zeta}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \mu \left( \frac{\partial u_{S\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{S\zeta}}{\partial \zeta} \right) &= \begin{cases} C_S(t), & \xi^2 + \eta^2 < a_0^2, \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 > a_0^2, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$



第 1 図



第 2 図

$$\left. \begin{aligned}
 & \mu \left( \frac{\partial u_{S\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{S\eta}}{\partial \xi} \right) = 0, \\
 \text{又 } \quad \zeta = 0 : \quad & \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_N + 2\mu \frac{\partial u_{N\xi}}{\partial \zeta} = \begin{cases} C_N(t)\xi, & \xi^2 + \eta^2 < a_0^2, \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 > a_0^2, \end{cases} \\
 & \mu \left( \frac{\partial u_{N\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{N\eta}}{\partial \zeta} \right) = 0, \\
 & \mu \left( \frac{\partial u_{N\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{N\eta}}{\partial \zeta} \right) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

(2.4)~(2.6) の解を求めるため、此等の方程式に Laplace の変換をほどこしておく。この場合の変数をそれぞれ  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{C}$  のごとくあらわす。すなわち

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{f}(p) &= p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \\
 f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) \frac{dp}{p}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

(2.4) の解は

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\phi} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \bar{\phi}(\alpha, \beta) e^{-r\xi + i\alpha\xi + i\beta\eta} d\alpha d\beta, \\
 \bar{A} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \bar{A}(\alpha, \beta) e^{-r'\xi + i\alpha\xi + i\beta\eta} d\alpha d\beta,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

ここで  $r = \sqrt{p^2 h^2 + \alpha^2 + \beta^2}$ ,  $r' = \sqrt{p^2 j^2 + \alpha^2 + \beta^2}$ .

現在を考えている問題では (2.7) の第二式において  $p=0$  の近傍を除いて  $C=0$  としても差支えない。即ち  $p$ -面の虚軸の右半面上には特異点がないと考えられるからである。そこで

$$p^2 j^2 = -\omega^2, \quad (\omega \text{ は real}) \quad (2.9)$$

とすることが出来る。又弾性波が  $\zeta$  の正の方向のみに伝わり  $\zeta \rightarrow \infty$  で有限であるための条件として

$$\left. \begin{aligned}
 r &= \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \nu^2 \omega^2}, & \text{ただし } \omega^2 \nu^2 < \alpha^2 + \beta^2, \\ i\sqrt{\nu^2 \omega^2 - \alpha^2 - \beta^2}, & \text{ただし } \omega^2 \nu^2 > \alpha^2 + \beta^2, \end{cases} \\
 r' &= \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2}, & \text{ただし } \omega^2 < \alpha^2 + \beta^2, \\ i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2}, & \text{ただし } \omega^2 > \alpha^2 + \beta^2, \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

のごとく  $r, r'$  の branch をとらなければならない。ただし

$$\nu^2 = \frac{h^2}{j^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.11)$$

以上の式を用いて原点 0 における変位と回転を求めると

$$\bar{u}_{S\xi} = \frac{-a_0 \bar{C}_S}{2\mu} \int_0^\infty \frac{(2S^2 + p^2 j^2)^2 - 4S^2 \sqrt{S^2 + p^2 h^2} \sqrt{S^2 + p^2 j^2} + p^2 j^2 (S^2 + p^2 j^2)}{\sqrt{S^2 + p^2 j^2} D(S)} J_1(a_0 S) dS, \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{N\eta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{N\xi}}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_{N\zeta}}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{a_0^2 \bar{C}_N}{2\mu} \int_0^\infty \frac{p^2 j^2 S \sqrt{S^2 + p^2 h^2}}{D(S)} J_2(a_0 S) dS, \end{aligned} \quad (2.12)$$

ただし  $D(S) = (2S^2 + p^2 j^2)^2 - 4S^2 \sqrt{S^2 + p^2 h^2} \sqrt{S^2 + p^2 j^2}$ .

ここで  $\bar{u}_{S\eta} = \bar{u}_{S\xi} = \bar{u}_{N\eta} = \bar{u}_{N\xi} = 0$ ,

$$\bar{\omega}_{S\xi} = \bar{\omega}_{S\zeta} = \bar{\omega}_{N\xi} = \bar{\omega}_{N\zeta} = 0,$$

であり, 又  $\bar{u}_{N\xi}$ ,  $\bar{\omega}_{S\eta}$  はそれぞれ  $\bar{u}_{S\xi}$ ,  $\bar{\omega}_{N\eta}$  に比べて小さいと考えて無視する.

## 2. (2.12) の積分

(2.12) の第 1 式を書き直すと

$$\begin{aligned} \bar{u}_{S\xi} &= \frac{a_0 \bar{C}_S}{2\mu} \left[ - \int_0^\infty \frac{J_1(a_0 S)}{\sqrt{S^2 + p^2 j^2}} dS - \frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_0^\infty \frac{J_1(a_0 S)}{S} dS \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_0^\infty \frac{\varphi(S)}{S} J_1(a_0 S) dS \right], \\ \varphi(S) &= 1 - \frac{2(1-\nu^2)p^2 j^2 \sqrt{S^2 + p^2 j^2} \cdot S}{(2S^2 + p^2 j^2) - 4S^2 \sqrt{S^2 + p^2 j^2} \sqrt{S^2 + p^2 h^2}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

上式の [ ] 内の第 1 項, 第 2 項は容易に積分出来てそれぞれ  $\frac{1}{a_0 p j} [e^{-a_0 p j} - 1]$ ,  $-\frac{1}{2(1-\nu^2)}$  に等しい. 第 3 項を  $I$  であらわすと,

$$I = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_0^\infty \varphi(S) \cdot \frac{J_1(a_0 S)}{S} dS.$$

(2.9) より  $p^2 j^2 = -\omega^2$  とおき

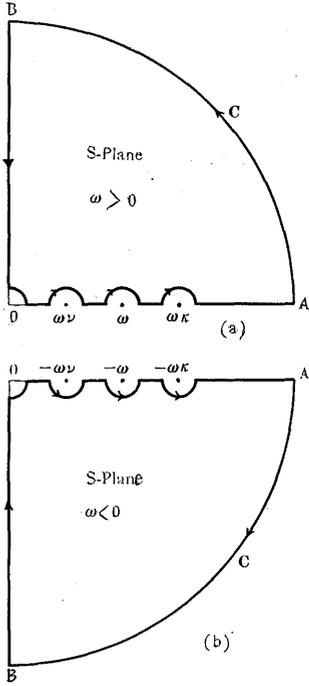
$$J_1(a_0 S) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(-t) \left(\frac{a_0}{2}\right)^{1+2t} S^{1+2t}}{\Gamma(2+t)} dt,$$

より<sup>2)</sup>  $I$  を書き直すと,

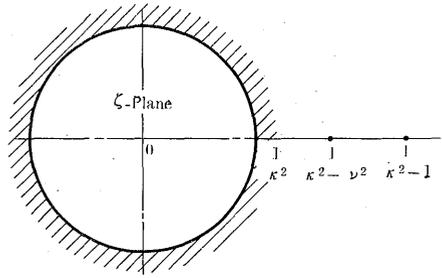
$$I = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(-t) \left(\frac{a_0}{2}\right)^{1+2t}}{\Gamma(2+t)} dt \int_0^\infty \varphi(S) S^{2t} dS. \quad (2.14)$$

(2.14) に含まれる積分  $\int_0^\infty \varphi(S) S^{2t} dS$  を行なうためには  $\varphi(S)$  の性質がわからなければならない. 即ち  $\varphi(S)$  は  $S = \pm \omega \nu$ ,  $\pm 1$  に branch point をもち  $\pm \omega \kappa$  に simple pole をもつ以外に特異点はない. 故にこの積分は第 3 図に示す contour 積分を行なう事によつて求められる. ここで分岐点  $\pm \omega \nu$ ,  $\pm \omega$  のまわり方は (2.10) 式から決定される. すなわち

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(S) S^{2t} dS &= \frac{2\pi i (1-\nu^2) \sqrt{\kappa^2 - 1} (\omega \kappa)^{2t+1}}{A(\kappa)} + \int_0^\infty \varphi(S) S^{2t} dS, \\ A(\kappa) &= 4\kappa \left\{ 2(2\kappa^2 - 1) - 2\sqrt{\kappa^2 - 1} \sqrt{\kappa^2 - \nu^2} - \kappa^2 \left( \frac{\sqrt{\kappa^2 - \nu^2}}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} + \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\sqrt{\kappa^2 - \nu^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$



第 3 図



第 4 図

上式の右辺第 2 項の積分を行なうために変換

$$\zeta = \frac{\omega^2}{\kappa^2 \omega^2 - S^2}, \quad (2.16)$$

を行なうと、 $S$ -面の虚軸は $\zeta$ -面の実軸 $(0 - \frac{1}{\kappa^2})$ に対応し、(第 4 図)、 $\varphi(S) = \Psi(\zeta)$  は $\zeta$ -面内で原点 0 を中心とし半径  $\frac{1}{\kappa^2}$  の円内で analytic である。従つて

$$\Psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n, \quad (2.17)$$

となり、これを (2.15) に代入して項別積分を行なえば結局

$$\int_0^{\infty} \varphi(S) S^{2t} dS = \frac{2\pi i (1-\nu^2) \sqrt{\kappa^2 - 1} (\omega \kappa)^{2t+1}}{A(\kappa)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \frac{\Gamma(n-t+\frac{1}{2}) \Gamma(t+\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+1) \cdot \kappa^{2n+2}} (i\omega \kappa)^{2t+1}.$$

更にこれを (2.14) 式に代入すれば

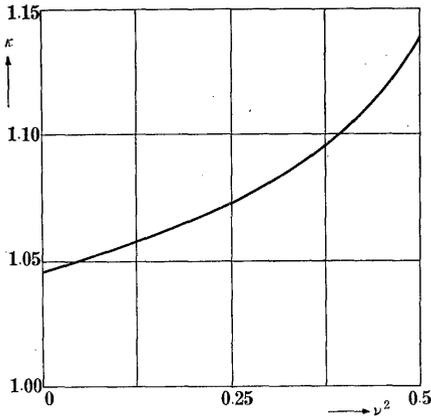
$$I = \frac{\pi i \sqrt{\kappa^2 - 1}}{A(\kappa)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m \left(\frac{1}{2} \omega a_0 \kappa\right)^{1+2m}}{m! \Gamma(m+2)} + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \frac{\kappa^{-2n-2}}{2\Gamma(n+1)} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2}) \Gamma(n-m+\frac{1}{2})}{m! \Gamma(2+m)} \left(\frac{i\omega a_0 \kappa}{2}\right)^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n-m-\frac{1}{2}) \Gamma(n+m+1)}{m! \Gamma(n+m+\frac{5}{2})} \left(\frac{i\omega a_0 \kappa}{2}\right)^{2n+2m+2} \right].$$

これを用いて (2.13) の積分を  $p$  の巾級数であらわすと

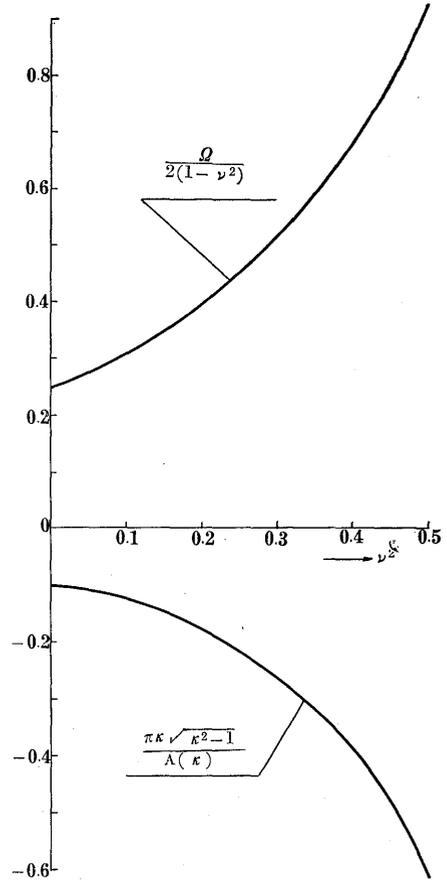
$$\bar{u}_{S\zeta} = \frac{a_0}{2\mu} \left[ -\frac{1}{2(1-\nu^2)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n (a_0 j)^n}{(n+1)!} \cdot p^n + \frac{\pi \sqrt{\kappa^2 - 1}}{A(\kappa)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \kappa a_0 j\right)^{1+2n}}{n! \Gamma(2+n)} \cdot p^{1+2n} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \cdot \frac{\kappa^{-2(n+1)}}{2\Gamma(1+n)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\kappa a_0 j\right)^{1+2m}}{m!\Gamma(2+m)} \cdot p^{1+2m} \right. \\
 & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-n-m-\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)\left(\frac{1}{2}\kappa a_0 j\right)^{2+2n+2m}}{m!\Gamma\left(n+m+\frac{5}{2}\right)} \cdot p^{2+2n+2m} \right\} \bar{C}_0,
 \end{aligned}$$

となる。これを (2.7) によつて逆変換をほどこし  $\dot{C}_0$  の項までをとり  $\ddot{C}_0$  およびそれより高い時間微係数を含む項は小さいものとして省略すると、求める  $u_{S\xi}$  は次のようになる。



第 5 図



第 6 図

$$u_{S\xi} = \alpha_s + \varepsilon \frac{dS_0}{dt},$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_s &= -\frac{(1+\sigma_0)(2-\sigma_0)}{\pi a_0 E_0} \\
 \varepsilon &= \frac{(1+\sigma_0)^{3/2} \rho_0^{1/2}}{\sqrt{2} \pi E_0^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{\Omega}{2(1-\nu^2)} + \frac{\pi \kappa \sqrt{\kappa^2-1}}{A(\kappa)} \right\}, \\
 \Omega &= \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{2(1-\nu^2)y\sqrt{y^2+1}}{(2y^2+1)^2 - 4y^2\sqrt{y^2+1}\sqrt{y^2+\nu^2}} \right\} dy.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$E_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\rho_0 g$  は夫々半無限体のヤング率, ポアソン比, 単位体積の重量をあらわす.  
 又  $\Omega$  は容易に数値的に積分出来  $\frac{\Omega}{2(1-\nu^2)}$  の値を第 6 図に示す. 又  $\frac{\pi\kappa\sqrt{\kappa^2-1}}{A(\kappa)}$  の値も同図  
 に示してある. 又第 5 図は  $\kappa$  の値を示す.

同様な方法で  $\bar{\omega}_{N\eta}$  を求めると

$$\bar{\omega}_{N\eta} = \beta_m \bar{M}_0 + O(\omega^3).$$

Laplace の逆変換を行ない

$$\left. \begin{aligned} \omega_{N\eta} &= \beta_m M_0, \\ \beta_m &= \frac{4(1+\sigma_0)(1-\sigma_0)}{\pi a_0^3 E_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

### III. 塊状体の振動

#### 1. 基礎方程式と解

(1.1), (1.2), (1.3) 式にかえり (1.2) に前節の (2.18), (2.19) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \\ x=0: &\left\{ \begin{aligned} y &= \alpha_s \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \beta_m \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right. \\ x=l: &\left\{ \begin{aligned} EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

これを積分方程式にかき直し

$$y(x, t) = -\epsilon \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( EI \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \right]_{\xi=0} - \int_0^l \rho A G(x, \xi) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} d\xi, \quad (3.2)$$

ただし

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(\xi)}{\lambda_n^2}, \quad (3.3)$$

で  $u_n$  は次の (3.4), (3.5), (3.6) 式を満足していなければならない.

$$\left. \begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right) - \lambda_n^2 \rho A u_n = 0, \\ x=0 &\left\{ \begin{aligned} u_n &= \alpha_s \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right), \\ \frac{du_n}{dx} &= \beta_m EI \frac{d^2 u_n}{dx^2}, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$x=l : \left\{ \begin{array}{l} EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} = 0, \\ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right) = 0, \end{array} \right. \right.$$

$$u_n = \lambda_n^2 \int_0^l \rho AG(x, \xi) u_n(\xi) d\xi, \quad (3.5)$$

$$\int_0^l \rho Au_n(x) u_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (3.6)$$

$y(x, t)$  を  $u_n(x)$  で展開すると

$$\left. \begin{array}{l} y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) u_n(x), \\ y_n(t) = \int_0^l \rho Au_n(x) y(x, t) dx. \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

(3.3), (3.7) を積分方程式 (3.2) に代入して  $u_n(x)$  の項を等しいとおけば

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + \lambda_n^2 y_n + \varepsilon U_n \left[ \sum_{i=0}^{\infty} U_i \frac{dy_i}{dt} \right] = 0, \\ \text{ただし } U_n = \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right) \right]_{x=0}. \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

今  $y_n = C_n e^{pt}$  とおくと,  $p$  は次に示す無限行列式の根となる.

$$\left| \begin{array}{cccc} p^2 + \varepsilon U_0^2 p + \lambda_0^2 & \varepsilon U_0 U_1 p & \varepsilon U_0 U_2 p & \cdots \\ \varepsilon U_1 U_0 p & p^2 + \varepsilon U_1^2 p + \lambda_1^2 & \varepsilon U_1 U_2 p & \cdots \\ \varepsilon U_2 U_0 p & \varepsilon U_2 U_1 p & p^2 + \varepsilon U_2^2 p + \lambda_2^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right| = 0. \quad (3.9)$$

$\varepsilon U_n U_m p$  は  $\lambda_n$  があまり大きくない時は  $p^2 + \varepsilon U_n^2 p + \lambda_n^2$  に比べて非常に小さい故, 上式は近似的に

$$\prod_{n=0}^{\infty} (p^2 + \varepsilon U_n^2 p + \lambda_n^2) = 0, \quad (3.10)$$

と考えてよい. 故に

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\varepsilon}{2} U_n^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \varepsilon^2 U_n^4 - \lambda_n^2} \\ &\doteq -\frac{\varepsilon}{2} U_n^2 \pm i \lambda_n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

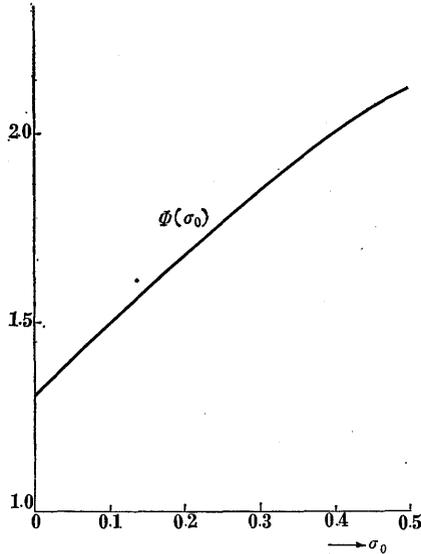
$-\frac{\varepsilon}{2} U_n^2$  が減衰を与える. 従つて対数減衰率は

$$D = \pi \varepsilon \frac{U_n^2}{\lambda_n}, \quad \left. \right\}$$

ただし

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\rho_0^{1/2}}{E_0^{3/2}} \Phi(\sigma_0), \\ U_n = \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right) \right]_{x=0}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

$\Phi(\sigma_0)$  は第7図に示す



第 7 図

2. 一様断面構体の場合の減衰率の近似計算式

(3.12) 式の  $U_n$  を求める場合、半無限体の弾性率が構体の弾性率に比べてあまり小さくない場合、即ち構体基部の変位が小さい場合は (3.4) 式を用いる代わりに一端固定の一樣棒の横振動の固有関数をそのまま用いて  $\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right)$  を求めても大きなあやまりはない。即ち (3.4) で  $\alpha_s = 0, \beta_m = 0$  とおけばよい。この場合

$$\left. \begin{array}{l} U_n^2 = \frac{4E^2 I^2 n^7}{\rho A} B(n), \\ B(n) = \frac{1}{\left( \frac{\cos n + \cosh n}{\sin n - \sinh n} \right)^2 \{ n + (\cos n - \cosh n)(\sin n - \sinh n) \}} \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

さらに  $\lambda_n = \frac{EI n^4}{\rho A l^4}$  であるから対数減衰率  $D$  は (3.12) より

$$D = 2\sqrt{2} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{3/2} \frac{I^{3/2}}{A^{1/2} l^5} \Gamma(n) \Phi(\sigma_0), \quad (3.14)$$

ただし

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(n_1) = 1.251 \text{ (第1次振動)} \\ \Gamma(n_2) = 0.748 \text{ (第2次振動)} \\ E_0, \sigma_0, \rho_0 g \text{ は夫々半無限体のヤング率, ポアソン比, 単位体積の重量} \end{array} \right.$$

$E, \rho g, l, A, I$  は夫々構体のヤング率, 密度, 長さ, 断面積, 断面二次モーメント  
 $\Phi(\sigma_0)$  は第 7 図に示す値

である。

次に数値計算例を示す。

(1) 鋼台上に立てた鋼棒の場合

棒の直径 : 2 cm, 長さ : 10 cm,  $E = E_0 = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\rho g = \rho_0 g = 7.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ,  $\sigma_0 = \frac{1}{3}$ ,

$$D = 1.7 \times 10^{-3}.$$

(2) 砂盤上の鋼製薄肉円筒の場合

筒の直径 : 80 cm, 板厚 : 1.5 cm, 高さ : 800 cm,  $E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\rho g = 7.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

砂盤のヤング率  $E_0 = 200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ , 密度  $1.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ , ポアソン比  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ ,

$$D = 0.089.$$

#### 文 献

- 1) T. Suhara : A Study on the Damping of Longitudinal Vibration of an Elastic Cylinder. Rep. Res. Inst. Elasticity Eng. Kyushu Univ. Vol. VII, No. 3, 1951.
- 2) G. N. Watson : Theory of Bessel Functions. Cambridge Univ. Press. 1922, p. 192.

(昭和 39 年 1 月 20 日受理)