

$u^{<27/7>}$, $u^{<-23/7>}$ の数表 : 補遺 その3

水文学研究委員会

<https://doi.org/10.15017/4743409>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 22, pp.7-33, 1963. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



$u^{27/7}$, $u^{-23/7}$ の数表 (補遺 その3)

応用力学研究所 水文学研究委員会

MILLIKAN の方法による定常状態の乱流境界層の近似計算を更に簡便にするためさきに作製、発表した“ $u^{27/7}$, $u^{-23/7}$ ($u = 0.500 \sim 1.500$) の数表” (所報, 第5号, 昭和29年) を使って次の計算を実行した.

1) 滑らかな板に沿って直線的に加速される簡単な2次元流速分布の2種類を仮定し, 各々について, 上記の数表を用い, 数値積分によつて境界層の厚さを計算した. その際, 板に沿う無次元座標の刻み Δx を充分細かにとれば, その結果が MILLIKAN の公式を直接厳密に積分して得られる値と殆ど完全に一致することを示して, 同上 (補遺 その2) (所報, 第18号, 昭和36年) に引き続き, 間接乍ら, 数表の検算の1部に資した.

2) 上の2つの場合について, $\Delta u_1 = \Delta x/2$ をいろいろに変えて計算を行ない, $\Delta u_1 = 0.24$ に到達するまで, 境界層の近似計算に含まれる数値積分の精度が実用的にはほぼ十分に保たれることを証明した. 但し, u_1 は無次元速度, Δu_1 は Δx に対応するその刻みである. 更にこの結果をもとにして, 一般の流速分布 (加速) に対して境界層の計算を実行するに当つても, 適当な Δu_1 の大きさを容易に定め得ることを示唆した.

3) 上の加速分布の1つについて, 排除厚, 表面摩擦応力, 及びパラメータ I' を板に沿う各点で計算した. 更に加速領域に於ける MILLIKAN の方法自体の精度を吟味する目的で, HOWARTH の方法 (*Proc. Roy. Soc.*, 1935), と SQUIRE 及び YOUNG の方法 (*R. & M.*, 1937) との両者を使って同じ諸量を計算し, MILLIKAN の方法が他の2つの方法のほぼ中間の値を与えることを示した. これは唯1つの比較計算例に過ぎないが, その結果が一般的であるという仮定に基づいて, 加速領域に対して, MILLIKAN の方法が概ね妥当な数値を与えるであろうという予想を述べた.

4) 附録, その1に於て, 加速領域と減速領域とを交互に持つ流れの例として, 板に沿って正弦波型で変化する速度成分を一樣な基本流の上に重ね合わせて生じる定常な流れの場を考察した. その様な速度分布のもとで発達する乱流境界層の厚さを数表を利用して計算し, 速度分布に於ける波型の攪乱が境界層に及ぼす影響を論じた. 同じく, その2に於ては層流境界層に対して同じ問題を取り上げた.

1. 序 言

さきに委員会は滑らかな表面に沿う定常状態の乱流境界層 (2次元及び軸対称) の実用的な近似計算に便利であると思われる C. B. MILLIKAN の方法を紹介し,¹⁾ 併わせて計算に

1) MILLIKAN, C. B., The Boundary Layer and Skin Friction for a Figure of Revolution, *Trans. A. S. M. E., Applied Mechanics Section*, vol. 54, no. 2 (1932), pp. 29-39.

必要な $u^{27/7}$ と $u^{-23/7}$ との数表を 0.500 から 1.500 に亘る u の値に対して製作、発表した。¹⁾ 更に、2次元減速領域に於ける MILLIKAN の計算方式自体の精度を確かめるために、1つの例題（一様減速流）について、彼の公式による解と、精度はそれよりも稍高いと思われるが然し数値計算を実行するに当つてかなり大きな労力を必要とする L. HOWARTH の解法 (*Proc. Roy. Soc.*, 1935; 頁 12 脚註 3) とを比較し、剝離点の極く近傍の表面摩擦応力の値を除いては、2つの方法の結果が大体に於て一致することを示すと共に、MILLIKAN の方法が一般の減速領域に対しても、ほぼ妥当な結果を与えるであろうという予想を述べた。²⁾ その後、同じく減速領域に対して、上記の数表を用いて次の2つの計算を実行した。³⁾

1) 滑らかな板に沿つて、5種類の簡単な2次元流速分布を仮定し、SIMPSON の数値積分法によつて境界層の厚さを計算した。その際、板に沿う無次元座標 x の刻み Δx (積分のステップ) を充分細かにとれば、その結果が MILLIKAN の公式を直接厳密に積分して得られる値と殆ど完全に一致することを示して、間接ながら数表の検算に資した。

2) 流速が板に沿つて直線的に減少する場合について、 $\Delta x = \Delta u_1$ をいろいろに変えて計算を行ない、 $\Delta x = \Delta u_1 = 0.24$ に到達するまで、数値積分の精度が実用的にはほぼ充分な程度に保たれることを証明した。但し、 Δu_1 は Δx に対応する流速の刻み、又 x は板の前端で 0、後端で 1 とする。

以上は何れも減速領域に対する吟味であるから、このノートでは残された問題として加速領域に対する若干の計算結果を述べることにする。即ち、上記 1) 及び 2) の計算を板に沿つて一様に加速される2次元流速分布2種類に対して繰り返し試みると共に、MILLIKAN の方法自体の精度を確かめる目的で、そのうちの1つについて L. HOWARTH の方法と H. B. SQUIRE 及び A. D. YOUNG の方法 (*R. & M.*, 1937; 頁 13, 脚註 1) とを用いて境界層の運動量厚、摩擦応力、パラメータ Γ の値を併わせ計算して、これら3つの方式の結果を比較する。勿論この局限された計算例によつて得られる結論が、厳密な意味で一般的なものであるとは断定出来ないけれども、一般の加速領域に対しても亦或程度まではその妥当性を期待することが出来るであろう。

2. 流速分布

長さ L の板の前端に一様な流れが当る。今板に沿つてその前端から座標 X を測り、点 X に於ける流速を $U_1(X)$ と書き、これを境界層外縁の流速と考える。基準になる流速を U_0 。

1) $u^{27/7}$, $u^{-23/7}$ ($u = 0.500 \sim 1.500$) の数表 (以下屢々“数表”と略記する), 応用力学研究所報 (以下屢々“所報”と略記する), 第 5 号 (昭和 29 年), 頁 1-16. 以下このノートで単に境界層と言へば, 滑らかな物体 (壁) 表面に沿つて作られる定常状態の乱流境界層を常に意味するものとしておく。

2) $u^{27/7}$, $u^{-23/7}$ の数表 (補遺), 所報, 第 7 号 (昭和 30 年), 頁 39-42.

3) $u^{27/7}$, $u^{-23/7}$ の数表 (補遺 その 2), 所報, 第 18 号 (昭和 36 年), 頁 19-38.

とし、 L と U_0 とを使つて、 X と U_1 とから、座標と流速とに対して夫々の無次元量

$$x \equiv X/L, u_1 \equiv U_1/U_0 \quad (2.1)$$

を定義する。板に沿つて進むにつれて流れは次第に加速されるものとして、 u_1 と x との間に2種類の直線的な関係、

$$u_1 = \frac{1}{2} (x+1), \quad (2.2)$$

及び

$$u_1 = \frac{1}{2} (x+2), \quad (2.3)$$

を想定してみよう。即ち前者は板の前端 ($x=0$) で流速 $U_0/2$ 、後端 ($x=1$) で U_0 、後者は前端で U_0 、後端で $3U_0/2$ の値をとり、その中間では何れも直線的に変化する。 $u_1(x)$ に直して言えば、(2.2) の分布は

$$u_1(0) = 0.5, u_1(1) = 1.0 \quad (2.4)$$

を、又 (2.3) は

$$u_1(0) = 1.0, u_1(1) = 1.5 \quad (2.5)$$

を与える。前記“数表”(所報、第5号)は引数(u)の0.500から1.500までの値に対して作製されているので、(2.2)、(2.3)は夫々その前半及び後半に対応する。

3. 境界層(その1 厳密な積分)

X (無次元的には x)点に於ける乱れた境界層の厚さを Δ (或は無次元的に $\delta \equiv \Delta/L$)と書くと、第1報(所報、第5号)の(2.9)、(2.10)によつて、 δ は次の公式で与えられる。¹⁾

$$\delta(x) = 0.379932 R_L^{-1/5} u_1^{-23/7} \left(\int_0^x u_1^{27/7} dx \right)^{4/5}. \quad (3.1)$$

但し境界層は板の前端($x=0$)から既に乱れているものとし、又 $\delta(0)=0$ と仮定する。ここに R_L は、液体の動粘性係数を ν と置いたとき、

$$R_L = U_0 L / \nu \quad (3.2)$$

によつて定義されるレイノルズ数で、簡単のため、このノートではすべて

$$R_L = 10^5 \quad (3.3)$$

と仮定しておく。以下に述べる計算は従つて唯一つのレイノルズ数について行なわれたものに過ぎないけれども、得られた結果は同じ程度の他のレイノルズ数の場合にもほぼ一樣にあてはまるものと考えてよいであろう。²⁾

1) 数係数 0.379932 の様に多くの有効数字を並べるとは、実際問題として見ると全く意味のないことであるし、MILLIKAN の公式の精度自身もそれほど高くないことが明らかであるけれども、この報告では実例について数表を検算し、併わせて計算法の精度を数値計算の問題として議論しようとする関係上、実際の必要以上に数値を詳しく記してみた。後に掲げる諸表の数字も同じ見地から見ていただきたい。

2) (3.1) は所謂流速の 1/7 乗法則 (BLASIUS) を基礎にしている。GOLDSTEIN, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. II (1938), VIII, 163, p. 362 によれば、この法則は $R_L < 3 \times 10^6$ の範囲で実験とよく一致する。又 SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory* (1960), XXI, p. 537, (21.11) によれば、この範囲は $5 \times 10^5 < R_L < 10^7$ とされている。

まず、 u_1 が x の簡単な表式で与えられているので、(3.1) の積分は容易に実行される。即ち (2.2) から

$$\delta(x) = 0.0379932 \left(\frac{7}{17}\right)^{4/5} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{-23/7} \left\{ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{34/7} - \left(\frac{1}{2}\right)^{34/7} \right\}^{4/5}, \quad (3.4)$$

又 (2.3) から

$$\delta(x) = 0.0379932 \left(\frac{7}{17}\right)^{4/5} \left(\frac{x+2}{2}\right)^{-23/7} \left\{ \left(\frac{x+2}{2}\right)^{34/7} - 1 \right\}^{4/5}. \quad (3.5)$$

これらに含まれている積分 $\int_0^x u_1^{27/7} dx$ ($0 \leq x \leq 1$) に対してその $1/2$ に当る値、

$$\frac{7}{34} \left\{ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{34/7} - \left(\frac{1}{2}\right)^{34/7} \right\}, \quad (u_1 = \frac{x+1}{2}), \quad (3.6)$$

$$\text{及び} \quad \frac{7}{34} \left\{ \left(\frac{x+2}{2}\right)^{34/7} - 1 \right\}, \quad (u_1 = \frac{x+2}{2}), \quad (3.7)$$

を x の 0 から 1 まで 0.02 刻みで計算し、論文の終りに掲載された第 1, 第 2 表に I_{exact} として記入した (頁 21—22 参照)。

4. 境界層 (その 2 数値積分)

次に流速分布に対して同じく (2.2), (2.3) を想定して、公式 (3.1) を我々の製作に係る数表を用いて計算してみよう。その際数値積分の方法としては常に SIMPSON の規則を使うことにする。即ち x に対して、(2.2) 又は (2.3) から u_1 を算出し、更に $u_1^{27/7}$ の値を数表から読み取り、よく知られた方式に従って数値的に積分してゆけば、 $\int_0^x u_1^{27/7} dx$ の近似値を種々の x の値に対して知る事が出来る。 u_1 の刻み Δu_1 を 0.005, 0.01, 0.02, 0.04, 0.08, 0.12, 0.24 の各々に選んで、上の積分の値を計算して、その $1/2$ を $I_{\Delta u_1}$ と書く (第 1, 第 2 表参照)。¹⁾ これらの数表から我々は次の結論を下すことが出来る。

1) 話を第 1 の分布 (2.2) に限ると、定義によつて

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{x+1}{2}\right)^{27/7} dx \quad (F.1)$$

であるから、 $x+1 = 2y$ という置き換えによつて

$$I(y) = \int_{0.5}^y y^{27/7} dy \quad (0.5 \leq y \leq 1) \quad (F.2)$$

と書く事が出来る。然しさきに“数表” (補遺 その 2), 頁 26—27 に於て、我々は又 I を

$$I(x) = \int_0^x (1-x)^{27/7} dx \quad (F.3)$$

として定義している。以下便宜上 (F.3) の I を I' と書く事にすると、 $1-x = z$ という置き換えて、 I' を又次の様に書く事が出来る。

$$I'(z) = \int_z^1 z^{27/7} dz \quad (0 \leq z \leq 1). \quad (F.4)$$

今 $0.5 \leq z \leq 1$ の範囲だけを考えると、その中で $z = y$ と取ると、

$$I'(y) = I'(1) - I'(y) \quad (F.5)$$

という関係がある。従つてここに掲げた第 1 表は上記前報の第 2 表 (頁 32—33) から直ちに算出出来るものである。然し前報には I_{exact} を示しておかなかつたのと、 $1.0 \leq u_1 \leq 1.5$ に対応する本報 (以下次頁)

(1) Δu_1 を 0.005 にとれば $I_{0.005}$ は実質的に I_{exact} と一致する。(この事実は、我々の数表(所報, 第5号)に対する部分的且つ間接的な検算と看做すことが出来るであろう。)

(2) 以上2つの例の様に、 u_1 が x と共に直線的に変化する限り、 Δu_1 (即ち又 Δx) が相当大きくとも、SIMPSON 法による積分 $\int_0^x u_1^{27/7} dx$ の近似値は実用的に充分正確な範囲に保たれる。実際 $\Delta u_1 = 0.24$ ($\Delta x = 0.48$) に対して $I_{0.24}$ ($x = 0.96$) の相対誤差 $(I_{0.24} - I_{exact}) \div I_{exact}$ は 0.001 (第1表), 0.0001 (第2表) の程度であつて、境界層の計算に於てこの程度の誤差は実用的には全然問題にならないし、第一MILLIKAN の方法自体に到底それだけの精度はない。この結果から、 u_1 の変化が直線的である場合には、最大

$$\Delta u_1 \doteq 0.24 \tag{4.1}$$

の程度の Δu_1 を選んでも尚充分に安全である事が判かる。¹⁾

5. 境界層 (その3 運動量厚, 表面摩擦力, Γ)

MILLIKAN の方法のしめくくりとして、後の諸節との比較に便利な量を計算しておこう。但し本節以下では u_1 として簡単のため (2.2) だけを採用する。(2.3) も定数を除いて (2.2) と同等だからである。又前節に述べた様に、数値積分の結果は正確値と殆ど完全に等しいと言つてよいけれども、この節では便宜上厳密な公式 (3.4) を、即ち積分の値として I_{exact} (実はその2倍) を使つて計算を続行する事にする。²⁾ 先ず、無次元の運動量厚(運動量厚 $\theta \div$ 板の長さ L) を ϑ と書いて、平板の場合 ($u_1 = 1$) と同じく、 ϑ は次の式で与えられるものと仮定する。³⁾

$$\vartheta = 7\delta/72. \tag{5.1}$$

又板の面上の摩擦応力を τ_0 、液体の密度を ρ と書くと、 $\tau_0/\rho U_0^2$ で定義される無次元の表面摩擦は次の式で計算される。

$$\tau_0/\rho U_0^2 = \kappa R_L^{-1/4} \delta^{-1/4} u_1^{7/4}, \tag{5.2}$$

第2表との対照の便宜との2つの理由で重ねて示すことにした。更に前報第2表 I の脚符としては座標 x の刻み Δx を用いた。その場合 (2.2), (2.3) から明らかな様に $\Delta x = -\Delta u_1$ であつたから、これは又 u_1 の刻みとも看做される。然し今の場合 $\Delta x = 2\Delta u_1$ であるから、上記 Δu_1 に対応する Δx の値は夫々 0.01, 0.02, 0.04, 0.08, 0.16, 0.24, 及び 0.48 である。然し刻みをいろいろ変えた時の近似積分の精度を前報と比較する為には同じ Δu_1 について行なうのが適當であると思われる。

1) 本文 (1) 及び (2) は減速流について述べた前報(補遺 その2), 所報, 第18号, 頁26-27の結論と全く同じであるから、詳細はそれについて見られたい。変化が直線的でない u_1 に対して (2) の結論がどの様に修正されるべきかは、今のところ明らかでないけれども、 u_1 を数個の直線からなる折線で近似して、その各々の部分について上の結果をあてはめてみれば、具体的な個々の場合に於て採用すべき Δu_1 の大きさについて、或程度妥当な基準を知る事は容易に出来るであろう。

2) 言うまでもない事であるが、こゝに“正確”又は“厳密”という言葉を用いたのは、公式中に含まれる積分を解析的に実行したという意味であつて、決して境界層の厚さを“正確に”計算したというわけではない。

3) この関係式は所謂 1/7 乗法則から導かれる。GOLDSTEIN, S., 前掲, vol. II (1938), VIII, 163, (63), p. 361 参照。

ここに
$$\kappa = 0.0232. \quad (5.3)^{1)}$$

R_L (レイノルズ数) は事柄をはつきりさせるために 10^5 ととられている, (3.3) 参照. それらの値を入れると, 先ず (5.2) から

$$\tau_0/\rho U_0^2 = 0.000728 \vartheta^{-1/4} u_1^{7/4} \quad (5.4)$$

が得られ, 更に

$$\Gamma \equiv R_L^{1/4} \vartheta^{5/4} u_1^{-3/4} du_1/dx \quad (5.5)^{2)}$$

で定義される無次元のパラメータ Γ は (2.2) と (3.3) とを用いて

$$\Gamma = 8.89 \vartheta^{5/4} u_1^{-3/4} \quad (5.6)$$

で計算される. 第1, 第2, 及び第3 図に MILLIKAN と記入したのはそれぞれ (5.1), (5.4), 及び (5.6) から計算された ϑ , $\tau_0/\rho U_0^2$, 及び Γ の値である. 但し前述の通り, u_1 及び δ は (2.2) と (3.4) とで与えられている.

6. HOWARTH の解法

乱流境界層の L. HOWARTH による解法については既に“数表”(補遺)(所報, 第7号)に於て述べたが,³⁾ 便宜上要点を再録すると次の様である. 即ち, 今

$$\chi = R_L^{1/4} \vartheta^{5/4} \quad (6.1)$$

と置けば, 運動量方程式を書き直して χ が次の微分方程式を満足する事を示すことが出来る.

$$\frac{d\chi}{dx} + \frac{5}{4} \frac{\chi}{u_1} \frac{du_1}{dx} (2+H) = \frac{5}{4} \frac{\zeta}{u_1^{1/4}}. \quad (6.2)$$

ここに H と ζ とは共に前節と同じパラメータ Γ (5.5) の函数であるが, その関係は HOWARTH によつてグラフの形で与えられている. (6.2) の方程式を解いて χ の値を知れば, ϑ , $\tau_0/\rho U_0^2$, 及び Γ の値は次の関係式から順次に計算する事が出来る.

$$\vartheta = R_L^{-1/5} \chi^{4/5}, \quad (6.3)$$

$$\tau_0/\rho U_0^2 = \zeta u_1^{7/4} \vartheta/\chi, \quad (6.4)$$

$$\text{及び} \quad \Gamma = \chi u_1^{-3/4} du_1/dx. \quad (6.5)$$

然し, H 及び ζ の Γ に対する関係は一応測定点を通る曲線によつて与えられているとは

1) (5.1), (5.2), 及び (5.3) は“数表”, 所報, 第5号, 第2節, 頁2-3 参照.

2) “数表”, 所報, 第5号, 第3節, 頁4-5 参照. (5.1) は速度プロフィールの変形を無視して, 唯平板に沿う流れに対してのみ近似的に成立すると考えられている所謂 1/7 乗法則から導かれた関係式である. この様にして算出される量を (5.5) の ϑ に対して使用する事の当否は減速流に対して“数表”(補遺 その2), 所報, 第18号, 第6節, 頁27 以下に吟味されている. 加速流に対しての検討はまだ行なわれていないが, 暫くその疑問を無視する事にしよう.

3) HOWARTH, L., The Theoretical Determination of the Lift Coefficient for a Thin Elliptic Cylinder, *Proc. Roy. Soc., A*, **149** (1935), pp. 558-586, 又は GOLDSTEIN, S., 前掲, vol. II (1938), IX, **194**, pp. 436-439. H と ζ のグラフは原論文, FIG. 10, 11, 又は GOLDSTEIN, S., 前掲, FIG. 117, 118, p. 375 参照.

言うものの、 $\Gamma > 0$ (加速流) の領域に於ては A. BURI による実験点自身が甚だしく散らばつていて、その間に引かれた平均曲線の信頼度はかなり低いものと推測せざるを得ない。その意味で HOWARTH の方法は加速流に対して使用するのに不適當であると言うべきかもしれない。然しながら、1つの試みとしてここでは次の便法を採用する。第5節の結果が著しく事実から隔つていない限り、我々の例題で Γ は最大 +0.003 の程度であり、それを前述 $H \sim \Gamma$, $\zeta \sim \Gamma$ のグラフ上で見るのに、縦軸 ($\Gamma = 0$) の極く近傍である。そこで $\Gamma = 0$ 附近での H 及び ζ の変化があまり大きくない事を考慮して、この狭い範囲内の Γ の変化による H 及び ζ の変動を無視して、(6.2) の中の H 及び ζ にはそれぞれ $\Gamma = 0$ に於けるそれぞれの値、即ち

$$H = 1.37 \quad \text{及び} \quad \zeta = 0.0122 \quad (6.6)$$

を常に使う事にする。 H と ζ をこの様に常数と仮定すると、(6.2) は直ちに積分出来て次の結果が導かれる。

$$\chi = \frac{\beta}{\alpha + 3/4} \{ (x+1)^{3/4} - (x+1)^{-\alpha} \}. \quad (6.7)$$

ここに、 α, β はそれぞれ

$$\alpha = 5(2+H)/4 = 4.21, \quad (6.8)$$

及び

$$\beta = 5 \sqrt[4]{2} \zeta / 4 = 0.0181$$

で与えられる。(6.7) に従つて $x = 0$ から 1 まで 0.02 刻みに χ の値を計算し、それから (6.3), (6.4), 及び (6.5) の公式に依つて、 ϑ , $\tau_0/\rho U_0^2$, 及び Γ を求め、第1, 第2, 及び第3図に記入した。図中 HOWARTH とあるのがその様にして算出された値である。

7. SQUIRE 及び YOUNG の解法

以上述べた様に HOWARTH の方法による計算があまり正確とは言われないので、念のために、H. B. SQUIRE 及び A. D. YOUNG によつて考案された方法で同じ問題を解いてみよう。その解法の要点だけを原論文から引用すると次の通りである。¹⁾ 今

$$\tau_0/\rho U_1^2 = 1/z^2 \quad (7.1)$$

で無次元パラメータ z を定義すれば、²⁾ 今までの測定資料を整理して次の関係式を近似的に仮定する事が出来る。

$$U_1 \theta / \nu = 0.2454 e^{0.3914z}, \quad (7.2)$$

ここに U_1 は境界層外縁の流速、 θ は運動量厚である。これらの関係式を運動量の方程式に入れると、

1) SQUIRE, H. B. and YOUNG, A. D., The Calculation of the Profile Drag of Aerofoils, Reports and Memoranda, no. 1838 (1937).

2) 原論文では ζ . 前節で使用した ζ と区別するために新しい符号を導入する。

$$\frac{dz}{dX} + 6.132 \frac{1}{U_1} \frac{dU_1}{dX} = 10.411 \frac{U_1}{\nu z^2} e^{-0.3914z} \quad (7.3)$$

が得られるが、更に (2.1), (2.2) を用いて変形すると最後に次の微分方程式が導かれる。

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{10.411 R_L \xi^2 z^{-2} e^{-0.3914z} - 12.264}{2\xi}, \quad (7.4)$$

$$\text{但し} \quad \xi = x + 1. \quad (7.5)$$

R_L は (3.2) に依つて $U_0 L / \nu$ で定義されたレイノルズ数で、ここでも相変らず 10^5 と仮定しておく。(7.4) を $\xi = 1$ に於て $z = 0$ という初期条件から出発して数値的に積分する。

然し $\xi = 1$ で $dz/d\xi$ は ∞ となるので、この附近では分子分母を逆にして、方程式を

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{2\xi}{10.411 R_L \xi^2 z^{-2} e^{-0.3914z} - 12.264} \quad (7.6)$$

という形に直して積分を開始し、適当な処で原形 (7.4) に移行するものとする。 z が求められれば、我々に必要な量は次の式で計算される。

$$\vartheta = 0.4908 \times 10^{-5} \xi^{-1} e^{0.3914z}, \quad (7.7)$$

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{\xi^2}{4z^2}. \quad (7.8)$$

又 (2.2) と (7.5) とから

$$\xi = 2u_1 \quad (7.9)$$

であるから、(5.6) に依つて Γ が計算される。

(7.4) 及び (7.6) の微分方程式は RUNGE-KUTTA の方式で数値積分された。先ず (7.6) から $z = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14^*, 15^*$ の各々に対する ξ の値が計算され、その積分曲線上の点 ($z = 13, \xi = 1.103$) から今度は (7.4) の方程式にもどつて $\xi = 1.15, 1.20, 1.25, 1.30, \dots, 1.95, 2.00$ に対する z の値が求められた。星印をつけた 2 点は積分曲線上の重複した部分を示すが、それによつて、上の数値積分の精度の目安とする。第 1, 第 2, 及び第 3 図に SQUIRE-YOUNG として示したのはこの様にして算出された曲線である。第 4 図に微分方程式 (7.4) 及び (7.6) の数値解法の結果を示す。白丸は (7.6) を解いて得られた値、矢印は乗り換え点、黒丸は (7.4) の解である。 $z = 14, 15$ の 2 点は矢印から出発する新しい曲線の上に殆ど完全に乗つていて、従つてこの数値積分法に充分の信頼性がある事が認められるであろう。

8. 3つの解法の比較

前述の例題 (2.2) を MILLIKAN (第 1—5 節), HOWARTH (第 6 節), 及び SQUIRE-YOUNG (第 7 節) の諸方式に従つて計算した結果をまとめて示した第 1 図 ($\vartheta \sim x$), 第 2 図 ($\tau_0 / \rho U_0^2 \sim x$), 及び第 3 図 ($\Gamma \sim x$) から直ちに得られる結論はおよそ次の様なものであろう。

1) x の同じ値に対する 3 種の計算値を比較すると, $\vartheta, \tau_0/\rho U_0^2, \Gamma$ の何れの場合にも

$$\text{SQUIRE-YOUNG 法} > \text{MILLIKAN 法} > \text{HOWARTH 法} \quad (8.1)$$

という関係が成り立つ。¹⁾

2) 上の 3 つの図面全部に於て MILLIKAN 法は原点 ($x = 0$) 附近で HOWARTH 法の近くから出発し, x が大きくなるにつれて SQUIRE-YOUNG 法に接近する。

3) 然しながら, これら 3 つの計算値の差はそれほど大きなものではなく, 乱流境界層 (加速域) の概算法としては, どれを採つても差支えないと思われる程度である。(以上)

繰り返し注意した様に, これは唯 1 つの数値例について得られた結論であるから, 一般の場合に, 上の 1), 2), 3) 全部が常に成り立つという保証は何も無いのであるが, この程度のレイノルズ数で, 且つこの程度の加速の強さであれば, 上の 3 つの結論のうち少くとも 3) だけは大概の場合成立するであろうと思われるので, 数表を併用した MILLIKAN 法は比較的小さい労力で, 加速流の境界層に対して, かなり合理的な計算結果を与えるものと予想することが出来るであろう。²⁾

9. 結 語

板に沿つて直線的に加速される流速分布 (2.2) 及び (2.3) に対して乱流境界層の厚さを MILLIKAN の公式に従つて計算した。その際,

1) 厳密な積分によつて直接得た結果と, さきに発表した数表を用いて数値積分 (SIMPSON 法) によつて算出した値とが殆ど完全に一致することを示して, 間接且つ部分的ながら数表の検算に資した。

2) 上記 2 つの例について, 無次元流速分布の刻み Δu_1 をいろいろに変えて数値積分を行ない, $\Delta u_1 = 0.24$ (無次元座標 x の刻み Δx について言えば 0.48) に達する迄, SIMPSON 法による数値積分の精度が実用的にほぼ充分な程度に保たれる事を示した。更にこの事を利用すると一般の流速分布に対しても, 適当な Δu_1 (又は Δx) の大きさの程度を容易に推定し得る事を述べた。

3) (2.2) で与えられる 1 例については, 併わせて, HOWARTH の方法 (*Proc. Roy. Soc.*, 1935) と SQUIRE-YOUNG の方法 (*R. & M.*, 1937) とを用いて境界層を計算し, MILLIKAN 法の結果と比較検討した。そして最も簡単に計算の出来る MILLIKAN の方法が前 2 者と大同小異の計算精度を与える事を述べた。

更にこの計算は唯 1 種の流速分布について, 然も唯 1 つのレイノルズ数の値 (10^5) に関

1) SQUIRE-YOUNG の解法による計算値, 又はそのグラフを SQUIRE-YOUNG 法と略記する。以下同断。

2) 減速域に対する同じ注意に関しては, “数表” (補遺), 所報, 第 7 号 (昭和 30 年), 頁 39-42, 特に頁 40, を参照されたい。

して行なわれたに過ぎないけれども、得られた結論は他の流速分布、又 10^5 を含むある範囲内のレイノルズ数に対しても、かなり一般的に成り立つであろうと予想した。¹⁾

終りに、数値計算及び製図を担当された井上進、星野スマ子、及び深町信尊の諸氏に深く感謝する。本報告は委員岡部淳一の執筆に係る。

追記：さきに“数表”（補遺 その2）（所報、第18号）に於て

$$u_1 = (1-x)^n,$$

但し

$$n = 2, 3/2, 1, 1/2, \text{ 及び } 1/3,$$

で与えられる流速分布に対する剥離点の位置 x_s を計算し、 $u_1(x_s)$ 、即ち剥離点に於ける境界層外縁の流速、が n の値の如何に拘らずほぼ一定である事に注目し、もし或条件のもとでこの様な性質が一般に成り立つものならば、シリーズのうちの1つのメンバーについてその剥離点の位置を計算なり実測なりによつて決定することが出来れば、その他のメンバーの剥離点はこの性質を利用して境界層を計算する事なしに定め得ることになるので、実用的にはかなり有用であろうと述べた(同上、頁31-32参照)。更に所報、第19号に於ては、上と同じ流速分布(但し $n = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, \text{ 及び } 1.2$)の下に於ける層流境界層を TANI の方法(頁25, 脚註2参照)で計算して、 $u_1(x_s)$ が矢張り n の如何に関せず著しく一定である事を指摘した。

この事に関してはその後次の条件を見出だした。即ち層流及び乱流境界層に於て、境界層外縁の速度 u_1 と前方岐点から測つた弧長 x との間に

$$u_1 = \alpha\varphi(x) \quad \text{又は} \quad x = \beta\psi(u_1)$$

という関係が成り立てば、境界層の剥離は α, β の如何に拘らずそれぞれ

$$x = \text{一定} \quad \text{又は} \quad u_1 = \text{一定}$$

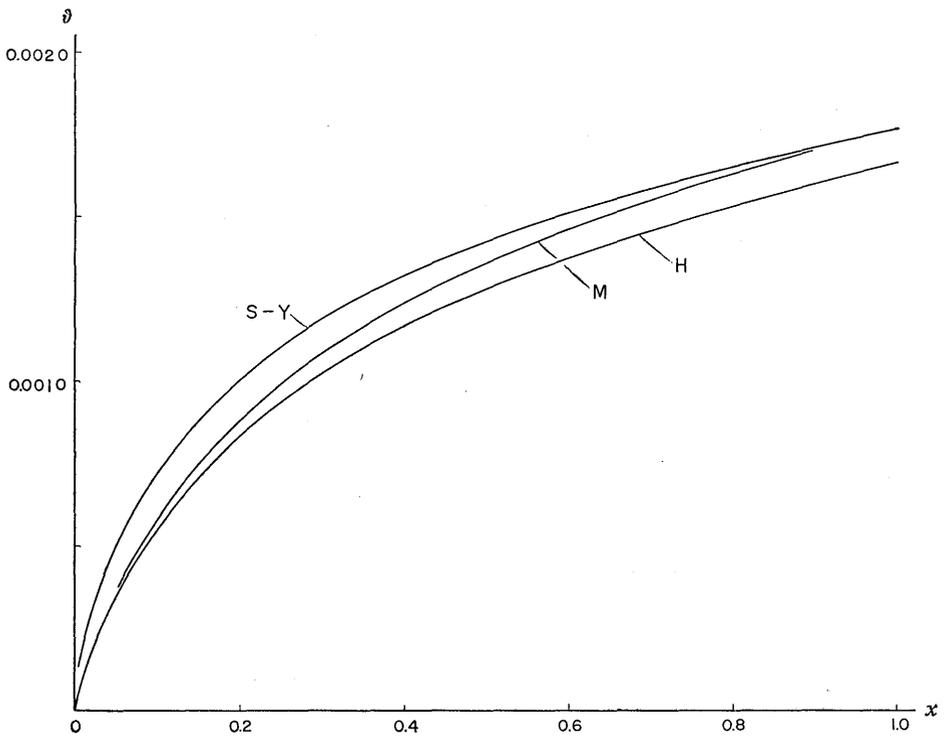
を満足する位置で発生する。実際、上に掲げた流速分布は x が1に比べて小さいとして展開すると、

$$x = (1-u_1)/n$$

となり、第2の条件式が近似的に成り立っているのである。この事に関する詳細について

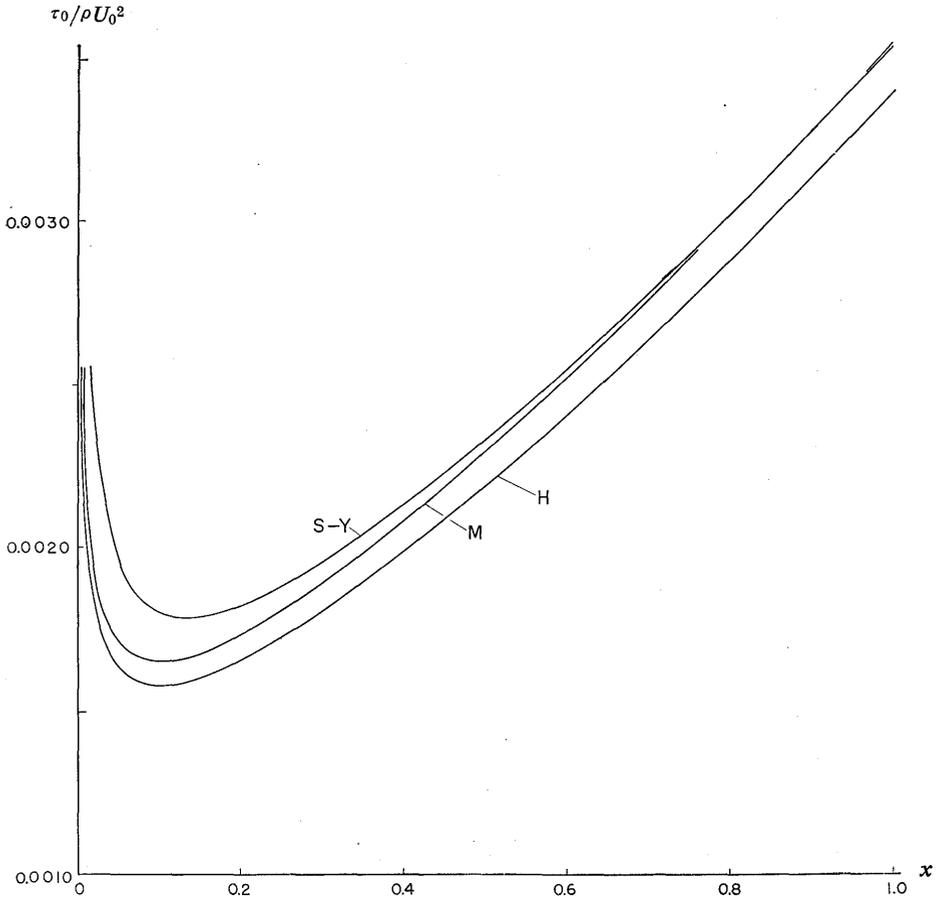
1) MILLIKAN の方法は速度プロファイルの変形の影響を全く無視しているので、著しく急激な加速領域に対して使用する事は危険である。レイノルズ数の範囲については頁9脚註2が1つの目安を与える。

は, OKABE, J., Similarity in Boundary Layer Separations of Two-Dimensional Flows, *Reports of Research Institute for Applied Mechanics*, vol. XI (1963), no. 41 (印刷中) を参照されたい. (以上)



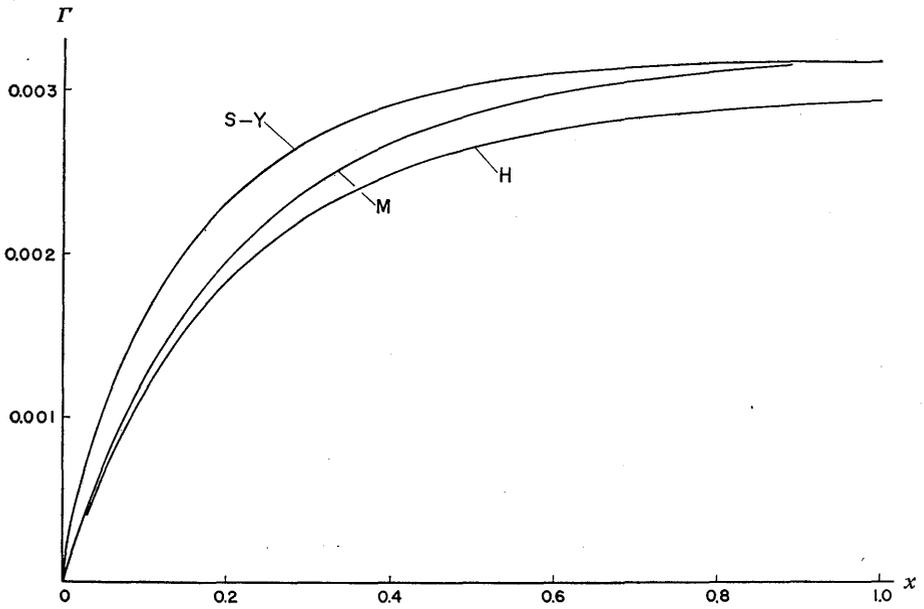
第 1 図 運 動 量 厚 δ

M : MILLIKAN 法, H : HOWARTH 法, S-Y : SQUIRE-YOUNG 法.



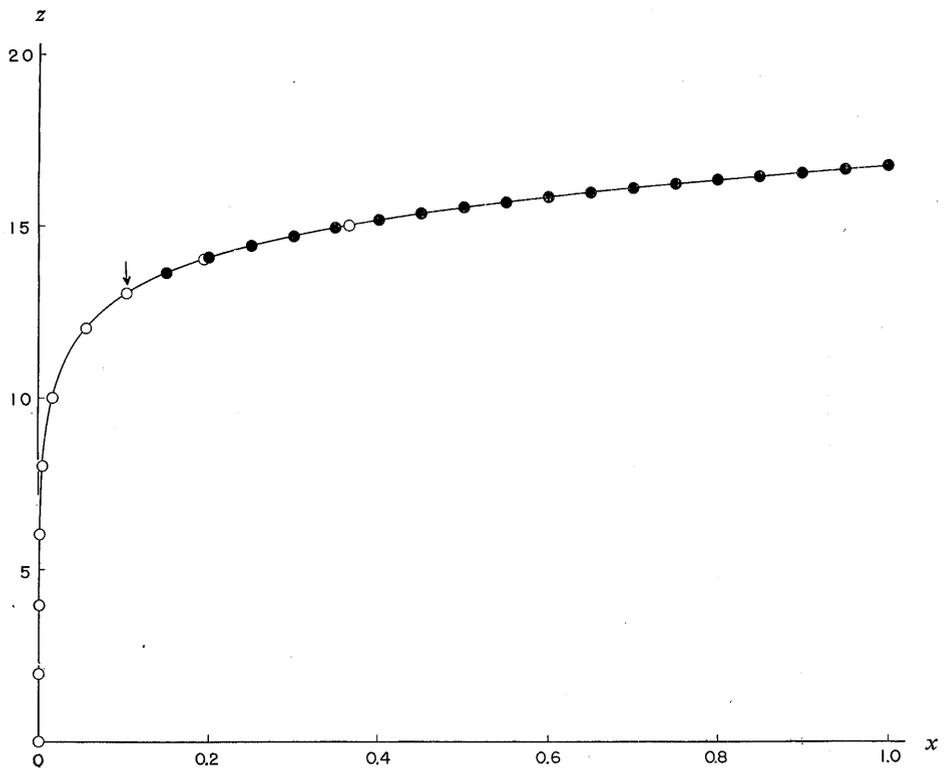
第 2 図 表面摩擦応力 $\tau_0 / \rho U_0^2$

M : MILLIKAN 法, H : HOWARTH 法, S-Y : SQUIRE-YOUNG 法.



第 3 図 Γ

M : MILLIKAN 法, H : HOWARTH 法, S-Y : SQUIRE-YOUNG 法.



第 4 図 SQUIRE-YOUNG の 解 法

○ は (7.6), ● は (7.4) の解, 矢印は 2 つの解の接続点を示す.

第 1 表

u_1	x	I_{exact}	$I_{0.005}$	$I_{0.01}$	$I_{0.02}$	$I_{0.04}$	$I_{0.08}$	$I_{0.12}$	$I_{0.24}$
0.50	0.00	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
51	02	000 717	000 717						
52	04	001 491	001 491	001 491					
53	06	002 324	002 324						
54	08	003 220	003 220	003 220	003 220				
0.55	0.10	0.004 182	0.004 182						
56	12	005 214	005 214	0.005 214					
57	14	006 320	006 320						
58	16	007 503	007 503	007 503	0.007 503	0.007 503			
59	18	008 768	008 768						
0.60	0.20	0.010 118	0.010 118	0.010 118					
61	22	011 557	011 558						
62	24	013 091	013 091	013 091	0.013 091				
63	26	014 723	014 723						
64	28	016 458	016 458	016 458					
0.65	0.30	0.018 301	0.018 301						
66	32	020 257	020 257	0.020 257	0.020 257	0.020 257	0.020 257		
67	34	022 330	022 330						
68	36	024 526	024 526	024 526					
69	38	026 850	026 850						
0.70	0.40	0.029 308	0.029 308	0.029 308	0.029 308				
71	42	031 905	031 905						
72	44	034 647	034 647	034 647					
73	46	037 540	037 540						
74	48	040 589	040 590	040 590	040 590	0.040 590		0.040 596	
0.75	0.50	0.043 803	0.043 803						
76	52	047 186	047 186	0.047 186					
77	54	050 745	050 745						
78	56	054 486	054 486	054 486	0.054 486				
79	58	058 416	058 417						
0.80	0.60	0.062 544	0.062 545	0.062 545					
81	62	066 876	066 877						
82	64	071 420	071 420	071 420	0.071 420	0.071 420	0.071 422		
83	66	076 182	076 182						
84	68	081 171	081 170	081 171					
0.85	0.70	0.086 394	0.086 393						
86	72	091 858	091 859	0.091 859	0.091 859				
87	74	097 575	097 575						
88	76	103 550	103 550	103 550					
89	78	109 792	109 792						
0.90	0.80	0.116 311	0.116 312	0.116 312	0.116 312	0.116 311			
91	82	123 117	123 116						
92	84	130 216	130 216	130 216					
93	86	137 619	137 619						
94	88	145 336	145 336	145 336	145 336				
0.95	0.90	0.153 376	0.153 376						
96	92	161 749	161 749	0.161 749					
97	94	170 466	170 466						
98	96	179 535	179 536	179 536	0.179 536	0.179 535	0.179 538	0.179 546	0.179 699
99	98	188 971	188 970						
1.00	1.00	0.198 779	0.198 779	0.198 779					

第 2 表

u_1	x	I_{exact}	$I_{0.005}$	$I_{0.01}$	$I_{0.02}$	$I_{0.04}$	$I_{0.08}$	$I_{0.12}$	$I_{0.24}$
1.00	0.00	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
01	02	010 195	010 195						
02	04	020 786	020 786	020 786					
03	06	031 786	031 786						
04	08	043 206	043 206	043 206	0.043 205				
1.05	0.10	0.055 057	0.055 056						
06	12	067 350	067 351	0.067 351					
07	14	080 101	080 101						
08	16	093 318	093 318	093 319	0.093 318	0.093 319			
09	18	107 018	107 017						
1.10	0.20	0.121 209	0.121 209	0.121 209					
11	22	135 907	135 908						
12	24	151 126	151 126	151 126	0.151 126				
13	26	166 878	166 877						
14	28	183 176	183 175	183 175					
1.15	0.30	0.200 04	0.200 03						
16	32	217 47	217 47	0.217 47	0.217 47	0.217 47	0.217 47		
17	34	235 49	235 49						
18	36	254 12	254 12	254 12					
19	38	273 37	273 37						
1.20	0.40	0.293 24	0.293 25	0.293 25	0.293 25				
21	42	313 79	313 78						
22	44	334 97	334 97	334 97					
23	46	356 86	356 85						
24	48	379 42	379 42	379 42	0.379 42	0.379 42		0.379 43	
1.25	0.50	0.402 71	0.402 71						
26	52	426 73	426 72	0.426 72					
27	54	451 48	451 49						
28	56	477 01	477 01	477 01	0.477 01				
29	58	503 32	503 32						
1.30	0.60	0.530 41	0.530 42	0.530 42					
31	62	558 35	558 34						
32	64	587 09	587 10	587 10	0.587 10	0.587 10	0.587 11		
33	66	616 70	616 71						
34	68	647 19	647 19	647 19					
1.35	0.70	0.678 57	0.678 56						
36	72	710 83	710 84	0.710 84	0.710 84				
37	74	744 04	744 05						
38	76	778 19	778 20	778 20					
39	78	813 32	813 32						
1.40	0.80	0.849 43	0.849 44	0.849 44	0.849 44	0.849 44			
41	82	886 55	886 56						
42	84	924 70	924 71	924 71					
43	86	963 90	963 91						
44	88	1.004 19	1.004 18	1.004 18	1.004 18				
1.45	0.90	1.045 55	1.045 55						
46	92	088 03	088 03	1.088 03					
47	94	131 65	131 65						
48	96	176 43	176 42	176 42	1.176 42	1.176 43	1.176 43	1.176 44	1.176 58
49	98	222 39	222 38						
1.50	1.00	1.269 55	1.269 55	1.269 55					

附 録

1. 正弦波型の流速攪乱 (乱流境界層)

前記“数表”(補遺)(所報, 第7号)及び同じく(補遺 その3)(所報, 本号)で MILLIKAN の計算法が減速流及び加速流の両方に対して, 剥離点の極く近くを除けば, 或程度信頼の置ける結果を与えるものである事を例示したので, 次にこの両者を併わせ含む定常流の1例として, 前と同じ符号を使つて, 板に沿う流速分布が

$$u_1 = 1 + a \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{4x}{\lambda}\right) \quad (\text{A.1})$$

で与えられる場合を考えよう. これは $1(U_0)^{1/5}$ という一様流速の上に重ね合わされた振幅 $a(aU_0)$, 波長 $\lambda(\lambda L)$ の正弦波型の攪乱を表わす. 具体的に言えば, 一様な流れにその面を洗われる板に沿つて, 波長 λ の規則的な凹凸がきびすを接して連なる時, この様な流れの場を生じるであろう. 今

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.2, \\ a &= 0, 0.1, 0.2, 0.4 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

という数値を選んで, $u_1(x)$ を画いたのが第5図である. 更にこの u_1 を基礎にして, 公式(3.1)に従つて $R_L^{1/5} \delta(x)$ を計算した結果が第6図に示されている. 尚この例題では, レイノルズ数 R_L の値を指定する事をやめて, これをパラメータの形のままで保存し, 又数値積分の計算に当つては u_1 の値を小数第3位に丸めて $u^{27/7}, u^{-23/7}$ の数表を使用した ($4x = 0.005$).²⁾

次に u_1 の波動項の位相の影響を見るために, $\lambda = 0.2, a = 0.2$ と採つて, (A.1) の代りに u_1 を

$$u_1 = 1 - 0.2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{4x}{0.2}\right) \quad (\text{A.3})$$

の形に仮定し, これを使つて前と同じ手続きで $R_L^{1/5} \delta$ を計算した. 又波長 λ の影響を見るためには, 同じく $a = 0.2$ の場合について, (A.1) でそれぞれ

$$\lambda = 0.1 \quad \text{及び} \quad 0.4 \quad (\text{A.4})$$

と置いて u_1 を計算し, 同じ方法で $R_L^{1/5} \delta$ を求めた. これらの結果をまとめて第7, 第8図に示す. 第7図は種々の u_1 を x に対して画いたもの, 第8図はその各々から計算された $R_L^{1/5} \delta$ の値であつて, この両図に於ける符号 A, B, C, D, E は次の表によつて明らかであろう. Eは勿論基準の一様流に対応する.

1) U_0 という大きさ, 無次元にして 1. 以下同断.

2) 但し後述 $\lambda = 0.1$ 及び 0.4 の時は夫々 $4x = 0.0025$ 及び 0.01 と採る.

	u_1 の式	λ	a
A	(A. 1)	0.2	0.2
B	(A. 3)	0.2	0.2
C	(A. 1)	0.1	0.2
D	(A. 1)	0.4	0.2
E	(A. 1)		0

更に第 5 図に画かれた 4 種の流速分布に対して無次元の摩擦応力 $\tau_0/\rho U_0^2$ を (5.2) の式によつて計算する。即ち

$$\tau_0/\rho U_0^2 = 0.0232 R_L^{-1/4} \delta^{-1/4} u_1^{7/4}. \quad (\text{A. 5})$$

(3.1) から判かる様に δ はレイノルズ数 R_L の $-1/5$ 乗に比例するので、 $\tau_0/\rho U_0^2$ も亦 R_L の $-1/5$ 乗に比例する事になる。第 5 図の 4 種の流速分布、(A. 1) と (A. 2) 参照、に対して $R_L^{1/5} \tau_0/\rho U_0^2$ を計算した結果が第 9 図であつて、図中 0, 0.1, 0.2, 0.4 の数字は攪乱項の振幅 a を与えるものである。

計算例が少ないので、断定的に述べるわけにはゆかないけれども、以上の計算の結果から予想される一般的な結論は概ね次の様なものであろう。即ち一樣な流れの中に含まれる正弦波型の攪乱項が境界層の厚さに及ぼす影響として、

- 1) 境界層の厚さ δ の変動は流速の波動と同じ波長で発達する。
- 2) 流速攪乱の振幅 a が增大すると、 δ の変動の振幅はそれよりも大きな割合で増加する。
- 3) 一樣流 ($a = 0$) に対する δ を δ_0 と書くことにすると、 δ が δ_0 より薄くなる様な変動よりも、 δ_0 より厚くなる様な変動の方が強められる。従つて、平均として、境界層は一樣流の場合よりも見かけ上厚くなる。
- 4) δ の変動の振幅は板の長さに沿つての各点 x でほぼ $\delta_0(x)$ に比例する程度で発達してゆく。
- 5) 流速攪乱項の位相や波長の変化によつて、 δ の変動の位相や波長は勿論異なつて来るけれども、 δ の振幅と x との関係にはそれほど大きな違いが認められない。
- 6) 表面摩擦 $\tau_0/\rho U_0^2$ に与える影響。 δ の変動は上に述べた様に x の増加と共に $\delta_0(x)$ に比例する程度で成長してゆくが、 $\tau_0/\rho U_0^2$ の変動は当然逆に x と共に減衰してゆく。従つて全摩擦抵抗にとつては板の先端附近の状況が最も重要であり、この時には流速変動項の位相、波長が全摩擦抵抗の大きさに大きな影響をもつ事になる。局所的な $\tau_0/\rho U_0^2$ について言われる事は、 δ の場合と同じく、一樣流 ($a = 0$) の値に比べて、それより増加する側の変動の方が減少する側の変動よりも常に著しいという事である。従つて板の長さの中に多くの波長の流速変動が含まれているならば、全摩擦抵抗は一樣流の場合よりも恐らくふえる事になるであろう。(以上)

第5, 第6図に相当する流れに対して, (5.5) で定義されたパラメータ Γ を計算した結果が第10図である. ϑ として (5.1) によつて δ から導かれる値を用いれば, Γ はレイノルズ数 R_L に関係しない. 更に HOWARTH によれば, Γ が -0.06 に到達する点で境界層は物体の壁から剥離するものとされているが,¹⁾ この場合の剥離現象は恐らくそれよりも遥かに複雑なものであろう.

最後に, 基礎の流れが一様でない場合の状況の一斑を見るために, u_1 を

$$u_1 = (1-x) + a \sin\left(\frac{\pi 4x}{2\lambda}\right) \quad (\text{A.6})$$

の形に仮定し (第11図参照), その各々に対応する $R_L^{1/5}\delta$ の値を計算した (第12図). 但し λ と a とは (A.2) に与えられた値をとるものとする. これら両図に記入された 0, 0.1, 0.2, 及び 0.4 の数字はそれぞれの a の値である. 上記 1), 2), 3), 4) に列挙した事項がもつと誇張された形で表われているが, これは x に沿つて進むにつれて一般流が次第に小さくなり, 流速の変動部分の比重が相対的にますます増大するので当然の結果である.

2. 同じく (層流境界層)

次に本文とは全然関係がないけれど, 一様流に正弦波型の流速攪乱が重ね合わされた問題を層流境界層の場合について簡単に検討してみよう. 計算の方法としては TANI の公式を使う.²⁾ 即ち, 前と同じ符号を使つて, 層流境界層の運動量厚 ϑ は近似的に次の式で与えられる.

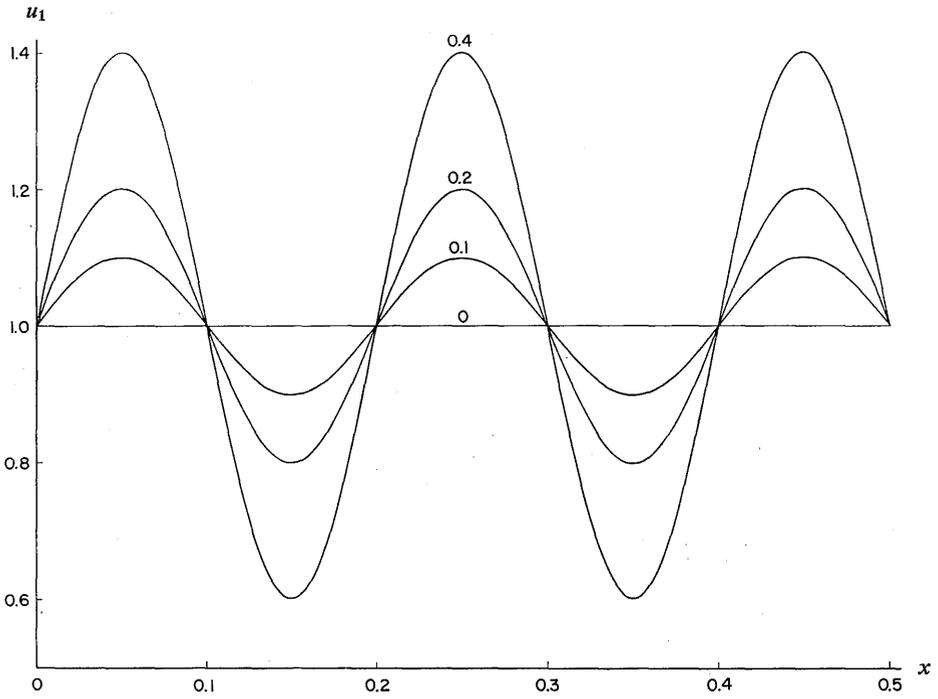
$$R_L \vartheta^2 = \frac{0.44}{u_1^6} \int_0^x u_1^5 dx. \quad (\text{A.7})$$

但しここでは速度の変動に基ずく剥離の問題は一応度外視する. (A.1) と (A.2) とによつて与えられる流速分布 (第5図) から (A.7) を用いて $\sqrt{R_L}\vartheta$ を算出した結果を第13図に示す. 0乃至 0.4 の数字はそれぞれの a の値である. この図はそれに対応する乱流境界層の場合 (第6図参照) と本質的には全く同じであり, 従つて乱流境界層に対して述べられた事項が定性的には層流境界層にもそのまま成り立つものと予想される.

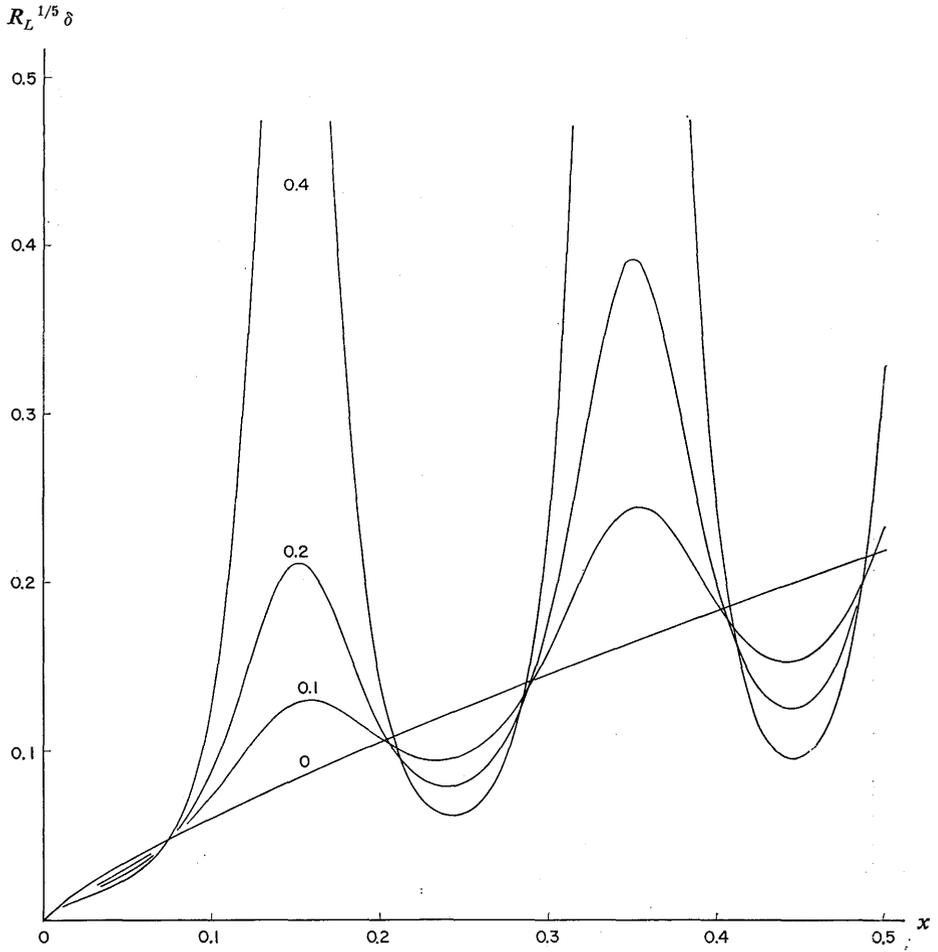
(昭和39年1月17日受理)

1) “数表”, 所報, 第5号 (昭和29年), 第3節参照.

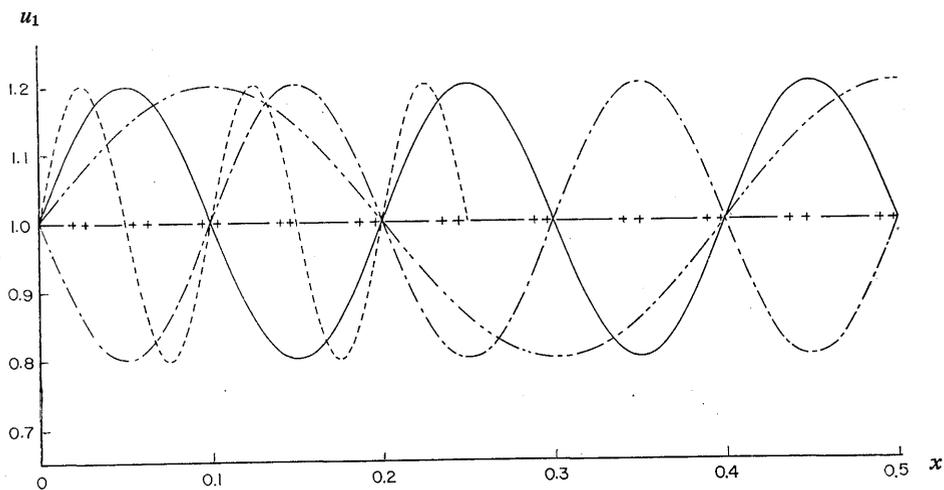
2) 谷一郎, 層流剥離点の簡易計算法に就いて, 航空研究所彙報, 第199号 (昭和16年), 頁62-67, 及び TANI, I., On the solution of the laminar boundary layer equations, *50 Jahre Grenzschichtforschung* (1955), SS. 193-200. 岡部淳一, 層流剥離についてのノート, 所報, 第19号 (昭和37年), 頁125-133.

第 5 図 流 速 分 布 u_1

$\lambda = 0.2$; $a = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. 数字は a を示す.

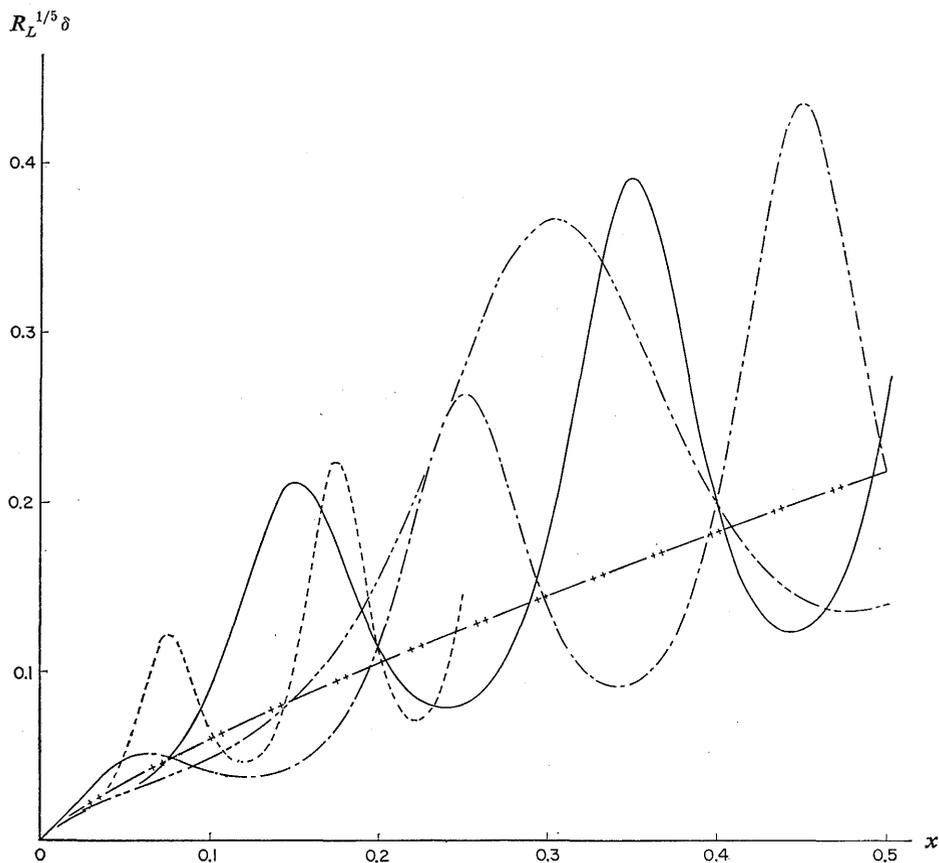


第 6 図 境界層の厚さ $R_L^{1/5} \delta$
 $\lambda = 0.2$; $a = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. 数字は a を示す.

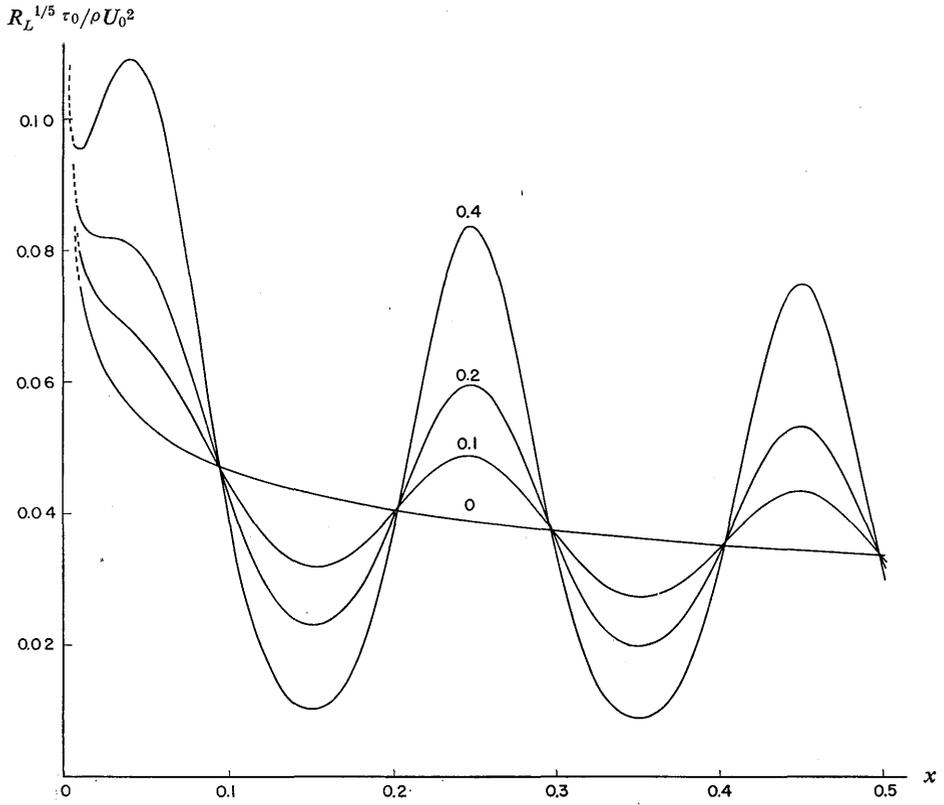


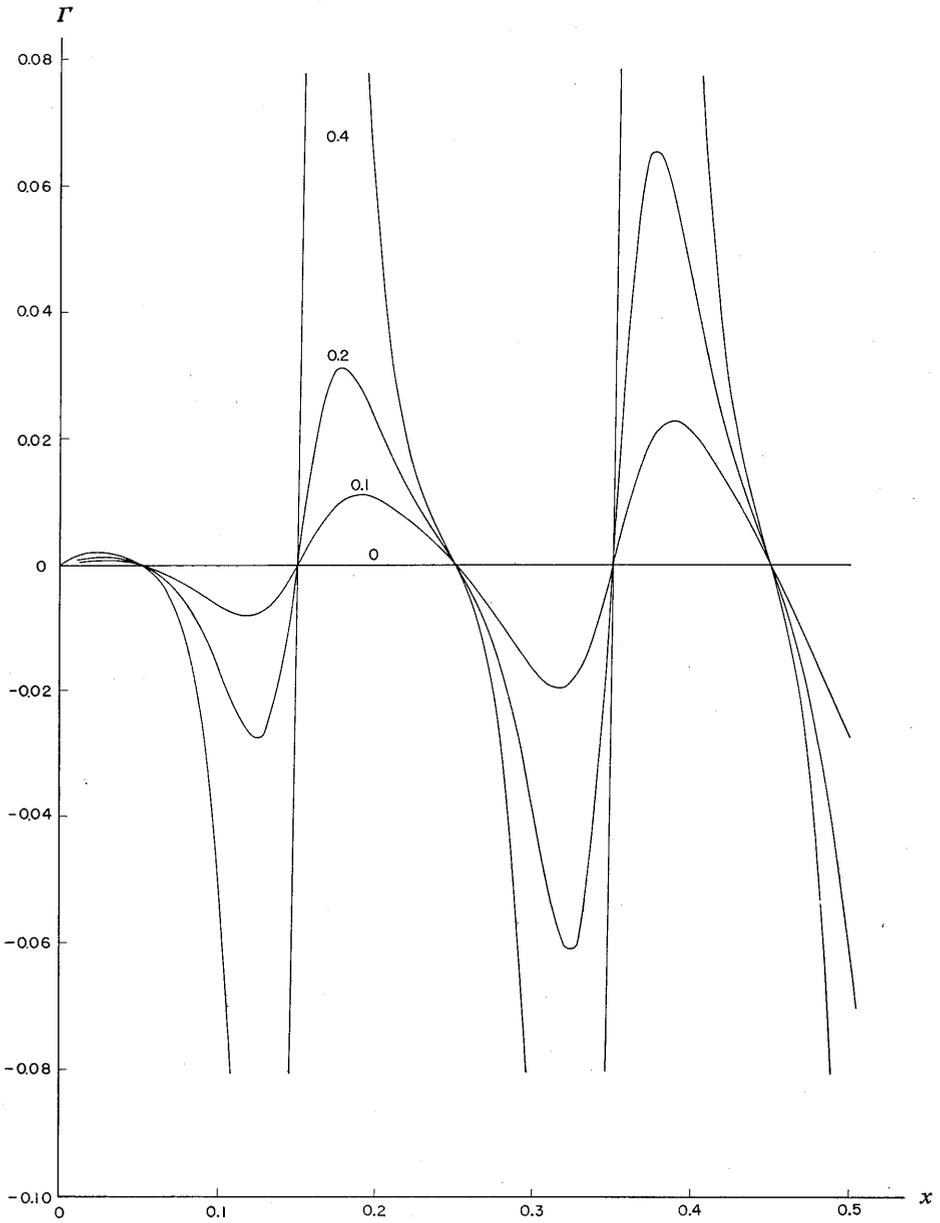
第 7 図 流 速 分 布 u_1

— A - - - B - · - C
 - - - D - + + - E

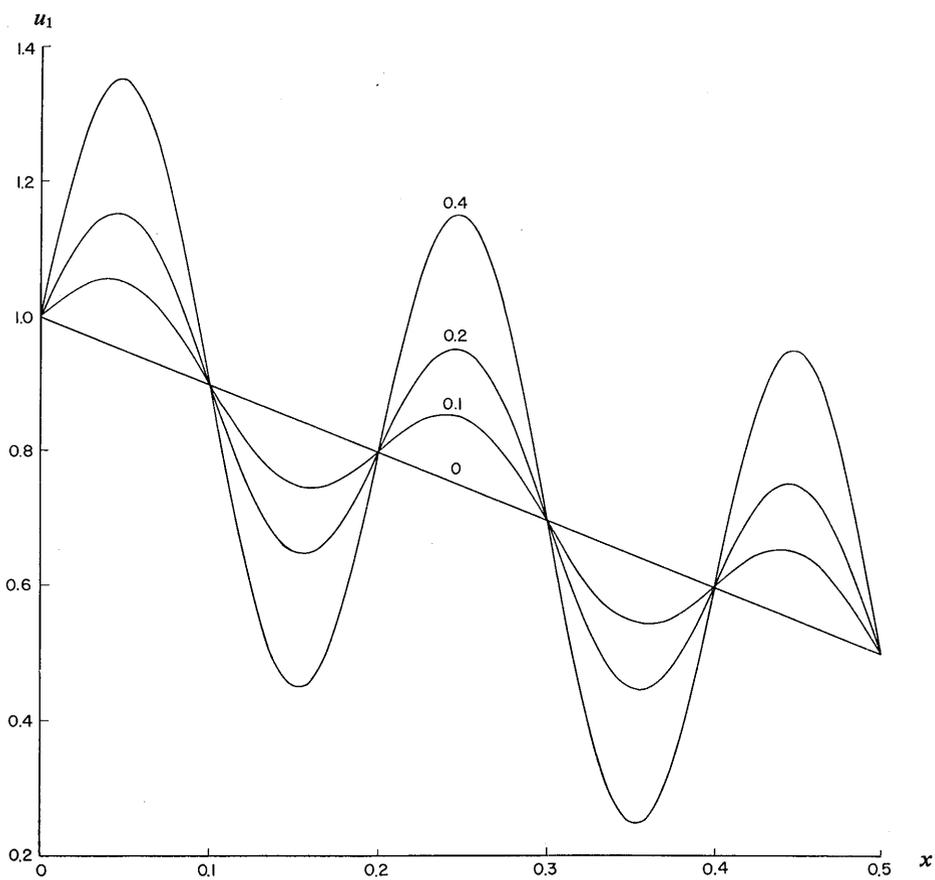


第 8 図 境 界 層 の 厚 さ $R_L^{1/5} \delta$

第9図 表面摩擦応力 $R_L^{1/5} \tau_0 / \rho U_0^2$ $\lambda = 0.2$; $a = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. 数字は a を示す.

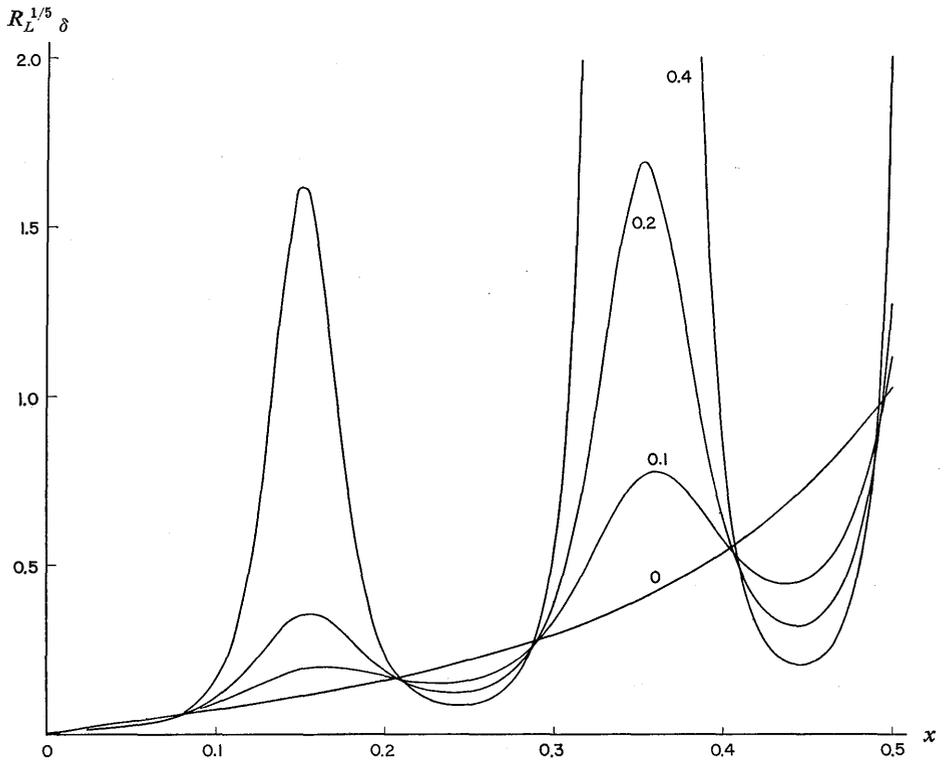
第 10 図 Γ

$\lambda = 0.2$; $a = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. 数字は a を示す.



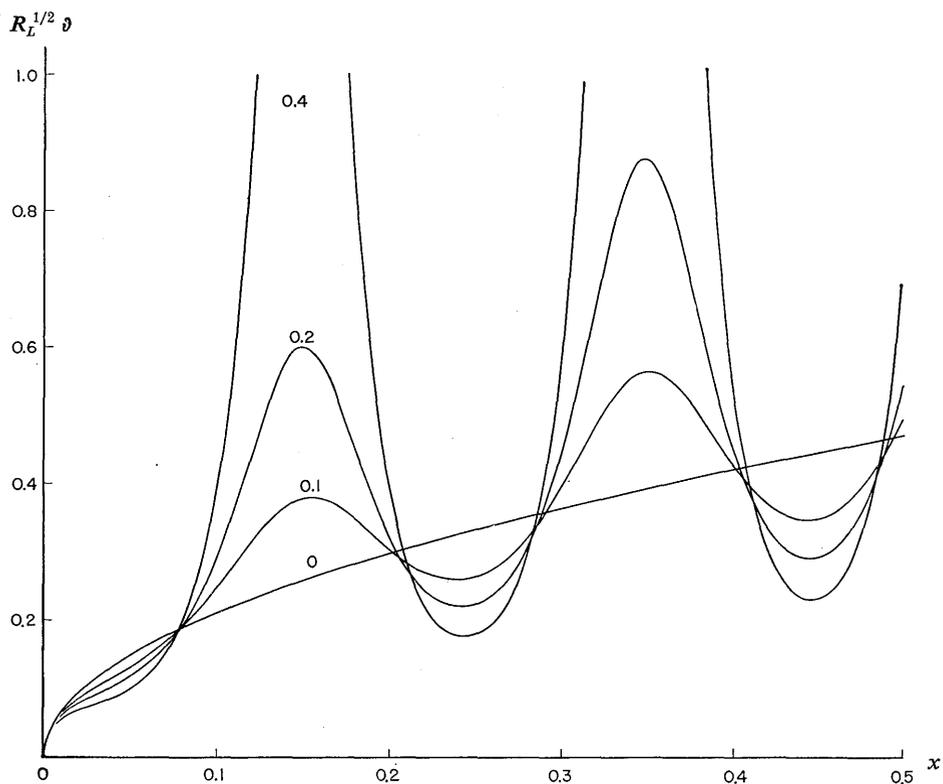
第11図 流速分布 u_1

$\lambda = 0.2; a = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. 数字は a を示す.



第 12 図 境界層の厚さ $R_L^{1/5} \delta$

$\lambda = 0.2$; $a = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. 数字は a を示す.

第13図 運動量厚 $R_L^{1/2} \delta$ (層流境界層) $\lambda = 0.2$; $a = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. 数字は a を示す.