

不規則な路面を走る物体の振動について : その1

岡部, 淳一

<https://doi.org/10.15017/4743393>

出版情報 : 應用力學研究所所報. 15, pp.51-63, 1960. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

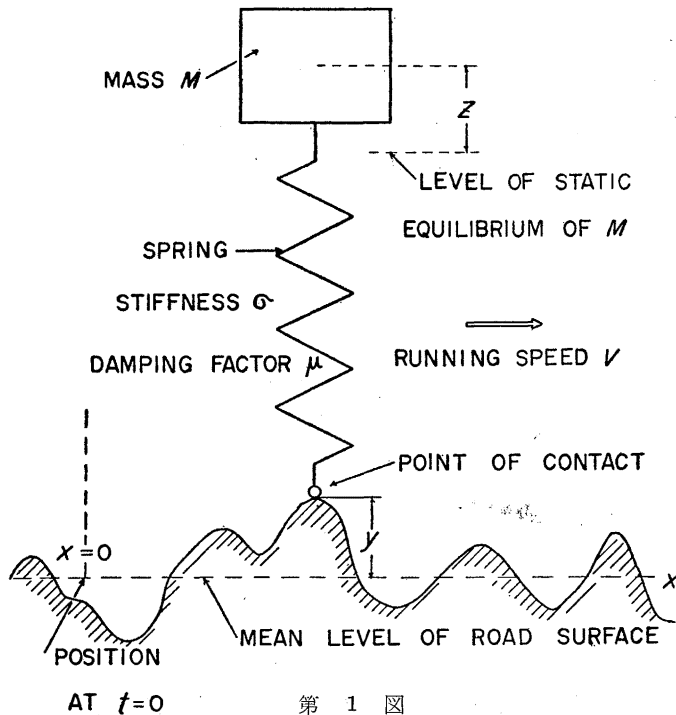


不規則な路面を走る物体の振動 について (その 1)

岡 部 淳 一

乱れた流体中に吊された振子の運動の統計的性質を計算した C. C. LIN (1943, 後出) の方法を使つて、路面の凹凸の自己相関函数とその上を一定の速さで走る物体の上下振動の自己相関函数との関係を求めた。更に附録で、その関係式について、振動の減衰係数が非常に小さい場合に適用出来る近似計算の方法を述べた。

1. 不規則な形の表面をもつ固い路の上を走る物体に惹きおこされる振動の性質をしらべるために、最も簡単な模型として次の力学系を考えよう．それは第1図に示されている様に、強さ σ 、減衰係数 μ の軽いばねとその上に載つた質量 M の質点とから成り、そしてその全体が道路の表面から離れることなく、路面の平均の高さにとられた x 軸の正の方向に一定の速さ V で走り続けているものとする．但し x 軸の原点 $x=0$ は時刻 $t=0$ に於ける物体の位置と一致する様にえらばれている．次に道路の表面の形を x 軸からの高さ y であらわし、



$$y=y(x) \quad (1.1)$$

と書く。しかし時刻 t とその瞬間に於ける質点の位置 x との間には

$$x=Vt \quad (1.2)$$

という関係があるので、質点の現在位置に於ける路面の高さ、即ち第1図の point of contact の高さ、 y は結局 t の函数として次の形をもつことになる。

$$y=y(t). \quad (1.3)$$

又運動中の質点 M の高さを、ばねと路面との接触点が $y=0$ (x 軸) の上に静かに横たわっている時に M の示すその釣合位置のレベルから測ることにして、これを y と同じ様に t の函数

$$z=z(t) \quad (1.4)$$

であらわす。この様に釣合の位置から z を測ることによつて、 M に働く重力の影響を見かけ上除き去ることが出来る。尚 y, z の符号は各々の零点から上へ測つたときを正にとる。即ち第1図の場合、 $y>0, z>0$ である。

$y(t)$ は一般に t の“きちんとした函数 (well-defined function)”としてではなく、むしろ“でたらめな函数 (random function)”として与えられ、従つて我々は一般に $y(t)$ の或種の統計的性質しか知ることが出来ない。又一方 $z(t)$ は質点の運動方程式によつて $y(t)$ と結びつけられているので、これも亦当然 t の他のでたらめな函数としてあらわされるはずである。今仮りに $y(t)$ を定常確率過程と考えられるものとして、その或統計的性質が知られている時、それから $z(t)$ の同様な統計的性質を導くことは如何にして可能であらうか。以下にその問題の一部分を取り扱う。

先ず、 $y(t), z(t)$ の $|t|\geq T$ の部分を断ち切つて (truncate), その代りに値零の耳をつけて作つた函数を夫々 $y_T(t), z_T(t)$ とし、これらの FOURIER 変換を夫々 $\bar{y}_T(p), \bar{z}_T(p)$ と書く。即ち

$$\bar{y}_T(p) \equiv \int_{-T}^T y_T(t) e^{-ipt} dt, \quad (1.5)$$

及び

$$\bar{z}_T(p) \equiv \int_{-T}^T z_T(t) e^{-ipt} dt. \quad (1.6)$$

然し $t=\pm T$ に於ては明かに

$$y_T, z_T, \dot{z}_T=0 \quad (1.7)$$

であるから、部分積分によつて次の関係を導くことが出来る。

$$\begin{aligned} \bar{y}_T &= ip \bar{y}_T, \\ \bar{z}_T &= ip \bar{z}_T, \end{aligned} \quad (1.8)$$

及び

$$\bar{z}_T = -p^2 \bar{z}_T.$$

ここにドットは t に関する微分を示す。ところで質点 M の運動方程式は

$$M\ddot{z} = -\sigma(z-y) - \mu(\dot{z} - \dot{y}) \quad (1.9)$$

であるから、両辺の FOURIER 変換を作ると、(1.8) を考慮して

$$\bar{z}_T(p) = \frac{i\mu p + \sigma}{-Mp^2 + i\mu p + \sigma} \bar{y}_T(p) \quad (1.10)$$

が得られる。共役複素数をあらわすのに星印を使えば、(1.10) から

$$\bar{z}_T(p) \bar{z}_T(p)^* = \frac{\mu^2 p^2 + \sigma^2}{(-Mp^2 + \sigma)^2 + \mu^2 p^2} \bar{y}_T(p) \bar{y}_T(p)^* \quad (1.11)$$

が導かれる。

さて、(1.5) から

$$\bar{y}_T(p) \bar{y}_T(p)^* = \int_{-T}^T y_T(t) e^{-ipt} dt \int_{-T}^T y_T(t') e^{ip't'} dt'$$

と書かれるので、

$$\bar{y}_T(-p) \bar{y}_T(-p)^* = [\bar{y}_T(p) \bar{y}_T(p)^*]^* = \bar{y}_T(p) \bar{y}_T(p)^*, \quad (1.12)$$

即ち $\bar{y}_T(p) \bar{y}_T(p)^*$ は p の偶関数である。同様に $\bar{z}_T(p) \bar{z}_T(p)^*$ も亦そうである。次に、

$$Y(p) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{y}_T(p) \bar{y}_T(p)^*}{T}, \quad Z(p) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{z}_T(p) \bar{z}_T(p)^*}{T} \quad (1.13)$$

によつて与えられる量を夫々路面の凹凸 (input), 及び質点の振動 (output), の power spectrum と呼び、(1.10) の右辺の分数の逆数を振動系の impedance と名付ける。¹⁾ その時 (1.11) から input 及び output の2つの power spectrum の間の関係

$$Z(p) = \frac{\mu^2 p^2 + \sigma^2}{(-Mp^2 + \sigma)^2 + \mu^2 p^2} Y(p) \quad (1.14)$$

を導くことが出来る。^{2) 3)}

振動系に不規則な外力が働く場合に、input 及び output のスペクトルを導入してその

1) Y. C. FUNG, *Statistical Aspects of Dynamic Loads*, Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 20 (1953), no. 5, pp. 317-330, 特に 321.

2) 実際問題としては路面のスペクトルとして、(1.5) で定義された時間的な FOURIER 変換でなく

$$\bar{y}_X(p') \equiv \int_{-X}^X y_X(x) e^{-ip'x} dx, \quad (1.15)$$

但し

$$X \equiv VT, \quad (1.16)$$

で与えられる空間的な FOURIER 変換を知ることの方が容易である場合があるであろう。その時 (1.15) に (1.2) を代入して

$$\bar{y}_X(p') = V \bar{y}_T(p'V) \quad (1.17)$$

であるから、 $\bar{y}_T(p)$ は $\bar{y}_X(p')$ を用いて

$$\bar{y}_T(p) = \frac{1}{V} \bar{y}_X\left(\frac{p}{V}\right) \quad (1.18)$$

によつて計算することが出来る。尚次の文献を参照されたい。J. H. WALLS, J. C. HOUBOLT, and H. PRESS, *Some Measurements and Power Spectra of Runway Roughness*, NACA Technical Note 3305 (1954). J. C. HOUBOLT, J. H. WALLS, and R. F. SMILEY, *On Spectral Analysis of Runway Roughness and Loads Developed During Taxiing*, NACA Technical Note 3484 (1955). 特に後者の第2頁の最後の方程式は (1.18) と同じものである。

3) FOURIER 変換の性質について応用力学研究所大路通雄氏の御教示を得たことを記して深く感謝の意を表する。

振動の統計的な性質をしらべる方法は古くから行なわれた。¹⁾²⁾ 一方路面の凹凸のスペクトルを実際に測定しようとする試みは WALLS, HOUBOLT, 及び PRESS (前出) によつて始められ, その上を走る振動系 (飛行機) の運動は同じく HOUBOLT, WALLS, 及び SMILEY (前出) によつて最初に論じられた。³⁾ 最近 TAKEDA は不規則な路面を走る自動車の振動のスペクトルを詳しく計算してその乗り心地を研究した。⁴⁾ 又一方スペクトルの理論は流体力学に於て乱流論の一部として詳細に研究され, 特に乱れた流体の中に吊された振子の運動は LIN によつて解明された。⁵⁾ 以下 LIN 及び LIEPMANN に倣つて, 不規則な路面を走る物体の振動について若干の計算を示そう。乱流論で既に得られた知識を我々の問題に対して積極的に導入することは有益であると思われるが, それは将来の問題である。

2. 路面の凹凸を定常確率過程と仮定した時, $y(t)$ 及び $z(t)$ のスペクトル $Y(p)$ 及び $Z(p)$ から夫々

$$\eta(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Y(p) e^{ip\tau} dp, \quad (2.1)$$

$$\zeta(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Z(p) e^{ip\tau} dp \quad (2.2)$$

によつて導かれる函数 η 及び ζ は夫々 $y(t)$ 及び $z(t)$ の autocorrelation function と呼ばれる。⁶⁾ (1.12) によつて $Y(p)$, 同様にして又 $Z(p)$ は p の偶函数であるから, η 及び ζ は p の実函数である。更に FOURIER の逆変換によつて (2.1), (2.2) から夫々

$$Y(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) e^{-ip\tau} d\tau, \quad (2.3)$$

$$Z(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\tau) e^{-ip\tau} d\tau \quad (2.4)$$

- 1) 解説的な文献として, H. W. LIEPMANN, *On the Application of Statistical Concepts to the Buffeting Problem*, Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 19 (1952), no. 12, pp. 793-801. Y. C. FUNG, 前出, 及び *The Analysis of Dynamic Stresses in Aircraft Structures During Landing as Nonstationary Random Processes*, Journal of Applied Mechanics, vol. 22 (1955), no. 4, pp. 449-457.
- 2) 不規則な外力でなくともスペクトルの使用は勿論可能である。L. S. JACOBSEN and R. S. AYRE, *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill (1958), 第 4 章に種々の典型的な外力に対して減衰のない振動子の運動をスペクトルの形で呈示し, 特に問題 4-13 (p. 190) に於て, (a) 連続した sine wave の路面と (b) 孤立した突起のある路面とを提出している。小文第 1 図に示した振動子はこのモデルに少々一般性をもたせるために減衰項を入れたものである。この文献は応用力学研究所熊井豊二教授の御教示と御貸与によるもので, ここに厚く謝意を表する。
- 3) 但し LIEPMANN の論文 (前出) の終りに統計的な方法の適用されるべき種々の問題をあげ, 最後に "Taxiing over rough ground is another problem in the same class." と結んでいる処を見ると, この問題の示唆は既に彼によつて与えられていたと言ふべきであろう。
- 4) 武田峻, 路面走行時の自動車の振動, 運輸技術研究所報告, 第 8 巻 (1959), 第 6 号, pp. 163-178.
- 5) C. C. LIN, *On the Motion of a Pendulum in a Turbulent Fluid*, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 1 (1943), no. 1, pp. 43-48. G. K. BATCHELOR, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge at the University Press (1953), pp. 55-58.
- 6) 自己相関函数。但し以下では簡単のため単に correlation function (相関函数) と記す。

が得られる。(1.14) を (2.2) に用いると,

$$\zeta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2 p^2 + \sigma^2}{(-Mp^2 + \sigma)^2 + \mu^2 p^2} Y(p) e^{ip\tau} dp,$$

更に (2.3) を代入して

$$\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau') e^{-ip\tau'} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2 p^2 + \sigma^2}{(-Mp^2 + \sigma)^2 + \mu^2 p^2} e^{ip\tau} dp \quad (2.5)$$

に到達する. これは路面の凹凸の correlation function が与えられている時, その上を一定の速さで走る物体 M の上下振動の correlation function を計算する関係式で, これとよく似た方程式が乱れた流体の中に吊された振子の運動について曾て C. C. LIN (前出) によつて与えられた. そこで次に彼に倣つて積分

$$I(\tau - \tau') \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2 p^2 + \sigma^2}{(-Mp^2 + \sigma)^2 + \mu^2 p^2} e^{ip(\tau - \tau')} dp \quad (2.6)$$

を評価しよう.

今

$$\sigma/M \equiv s^2, \quad \mu/M \equiv m, \quad \tau - \tau' \equiv \tau'' \quad (2.7)$$

とおくと, 被積分函数の分数部分が p の偶函数であることから, 直ちに

$$I(\tau'') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^2 p^2 + s^4}{(p^2 - s^2)^2 + m^2 p^2} e^{ip|\tau''|} dp \quad (2.8)$$

と書くことが出来る. 更に積分路を変形して, p の複素平面で実軸と, 原点を中心とする大きい円周の上半分とから成る道筋を時計の反対方向に廻る contour Γ に沿う積分を考える. そのとき円周上では $|p|$ が非常に大きいので, 被積分函数は $|p|^{-2}$ の程度で小さくなり, 従つて円周に沿う積分はその半径が大きくなつた極限で消滅し,¹⁾ 結局

$$I(\tau'') = \int_{\Gamma} \frac{m^2 p^2 + s^4}{(p^2 - s^2)^2 + m^2 p^2} e^{ip|\tau''|} dp \quad (2.9)$$

を得る. さて右辺の積分の値は留数の計算によつて容易に知ることが出来る. 即ち contour Γ の中に含まれる被積分函数の極は点

$$p = \pm \sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}} + i \frac{m}{2} \quad (2.10)$$

(但し $s^2 > m^2/4$, 即ち

$$4M\sigma > \mu^2 \quad (2.11)$$

と仮定する.) に位置し, 従つて

$$\begin{aligned} I(\tau'') &= 2\pi i \sum_{\text{pole}} \left[\frac{(m^2 p^2 + s^4) e^{ip|\tau''|}}{\{2(p^2 - s^2) + m^2\} 2p} \right]_{p=(2.10)} \\ &= \pi e^{-\frac{m}{2}|\tau''|} \frac{\sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}} (s^2 + m^2) \cos(\sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}} |\tau''|) + \frac{m}{2} (s^2 - m^2) \sin(\sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}} |\tau''|)}{m \sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

1) E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge at the University Press (1927), p. 115.

故に

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) = & \frac{1}{2m\sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau - \tau'') e^{-\frac{m}{2}|\tau''|} \left\{ \sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}} (s^2 + m^2) \cos\left(\sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}} |\tau''|\right) \right. \\ & \left. + \frac{m}{2} (s^2 - m^2) \sin\left(\sqrt{s^2 - \frac{m^2}{4}} |\tau''|\right) \right\} d\tau'', \end{aligned} \quad (2.13)$$

或は (2.7) を使つて元の符号に戻すと,

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu}{M} \sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{M} \right)^2} \right\}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau - \tau'') e^{-\frac{1}{2} \frac{\mu}{M} |\tau''|} \left\{ \sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{M} \right)^2} \left[\frac{\sigma}{M} + \left(\frac{\mu}{M} \right)^2 \right] \right. \\ & \times \cos \left[\sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{M} \right)^2} |\tau''| \right] + \frac{1}{2} \frac{\mu}{M} \left[\frac{\sigma}{M} - \left(\frac{\mu}{M} \right)^2 \right] \sin \left[\sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{M} \right)^2} |\tau''| \right] \right\} d\tau'' \end{aligned} \quad (2.14)$$

を得る.

次に

$$\langle y^2 \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{y_T(t)\}^2 dt, \quad (2.15)$$

及び

$$\langle z^2 \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{z_T(t)\}^2 dt \quad (2.16)$$

によつて導かれる, 所謂 $\{y(t)\}^2$ 及び $\{z(t)\}^2$ の時間平均 $\langle y^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$ を考えると, これらと correlation function との間には

$$2\langle y^2 \rangle = \eta(0), \quad (2.17)$$

及び

$$2\langle z^2 \rangle = \zeta(0) \quad (2.18)$$

という関係があるので, (2.1) と (2.2) とから夫々

$$2\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Y(p) dp, \quad (2.19)$$

及び

$$2\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Z(p) dp \quad (2.20)$$

が得られる. 従つて道路の凹凸のスペクトル $Y(p)$ と振動系の特性とが与えられたとき, 振動系の振幅の 2 乗平均を計算するには, (1.14) を (2.20) に代入して

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2 p^2 + \sigma^2}{(-Mp^2 + \sigma)^2 + \mu^2 p^2} Y(p) dp, \quad (2.21)$$

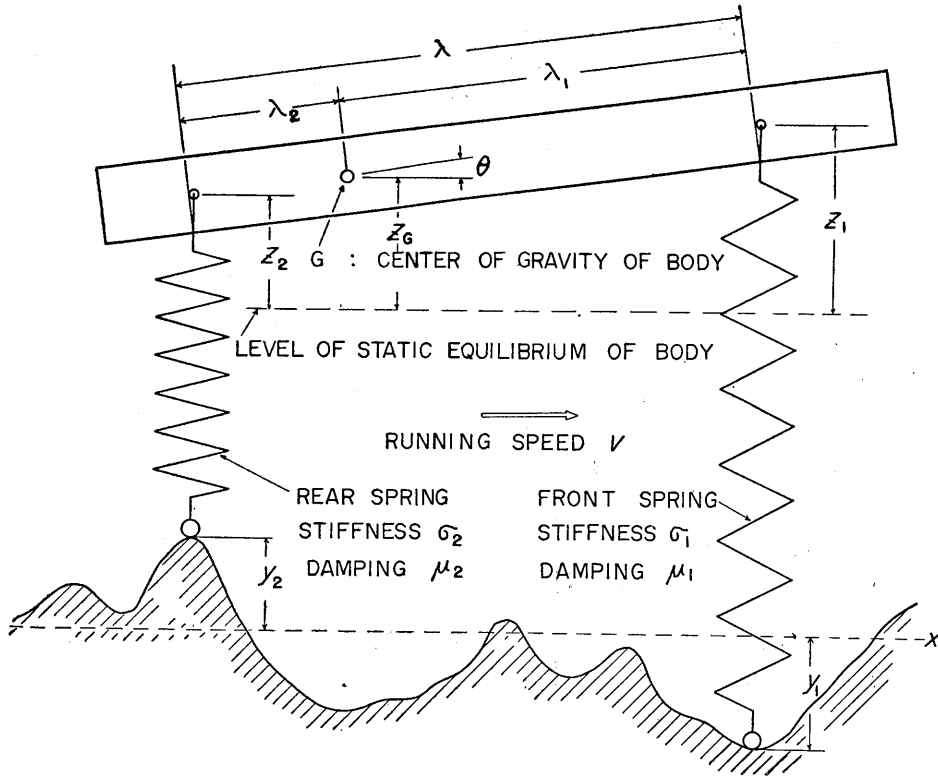
或は (2.7) のおきかえを利用して

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^2 p^2 + s^4}{(p^2 - s^2)^2 + m^2 p^2} Y(p) dp \quad (2.22)$$

に依つて行なえばよい.¹⁾

3. 次に第 1 図に画かれたものよりも稍々実際の走行物体に近い模型として, 第 2 図の振動系を考えよう. 強さ各々 σ_1, σ_2 , 減衰係数 μ_1, μ_2 をもつ, 前及び後ばねの接地点の高さ

1) 附録参照.



第 2 図

を, 平均路面から測つて, 夫々 $y_1(t)$, $y_2(t)$ とし, 前及び後ばねと台車との接続点の上下変位を, 台車の釣合位置 (1 参照) から測つて, $z_1(t)$, $z_2(t)$ とする. 台車の質量を M , 重心を G , G の前及び後ばねからの距離を夫々 λ_1 , λ_2 ($\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$), G の上下変位を z_1 , z_2 と同じ様に測つて z_G と書く. G のまわりの台車の慣性能率を I , 台車のピッチングの角度を, 頭上げを正にとつて θ とし, 釣合の姿勢では台車は水平 ($\theta=0$) で, その他の場合でも θ は常に小さいものと仮定する. 第2図には $y_1 < 0$, y_2 , z_1 , z_2 , z_G , $\theta > 0$ の場合が画かれている. 尚, 次の関係がある.

$$z_G = \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda}, \quad \theta = \frac{z_1 - z_2}{\lambda}. \quad (3.1)$$

この振動系の運動エネルギー K , ポテンシャルエネルギー U , 散逸関数 F は夫々

$$K = \frac{M}{2}(\dot{V}^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{M}{2}\left\{\dot{V}^2 + \frac{(\lambda_1 \dot{z}_2 + \lambda_2 \dot{z}_1)^2}{\lambda^2}\right\} + \frac{I}{2}\frac{(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2}{\lambda^2}, \quad (3.2)$$

$$U = \frac{\sigma_1}{2}(z_1 - y_1)^2 + \frac{\sigma_2}{2}(z_2 - y_2)^2, \quad (3.3)$$

$$\text{及び} \quad F = \frac{\mu_1}{2}(\dot{z}_1 - \dot{y}_1)^2 + \frac{\mu_2}{2}(\dot{z}_2 - \dot{y}_2)^2 \quad (3.4)$$

で与えられるので, LAGRANGE の運動方程式¹⁾

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{z}_j}\right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_j} + \frac{\partial U}{\partial z_j} = 0, \quad j=1, 2 \quad (3.5)$$

に (3.2), (3.3), (3.4) を代入すると

$$\frac{M\lambda_2^2 + I}{\lambda^2} \ddot{z}_1 + \frac{M\lambda_1\lambda_2 - I}{\lambda^2} \ddot{z}_2 + \mu_1 \dot{z}_1 + \sigma_1 z_1 = \mu_1 \dot{y}_1 + \sigma_1 y_1, \quad (3.6)$$

及び

$$\frac{M\lambda_1\lambda_2 - I}{\lambda^2} \ddot{z}_1 + \frac{M\lambda_1^2 + I}{\lambda^2} \ddot{z}_2 + \mu_2 \dot{z}_2 + \sigma_2 z_2 = \mu_2 \dot{y}_2 + \sigma_2 y_2 \quad (3.7)$$

が得られる。(3.6) と (3.7) とを 1 の方法に倣つて FOURIER 変換すると (但し簡単のため脚符 T を除く),

$$\{-p^2(M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_1 + \sigma_1\} \bar{z}_1 - p^2(M\lambda_1\lambda_2 - I)\lambda^{-2} \bar{z}_2 = (ip\mu_1 + \sigma_1) \bar{y}_1, \quad (3.8)$$

$$\text{及び} \quad -p^2(M\lambda_1\lambda_2 - I)\lambda^{-2} \bar{z}_1 + \{-p^2(M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_2 + \sigma_2\} \bar{z}_2 = (ip\mu_2 + \sigma_2) \bar{y}_2 \quad (3.9)$$

に到達し, これを解いて

$$\bar{z}_1 = \frac{\bar{y}_1(ip\mu_1 + \sigma_1)\{-p^2(M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_2 + \sigma_2\} + \bar{y}_2(ip\mu_2 + \sigma_2)p^2(M\lambda_1\lambda_2 - I)\lambda^{-2}}{\{-p^2(M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_1 + \sigma_1\}\{-p^2(M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_2 + \sigma_2\} - p^4(M\lambda_1\lambda_2 - I)^2\lambda^{-4}}, \quad (3.10)$$

$$\bar{z}_2 = \frac{\bar{y}_1(ip\mu_1 + \sigma_1)p^2(M\lambda_1\lambda_2 - I)\lambda^{-2} + \bar{y}_2(ip\mu_2 + \sigma_2)\{-p^2(M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_1 + \sigma_1\}}{\{-p^2(M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_1 + \sigma_1\}\{-p^2(M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_2 + \sigma_2\} - p^4(M\lambda_1\lambda_2 - I)^2\lambda^{-4}} \quad (3.11)$$

が得られる。従つて又ピッチングの角 $\theta(t)$ の変換 $\bar{\theta}(p)$ は

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{y}_1(ip\mu_1 + \sigma_1)(-p^2M\lambda_1\lambda^{-1} + ip\mu_2 + \sigma_2) - \bar{y}_2(ip\mu_2 + \sigma_2)(-p^2M\lambda_2\lambda^{-1} + ip\mu_1 + \sigma_1)}{\{-p^2(M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_1 + \sigma_1\}\{-p^2(M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_2 + \sigma_2\} - p^4(M\lambda_1\lambda_2 - I)^2\lambda^{-4}} \quad (3.12)$$

で与えられる。

ところで $y_1(t)$ と $y_2(t)$ との間には

$$y_2(t) = y_1(t - \lambda/V) \quad (3.13)$$

という関係があるので, 夫々の FOURIER 変換の間にも

$$\bar{y}_2(p) = \exp(-ip\frac{\lambda}{V}) \bar{y}_1(p) \quad (3.14)$$

という式が成り立つ。そこで (3.12) から

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(p) &= \frac{\bar{y}_1(p)}{\lambda} \\ &\times \frac{(ip\mu_1 + \sigma_1)(-p^2M\lambda_1\lambda^{-1} + ip\mu_2 + \sigma_2) - \exp(-ip\lambda/V)(ip\mu_2 + \sigma_2)(-p^2M\lambda_2\lambda^{-1} + ip\mu_1 + \sigma_1)}{\{-p^2(M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_1 + \sigma_1\}\{-p^2(M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + ip\mu_2 + \sigma_2\} - p^4(M\lambda_1\lambda_2 - I)^2\lambda^{-4}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

即ちピッチングのスペクトル $\theta(p)$ は路面のスペクトル $Y(p)$ を使つて次の様に書きあらわされる。

1) E. T. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics*, Cambridge at the University Press (1937), p. 232. 又は妹沢克惟, 振動学, 上巻, 岩波 (1949), p. 34.

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \Theta(p) = Y(p) F(p) \\
& \equiv Y(p) \times \left\{ [\sigma_1(-p^2 M \lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2) - p^2 \mu_1 \mu_2 - \cos(p\lambda/V) \{ \sigma_2(-p^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) - p^2 \mu_1 \mu_2 \} \right. \\
& \quad \left. - \sin(p\lambda/V) p \{ \mu_2(-p^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) + \mu_1 \sigma_2 \}]^2 \right. \\
& \quad \left. + [p \{ \mu_1(-p^2 M \lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2) + \mu_2 \sigma_1 \} - \cos(p\lambda/V) p \{ \mu_2(-p^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) + \mu_1 \sigma_2 \} \right. \\
& \quad \left. + \sin(p\lambda/V) \{ \sigma_2(-p^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) - p^2 \mu_1 \mu_2 \}]^2 \right\} \\
& \quad \times \left\{ [\{ -p^2(M \lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1 \} \{ -p^2(M \lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2 \} - p^2 \mu_1 \mu_2 - p^4(M \lambda_1 \lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4}]^2 \right. \\
& \quad \left. + p^2 [\mu_1 \{ -p^2(M \lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2 \} + \mu_2 \{ -p^2(M \lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1 \}]^2 \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

次に $\Theta(p)$ から

$$\vartheta(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(p) e^{ip\tau} dp \tag{3.17}$$

によつて導かれる “ $\theta(t)$ の correlation function” $\vartheta(\tau)$ を考えると、これは又 (3.16) と (2.3) とによつて、 $y_1(t)$ 又は $y_2(t)$ の correlation function $\eta(\tau)$ を用いて次の様に書きあらわされる。

$$\vartheta(\tau) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ip|\tau-\tau'|} dp. \tag{3.18}$$

或は

$$\vartheta(\tau) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau - \tau'') J(\tau'') d\tau''. \tag{3.19}$$

但し

$$\tau'' \equiv \tau - \tau', \tag{3.20}$$

及び

$$J(\tau'') \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ip|\tau''|} dp. \tag{3.21}$$

$F(p)$ は (3.16) で具体的に示されている。(3.21) は (2.8) を更に複雑にした形をもっている。一般の場合にこの積分を実行するには数値積分に依らねばならぬであろうが、附録に述べる様な特別の場合には解析的方法によつてその近似値を知ることが出来る。

最後に $\theta(t)^2$ の時間平均を $\langle \theta^2 \rangle$ であらわすと (2.19), (2.20) と同じ様に

$$2\langle \theta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(p) dp \tag{3.22}$$

という関係があるので、(3.16) から又

$$2\lambda^2 \langle \theta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Y(p) F(p) dp \tag{3.23}$$

であることが知られる。

附

録

今 (2.22) の特別の場合として、減衰の係数 m が非常に小さく、然も路面のスペクトル $Y(p)$ が p と共にゆるやかに変化する 函数である時には、 $\langle \theta^2 \rangle$ が簡単な形で近似的に与えられることを示して、3 に対してこれから適用しようとする同様な近似計算の準備とする。

先ず m が非常に小さいので、右辺の被積分函数の分数部分は $p^2 = s^2$ のとき非常に大きく、又

$p \rightarrow \pm\infty$ のときかなり速かに零となる。そこで Y が偶函数であることと、 p について急激には変化しないことを考慮すると、(2.22) の積分値はほぼ

$$\langle z^2 \rangle \cong \frac{1}{2} Y(s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^2 p^2 + s^4}{(p^2 - s^2)^2 + m^2 p^2} dp \quad (\text{A.1})$$

によつて与えられるであろうが、(2.9) によれば右辺の積分は $I(0)$ である。即ち

$$\langle z^2 \rangle \cong \frac{\pi}{2} Y(s) \frac{s^2 + m^2}{m} \cong \frac{\pi}{2} Y(s) \frac{s^2}{m} \quad (\text{A.2})$$

が得られる。¹⁾

次に同じ計算をもつと粗い近似で行なつてみよう。それには (A.1) の積分への寄与は $p = \pm s$ の附近に由るものが大部分を占め、それ以外の p の値からの寄与は殆んど問題にならぬであろうということを予想して、重要でない位置にある p^2 をすべて s^2 で代用し、分数式を p の全変域に対して

$$(m^2 s^2 + s^4) / \{(p^2 - s^2)^2 + m^2 s^2\} \quad (\text{A.3})$$

で近似する。²⁾ 更に contour Γ の中に含まれる被積分函数の極の大略の位置 p を見出すために

$$p^2 = s^2 \pm i\epsilon \quad (\epsilon > 0) \quad (\text{A.4})$$

と置く。但し ϵ は非常に小さいものとする。これを (A.3) の分母に入れて

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= m^2 s^2, \\ \text{即ち} \quad \epsilon &= ms \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

を得る。そこで極 p はほぼ (m^2 の項を省略して)

$$p = \pm s + i \frac{m}{2} \quad (\text{A.6})$$

で与えられる。これは正確な値 (2.10) に対応する。そこで積分 (A.1)、即ち $I(0)$ の近似値 I は次の様にして求められる。

$$I = 2\pi i \sum_{\text{pole}} \left\{ \frac{(s^2 + m^2)s^2}{4(p^2 - s^2)p} \right\}_{p=(\text{A.6})} = \pi \frac{(s^2 + m^2)s^2}{m(s^2 + \frac{m^2}{4})} \cong \pi \frac{s^2}{m}, \quad (\text{A.7})$$

但し m^2 の項は省略する。この結果は (A.2) に示された $I(0)$ の近似値と一致している。

さて以上の予備知識から、減衰係数 μ_1 と μ_2 とが同じ程度で非常に小さい時、(3.21) の積分を近似的に評価することを試みよう。(3.16) によつて $F(p)$ の分母 $D(p)$ は $\mu_1^2 \mu_2^2$ の項を省略して次の様に書くことが出来る。

$$\begin{aligned} D(p) &= [p^4 \{ (M\lambda_1^2 + I)(M\lambda_2^2 + I) - (M\lambda_1\lambda_2 - I)^2 \} \lambda^{-4} - p^2 \{ \sigma_1(M\lambda_1^2 + I) + \sigma_2(M\lambda_2^2 + I) \} \lambda^{-2} \\ &\quad + \sigma_1\sigma_2]^2 + p^2 [\mu_1^2 \{ -p^2(M\lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2 \}^2 + 2\mu_1\mu_2 p^4 (M\lambda_1\lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} \\ &\quad + \mu_2^2 \{ -p^2(M\lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1 \}^2], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

或は

$$\begin{aligned} D(p) &= M^2 I^2 \lambda^{-4} (p^2 - \alpha^2)^2 (p^2 - \beta^2)^2 + p^2 [\mu_1^2 \{ -p^2(M\lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2 \}^2 \\ &\quad + 2\mu_1\mu_2 p^4 (M\lambda_1\lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} + \mu_2^2 \{ -p^2(M\lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1 \}^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ここに

$$\alpha^2, \beta^2 \equiv \frac{\sigma_1(M\lambda_1^2 + I) + \sigma_2(M\lambda_2^2 + I)}{2MI} \pm \frac{\sqrt{\{ \sigma_1(M\lambda_1^2 + I) + \sigma_2(M\lambda_2^2 + I) \}^2 - 4MI\lambda^2 \sigma_1 \sigma_2}}{2MI} \quad (\text{A.10})$$

但し複号のうち、 α^2 は負号を、 β^2 は正号をとるものとする。 α^2, β^2 が共に実数であることを証明するには (A.10) の根号の中が負でない事を示せば充分である。根号の中を整理すると

$$(M\lambda_1^2 + I)^2 \sigma_1^2 + 2 \{ (M\lambda_1^2 + I)(M\lambda_2^2 + I) - 2MI\lambda^2 \} \sigma_1 \sigma_2 + (M\lambda_2^2 + I)^2 \sigma_2^2$$

1) この近似法は LIEPMANN による。前出, p. 794, (9) 式。

2) 例えば函数 $f(x) \equiv (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ の $x=1$ 附近の性質は $x=2$ の x には 1 とおいて $-x+1$ という表式で近似されると考える事に相当する。実際 $f(1)=0$, $f'(1)=-1$ まで一致する。

となるので, σ_1 と σ_2 に関する判別式を作れば

$$\{(M\lambda_1^2+I)(M\lambda_2^2+I)-2MI\lambda^2\}^2-(M\lambda_1^2+I)^2(M\lambda_2^2+I)^2-4MI\lambda^2(M\lambda_1\lambda_2-I)^2\leq 0 \quad (\text{証明了}). \quad (\text{A. 11})$$

次に α^2 と β^2 とが共に実数である以上, それらが共に正数であることは (A. 10) から明かであるから, α^2, β^2 の各々の正根を $\alpha, \beta (\beta > \alpha)$ と書くことにしよう. その時 $F(p)$ は $p=\pm\alpha, \pm\beta$ の4点附近で非常に大きな値をとるので, ¹⁾ (3. 21) から

$$J(\tau'') \cong \int_{(-\beta)} F(p) e^{ip|\tau''|} dp + \int_{(-\alpha)} F(p) e^{ip|\tau''|} dp + \int_{(\alpha)} F(p) e^{ip|\tau''|} dp + \int_{(\beta)} F(p) e^{ip|\tau''|} dp \quad (\text{A. 12})$$

と書くことが出来る. ここに $\int_{(\gamma)}$ は $p=r$ 附近だけの積分を示すものとする.²⁾

次に $p=\pm\alpha$ 附近における $F(p)$ の値を評価しよう. 先ず $F(p)$ の分母 $D(p)$ に於て $(p^2-\alpha^2)^2$ 以外の p^2 をすべて α^2 で置きかえて次の近似式を導く.

$$D(p \cong \pm\alpha) \cong M^2 I^2 \lambda^{-4} (p^2 - \alpha^2)^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 + \alpha^2 [\mu_1^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2\}^2 + 2\mu_1 \mu_2 \alpha^4 (M\lambda_1 \lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} + \mu_2^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1\}^2]. \quad (\text{A. 13})$$

又一方 $F(p)$ の分子 $N(p)$ の $p=\pm\alpha$ 附近の値は (3. 16) から定められる. 即ち先ず μ_1, μ_2 を含む項を省略すると

$$\begin{aligned} N(p) &\cong [\sigma_1(-p^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2) - \cos(p\lambda/V) \sigma_2(-p^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)]^2 \\ &\quad + [\sin(p\lambda/V) \sigma_2(-p^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)]^2 \\ &= \sigma_1^2(-p^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)^2 - 2\cos(p\lambda/V) \sigma_1 \sigma_2(-p^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)(-p^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) \\ &\quad + \sigma_2^2(-p^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)^2 \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

が得られる. $M, I, \lambda_1, \lambda_2, \lambda, \sigma_1, \sigma_2$ がそれぞれの単位で1の程度の数値をもつ場合を考えると, $\pm\alpha$ の附近で p の値に僅かな変化 ε があるとき, 函数 $(-p^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2), (-p^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)$ の受ける変化も亦 ε の程度である. それでここではその変化を無視して, $p=\pm\alpha$ の附近では前述の函数を常数 $(-\alpha^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)$ 及び $(-\alpha^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)$ で置きかえて差支えないであろう. これに反して, 函数 $\cos(p\lambda/V)$ に於ては, V はいくらでも小さくなる可能性があるので, たとえ p の変化が ε であつても $\cos(p\lambda/V)$ の変化は1の程度となる可能性がある. そこでこの項を保存して, 我々は $p=\pm\alpha$ の附近で次の近似式に到達する.

$$N(p \cong \pm\alpha) \cong \sigma_1^2(-\alpha^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)^2 - 2\cos(p\lambda/V) \sigma_1 \sigma_2(-\alpha^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)(-\alpha^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) + \sigma_2^2(-\alpha^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)^2. \quad (\text{A. 15})$$

故に結局 (A. 13) と (A. 15) とから

$$\begin{aligned} F(p \cong \pm\alpha) &\cong \left\{ \sigma_1^2(-\alpha^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)^2 - 2\cos(p\lambda/V) \sigma_1 \sigma_2(-\alpha^2 M\lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)(-\alpha^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2^2(-\alpha^2 M\lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)^2 \right\} \\ &\quad \times \left\{ M^2 I^2 \lambda^{-4} (p^2 - \alpha^2)^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 + \alpha^2 [\mu_1^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2\}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\mu_1 \mu_2 \alpha^4 (M\lambda_1 \lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} + \mu_2^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1\}^2] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A. 16})$$

が得られる. この近似函数は原函数と同じく, $p=\pm\alpha$ の附近だけで非常に大きい値をとり, その中間では1の程度の大きさであり, 無限大の近傍では急激に減少して零となる.

そこで $F(p) \exp(ip|\tau''|)$ を $p=\pm\alpha$ の附近だけで積分する代りに, 積分の範囲をひろげてこれを p の $-\infty$ から $+\infty$ まで積分しても, そのためにまぎれこむ誤差は本質的な部分に比べて無視

- 1) α と β とが一致する場合は除外する. そのときは本文の方法を若干修正してほぼ同様に取り扱うことが出来る.
- 2) 無限に大きい p の近くで $F(p)$ は p^{-4} に比例するので無限大を含む積分例えば $\int_k^\infty F(p) \exp(ip|\tau''|) dp$ ($k \gg \beta$) は k^{-3} の程度の量である. k は β と同じ程度であるからこの積分は β^{-3} の程度の大きさをもっている. 又一方後に示す様に, (A. 12) の各項は μ_1^{-1} 又は μ_2^{-1} の程度の大きさをもっている. β が1の程度であり, μ_1, μ_2 が非常に小さいときには, 後者に比べて前者は省略されることになる.

出来るであろう。即ち (A.16) が α の偶関数であることを考慮して

$$J_{(\omega)}(\tau'') \equiv \left(\int_{(-\omega)} + \int_{(\omega)} \right) F(p \cong \pm \alpha) e^{ip|\tau''|} dp \cong \int_{-\infty}^{\infty} F(p \cong \pm \alpha) e^{ip|\tau''|} dp \quad (\text{A.17})$$

とおくことが出来る。次に p 平面の実軸と、原点を中心とする大きい円周の上半分とから成る道筋を時計と反対方向に廻る contour を 2 と同じ様に Γ 、下半分とから成る道筋を時計と同じ方向に廻る contour を Γ' と書くことにして、JORDAN の lemma が成立する様に Γ 又は Γ' の一方を選ぶことにする。一方又 $F(p \cong \pm \alpha)$ の極の位置は (A.13) から次の様にしてその概略の値を求めることが出来る。即ち (A.4) に倣つて、極の位置 p を次の様に仮定する。

$$p^2 = \alpha^2 \pm i\delta \quad (\delta > 0). \quad (\text{A.18})$$

これを (A.13) に入れて

$$\delta^2 = M^{-2} I^{-2} \lambda^4 (\alpha^2 - \beta^2)^{-2} \alpha^2 [\mu_1^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + \sigma_2\}^2 + 2\mu_1\mu_2\alpha^4 (M\lambda_1\lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} + \mu_2^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + \sigma_1\}^2], \quad (\text{A.19})$$

即ち

$$\delta = M^{-1} I^{-1} \lambda^2 (\beta^2 - \alpha^2)^{-1} \alpha [\mu_1^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_1^2 + I)\lambda^{-2} + \sigma_2\}^2 + 2\mu_1\mu_2\alpha^4 (M\lambda_1\lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} + \mu_2^2 \{-\alpha^2 (M\lambda_2^2 + I)\lambda^{-2} + \sigma_1\}^2]^{1/2}, \quad (\text{A.20})$$

従つて特異点の位置 p は、 δ^2 の項を省略して、ほぼ

$$p = \pm \alpha \pm i\delta/2\alpha \quad (\text{A.21})$$

で与えられる。

さて、

$$2 \cos(p\lambda/V) = e^{ip\lambda/V} + e^{-ip\lambda/V} \quad (\text{A.22})$$

を考慮して、 $|\tau''|$ の大きさを次の 2 つの場合にわけて考えよう。i) $|\tau''| \geq \lambda/V$, ii) $|\tau''| < \lambda/V$. 第 1 の場合には (A.17) の被積分関数に含まれる指数関数の冪の ip の係数 $|\tau''|$, $|\tau''| + \lambda/V$, $|\tau''| - \lambda/V$ は何れも正であるから、我々の選ぶべき contour はすべての項を通じて Γ である。従つてその中に横たわる極は

$$p = \pm \alpha + i\delta/2\alpha \quad (\text{A.23})$$

の 2 個であり、(A.17) の $J_{(\omega)}(\tau'')$ は次の様にして求められる。

$$\begin{aligned} J_{(\omega)}(\tau'') &\equiv \left(\int_{(-\omega)} + \int_{(\omega)} \right) F(p \cong \pm \alpha) dp \cong \int_{\Gamma} F(p \cong \pm \alpha) dp \\ &\cong \pi \lambda^4 M^{-2} I^{-2} (\alpha^2 - \beta^2)^{-2} \alpha^{-2} \delta^{-1} \exp(-|\tau''|\delta/2\alpha) \\ &\quad \left\{ \sigma_1^2 (-\alpha^2 M\lambda_1\lambda^{-1} + \sigma_2)^2 \{ \alpha \cos(\alpha|\tau''|) + \delta \sin(\alpha|\tau''|)/2\alpha \} \right. \\ &\quad - \sigma_1\sigma_2 (-\alpha^2 M\lambda_1\lambda^{-1} + \sigma_2) (-\alpha^2 M\lambda_2\lambda^{-1} + \sigma_1) \left[\exp(-\lambda\delta/2\alpha V) \right. \\ &\quad \left. \{ \alpha \cos[\alpha(|\tau''| + \lambda/V)] + \delta \sin[\alpha(|\tau''| + \lambda/V)]/2\alpha \} \right. \\ &\quad \left. + \exp(\lambda\delta/2\alpha V) \{ \alpha \cos[\alpha(|\tau''| - \lambda/V)] + \delta \sin[\alpha(|\tau''| - \lambda/V)]/2\alpha \} \right] \\ &\quad \left. + \sigma_2^2 (-\alpha^2 M\lambda_2\lambda^{-1} + \sigma_1)^2 \{ \alpha \cos(\alpha|\tau''|) + \delta \sin(\alpha|\tau''|)/2\alpha \} \right\}. \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

これに反して第 2 の場合には $\exp[ip(|\tau''| - \lambda/V)]$ の項のみは contour として Γ' を選ぶべきであり、 Γ' の中に含まれる極は

$$p = \pm \alpha - i\delta/2\alpha \quad (\text{A.25})$$

であるから、 $J_{(\omega)}(\tau'')$ は直ちに次の様に書き下される。

$$\begin{aligned} J_{(\omega)}(\tau'') &\cong \pi \lambda^4 M^{-2} I^{-2} (\alpha^2 - \beta^2)^{-2} \alpha^{-2} \delta^{-1} \exp(-|\tau''|\delta/2\alpha) \\ &\quad \left\{ \sigma_1^2 (-\alpha^2 M\lambda_1\lambda^{-1} + \sigma_2)^2 \{ \alpha \cos(\alpha|\tau''|) + \delta \sin(\alpha|\tau''|)/2\alpha \} \right. \\ &\quad - \sigma_1\sigma_2 (-\alpha^2 M\lambda_1\lambda^{-1} + \sigma_2) (-\alpha^2 M\lambda_2\lambda^{-1} + \sigma_1) \left[\exp(-\lambda\delta/2\alpha V) \right. \\ &\quad \left. \{ \alpha \cos[\alpha(|\tau''| + \lambda/V)] + \delta \sin[\alpha(|\tau''| + \lambda/V)]/2\alpha \} + \exp(|\tau''|\delta/2\alpha) \right. \\ &\quad \times \exp[(|\tau''| - \lambda/V)\delta/2\alpha] \{ \alpha \cos[\alpha(|\tau''| - \lambda/V)] - \delta \sin[\alpha(|\tau''| - \lambda/V)]/2\alpha \} \\ &\quad \left. + \sigma_2^2 (-\alpha^2 M\lambda_2\lambda^{-1} + \sigma_1)^2 \{ \alpha \cos(\alpha|\tau''|) + \delta \sin(\alpha|\tau''|)/2\alpha \} \right\}. \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

又 (A.17) に於て α と β とをすべて交換した函数を $J_{(\beta)}(\tau'')$ と書くと, $|\tau''|$ の値のすべての範囲に対して, (A.24) と (A.26) とのすべての α を β と書き換える事によつて $J_{(\beta)}(\tau'')$ の表式を導くことが出来る. 但し $J_{(\beta)}(\tau'')$ に対しては (A.20) を参照して, δ の中に含まれる α と β をも交換せねばならぬことは勿論である. この様にして $J_{(\alpha)}(\tau'')$ と $J_{(\beta)}(\tau'')$ とが求められると, (A.12) と (A.17) とから $J(\tau'')$ はこれら両者の和として計算され, 更にこれを (3.19) に代入すると ϑ を η の重ね合わせとして評価する表式が得られる.

最後に, $Y(p)$ が p と共に緩かに変化する函数である時 θ^2 の時間的平均値 $\langle \theta^2 \rangle$ が上の結果を使つて容易に計算されることを示そう. 先ず (3.23) の被積分函数は p が $\pm\alpha$, $\pm\beta$ の値をとるときにのみ非常に大きな値をとることに注意する. そこで (A.17) を参照し, 且つ $Y(p)$ が p の偶函数であることを併わせ考慮して,

$$2\lambda^2 \langle \theta^2 \rangle \cong Y(\alpha) J_{(\alpha)}(0) + Y(\beta) J_{(\beta)}(0) \quad (\text{A.27})$$

と書くことが出来る. $J_{(\alpha)}(0)$ の値は (A.26) から, $J_{(\beta)}(0)$ の値は $J_{(\alpha)}(0)$ の中の α と β とを交換して導かれる. 即ち小さな量を省略して,

$$J_{(\alpha)}(0) \cong \frac{\pi\lambda^4}{M^2 I^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \alpha \delta} \{ \sigma_1^2 (-\alpha^2 M \lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 (-\alpha^2 M \lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2) (-\alpha^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) \exp(-\lambda \delta / 2\alpha V) \cos(\alpha \lambda / V) + \sigma_2^2 (-\alpha^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)^2 \}. \quad (\text{A.28})$$

$$\text{但し} \quad \delta = M^{-1} I^{-1} \lambda^2 (\beta^2 - \alpha^2)^{-1} \alpha [\mu_1^2 \{-\alpha^2 (M \lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2\}^2 + 2\mu_1 \mu_2 \alpha^4 (M \lambda_1 \lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} + \mu_2^2 \{-\alpha^2 (M \lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1\}^2]^{1/2}. \quad (\text{A.29})$$

及び

$$J_{(\beta)}(0) \cong \frac{\pi\lambda^4}{M^2 I^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \beta r} \{ \sigma_1^2 (-\beta^2 M \lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2)^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 (-\beta^2 M \lambda_1 \lambda^{-1} + \sigma_2) (-\beta^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1) \exp(-\lambda r / 2\beta V) \cos(\beta \lambda / V) + \sigma_2^2 (-\beta^2 M \lambda_2 \lambda^{-1} + \sigma_1)^2 \}. \quad (\text{A.30})$$

$$\text{但し} \quad r = M^{-1} I^{-1} \lambda^2 (\beta^2 - \alpha^2)^{-1} \beta [\mu_1^2 \{-\beta^2 (M \lambda_1^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_2\}^2 + 2\mu_1 \mu_2 \beta^4 (M \lambda_1 \lambda_2 - I)^2 \lambda^{-4} + \mu_2^2 \{-\beta^2 (M \lambda_2^2 + I) \lambda^{-2} + \sigma_1\}^2]^{1/2}. \quad (\text{A.31})$$

(昭和 35 年 5 月 30 日受理)