楕円孔のある異方弾性体の一般二次元問題

樋口, 正一

https://doi.org/10.15017/4743387

出版情報：應用力學研究所所報. 15, pp.199-201, 1960. 九州大学応用力学研究所
バージョン：

寄　書

楕円孔のある異方弾性体の一般二次元問題

樋　口　正　一

等方弾性体の平面歪問題では，通常この平面（x_1x_2 面）に直交する方向（x_3 軸）が一つの主歪の方向であり，同時に一つの主応力の方向でもある．しかし異方弾性体においては必ずしも主応力方向にならない．すなわち，x_1x_2 面に平行な剪断応力 σ_{23}, σ_{31} が必ずしも零ではない．これは弾性対称軸が x_3 軸に一致しない時に起る．

応力，歪が x_3 に無関係になる二次元問題で，しかも σ_{23}, σ_{31} が零でない場合は等方弾性体にも曲げ，振りの問題において起るが，この場合は変位が x_3 に関係するからここには考えない．しかし以下取扱う関数は曲げの応力関数，振りの応力関数と無関係ではない．

これらと異つたも一つの重要な場合は，らせん転位の問題である．これは弾性対称軸がらせん転位の軸（x_3 軸）に一致する場合にも，また等方弾性体の場合にも，上の拡張した意味の平面歪問題になる．

σ_{23}, σ_{31} を生じない場合の解は二つの modify された複素数の関数の和として与えられたが，このより一般な場合の解は，これを始めて取扱つた Eshelby たち[1)]の研究によれば，それが三つになる．すなわち

$$z_r \equiv x_1+\nu_r x_2,\quad z_s \equiv x_1+\nu_s x_2,\quad z_t \equiv x_1+\nu_t x_2$$

（ν_r, ν_s, ν_t は弾性係数によつて表わされる複素定数で適合の条件式から決められることは在来問題と同じ）

のそれぞれの関数

$$Z_r(z_r),\quad Z_s(z_s),\quad Z_t(z_t)$$

と，それらの共役関数との和の形に表わされる．

その後 Stroh[2)] は考察をすすめて変位や応力などの表示式における各項（すなわち，三つの複素関数とそれらの共役関数）の係数間にある関係，さらに歪エネルギーの表示式などを求めた．

これら双方の研究が具体例として扱つたのは転位を含む場合と，スリットを持つ場合であるが，従来の平面問題に適用された方法[3)] はこの一般の二次元問題にも適用できるので，楕円孔を持つ場合（その孔縁に各種の周辺条件を与えることができる）の解も容易に導かれる．つぎに結果を記す．

異方弾性体の一般二次元問題における応力は

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\nu_r^2 Z_r''+\nu_s^2 Z_s''+\nu_t^2 Z_t''+\text{comp. conj.}\\
\sigma_{22}&=Z_r''+Z_s''+Z_t''+\text{comp. conj.}\\
\sigma_{12}&=-\nu_r Z_r''-\nu_s Z_s''-\nu_t Z_t''-\text{comp. conj.}\\
\sigma_{23}&=\mu_r Z_r''+\mu_s Z_s''+\mu_t Z_t''+\text{comp. conj.}\\
\sigma_{31}&=-\mu_r\nu_r Z_r''-\mu_s\nu_s Z_s''-\mu_t\nu_t Z_t''-\text{comp. conj.}
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

によつて算出される．σ_{33} だけは別の条件から定められる（例えば平面歪であれば $\varepsilon_{33}=0$ という条件と上記の各応力値とから）．ここに Z_r'' は Z_r の z_r に関する二階の導関数を示す．μ_r は ν_r などが求められると平衡の条件式から定められる複素定数である．

x_3 軸方向に

---

1) Eshelby, J. D., W. T. Read および W. Shockley, Acta Metallurgica, **1**, 251～259, 1953.
2) Stroh, A. N., Phil. Mag., **3** (8th Ser.), 625～646, 1958.
3) Higuchi, M., Rep. Res. Inst. Elasticity Engng., Kyushu Univ., 1947. その他総括は樋口正一，九州大学応用力学研究所々報，**10**，1～62，1957 にある．

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2=1$$

なる形の楕円孔が貫通している時の解は

$$Z_r'=G_r'+\frac{1}{2\pi i\lambda}\oint\left[\lambda G_r'+\overline{l_rG_r'+m_rG_s'+n_rG_t'}\right]_A^{C(\omega)}\frac{d\omega}{\omega-\zeta_r}$$
$$+\frac{1}{2\pi i\lambda}\oint\left[\int_A^{C(\omega)}\{(\mu_t-\mu_s)q_1+(\mu_t\nu_s-\mu_s\nu_t)q_2+(\nu_t-\nu_s)q_3\}dC\right]\frac{d\omega}{\omega-\zeta_r} \qquad (2)$$

応力関数 Z_r'' は dZ_r'/dz_r として求める．また

$$\lambda\equiv\begin{vmatrix}1&1&1\\ \mu_r&\mu_s&\mu_t\\ \nu_r&\nu_s&\nu_t\end{vmatrix},\qquad \overline{l}_r\equiv\begin{vmatrix}1&1&1\\ \overline{\mu}_r&\mu_s&\mu_t\\ \overline{\nu}_r&\nu_s&\nu_t\end{vmatrix},$$

$$\overline{m}_r\equiv\begin{vmatrix}1&1&1\\ \overline{\mu}_s&\mu_s&\mu_t\\ \overline{\nu}_s&\nu_s&\nu_t\end{vmatrix},\qquad \overline{n}_r\equiv\begin{vmatrix}1&1&1\\ \overline{\mu}_t&\mu_s&\mu_t\\ \overline{\nu}_t&\nu_s&\nu_t\end{vmatrix}.$$

変数 ζ_r と z_r の関係は

$$z_r=\alpha_r\zeta_r+\frac{\beta_r}{\zeta_r} \qquad (3)$$

ただし

$$2\alpha_r\equiv a_1-i\nu_ra_2,\quad 2\beta_r\equiv a_1+i\nu_ra_2.$$

q_1, q_2, q_3 は孔縁の単位面積にはたらく外力の x_1, x_2, x_3 軸の向きの成分で，いずれも x_3 の関数にはなつていないものとする．

孔がない時は上記の解は

$$Z_r'=G_r' \qquad (4)$$

となり，一様張力の場，一様剪断力の場などは一次式

$$G_r'=C_rz_r \qquad (C_r \text{ は複素定数}) \qquad (5)$$

で表わされる．式 (1) に $Z_r''=C_r$ などとおいて一様応力 σ_{11} などを与えれば C_r などは定まる．

自由な楕円孔の場合には解 (2) の第3項はない．しかも一様応力場にあれば式 (5) を用いて

$$Z_r'=C_r\alpha_r\zeta_r-\frac{L_r}{\zeta_r}, \qquad (6)$$

そして

$$L_r\equiv\frac{\overline{l_rC_r\alpha_r+m_rC_s\alpha_s+n_rC_t\alpha_t}}{\lambda}$$

あるいは

$$Z_r''=C_r+\frac{C_r\beta_r+L_r}{\alpha_r\zeta_r^2-\beta_r} \qquad (7)$$

となる．

Z_s'' と Z_t'' は Z_r'' の添字 r, s, t をそれぞれ s, t, r および t, r, s と置き換えた形で表わされる．

スリット（$a_2\to 0$ の極限）の場合は別法で求められているから，ここには $a_2\ll a_1$ ではあるが，スリット尖端の曲率半径

$$\rho=-\frac{a_2^2}{a_1}$$

が有限値を持つ場合について応力関数を記す．スリット尖端から小さい距離 R, 偏角 θ（スリット延長上では $\theta=0$）の点については式 (3) から

$$\alpha_r\zeta_r^2-\beta_r\doteqdot a\sqrt{\frac{2R}{a}(\cos\theta+\nu_r\sin\theta)+\frac{\nu_r^2\rho}{a}} \qquad (8)$$

($a \equiv a_1$, すなわちスリット半長)

となるから

$$Z_r'' = C_r + \frac{D_r}{\sqrt{\frac{2R}{a}(\cos\theta + \nu_r \sin\theta) + \frac{\nu_r^2 \rho}{a}}} \tag{9}$$

この第1項 C_r は一様な応力場によるものである．応力集中が大きい時は無視することができる．なお

$$D_r \equiv \frac{\lambda C_r + \overline{l_r C_r + m_r C_s + n_r C_t}}{2\lambda}$$

である．

(昭和35年7月9日受理)