

鋼材の熱塑性伸縮変形におよぼす加熱—冷却履歴の影響

栖原, 寿郎

<https://doi.org/10.15017/4743384>

出版情報：応用力學研究所所報. 15, pp.185-198, 1960. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



鋼材の熱塑性伸縮変形におよぼす 加熱—冷却履歴の影響

栖 原 寿 郎

概 説

船舶等の構造物部材を加工するに際して、従来の機械的成型法は龐大な設備と労力を必要とするため、これにかわつて能率的な熱塑性加工法すなわち鋼材を部分的に加熱し且冷却する操作で成型するという新しい加工法が最近積極的に取入れられる様になつた。これは大寸法の部材に比較的小さい曲げを与えようとする場合に特に有効である。しかしながらこの方法は未だ科学的基礎を有せず従来の経験丈に基づいて行われているのであつて、現在迄に2, 3の実験結果が発表されているにすぎない。したがつてこの方法による合理的な工作法を確立するためには今後徹底的な研究を行う必要があると思はれる。

著者は以上の目的のために複雑な工程の中で最も単純で又基本的な問題として条材の伸縮加工に際する加熱冷却履歴が残留変形にどの様に影響を与えるかについて考察を行い、実際の工作に当つての一つの原則を示した。

記 号

A	$=\alpha/(\epsilon_0'k)$	θ	$=kT$
α	線熱膨脹係数	θ_c'	$=kT_c'$
b_0	最高温度分布に達した時の加熱域 (strip ①) の巾	θ_c	$=kT_c$
b'	高温部と冷却部の境界, 第5図	k	温度上昇に比例する降伏応力の減少度
b_0'	strip ② が丁度圧縮降伏した時の b' の値	strip ①	最高温度分布に於ける加熱域
b_1'	strip ① の冷却部に於て $\eta=1$ なる線が丁度圧縮降伏した時の b' の値. (32) 式	strip ②	終始常温に保たれている領域
b_2'	$d_1=b_0'$ となつた時の b' の値	σ_1, σ_2	strip ①, strip ② の軸応力
d_1	strip ① 内の圧縮降伏域と弾性域の境界	σ_0'	T_c' 以下の温度に於ける降伏応力
E	ヤング率	T	温度 °C
ϵ_0'	引張降伏時の引張軸方向の弾性歪	T_c	材料が変形抵抗を失う温度 (降伏応力が温度上昇に比例して減少する場合)
ϵ^t	軸方向の全歪	T_c'	" (降伏応力が一定の場合)
$\epsilon_{10}^0, \epsilon_{20}^0$	strip ①, strip ② の軸方向の固有歪	$\dot{W}_{p1}, \dot{W}_{p2}$	strip ①, strip ② の塑性仕事の増分
$\epsilon_{11}^0, \epsilon_{21}^0$	" " " 塑性歪	\dot{x}	変数 x の増分
$\epsilon_{10}^0(\eta)$	冷却部の残留歪	y	$=\epsilon_{10}^0(b')/\epsilon_0'$
$\epsilon_{11}^0(\eta)$	$b_0' < \eta < b'$ の範囲内の残留歪	η	第1図或は第5図による
$\epsilon_{12}^0(\eta)$	$b_1' < \eta < b'$ " "		

§1. 序 論

熱塑性現象の基礎的、又応用的研究は多く発表されているが、応力—歪関係が一般に非線型的特性を持ち、且つ材料の物理常数が温度と共に変化するために、取扱いが極めて複雑困難となり、応用的研究は殆んど特定の試験実測例についての数値計算による解析であ

* 石川島重工造船部；“線状加熱板曲加工法”，石川島技報，第11巻第35号，第13巻第40号，41号。

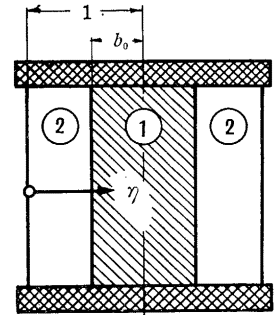
つて、これ等のみから現象の全貌を見渡す事は困難である。即ち現象を支配する因子例えば加熱冷却過程等を変化させる事により場合によつては小数の計算例からは予測出来ない現象があらわれる可能性があり、それ等因子を広範囲にわたつて変化させた場合の研究が必要となる。例えば最高温度分布が同じであつてもその温度迄加熱する過程或いはその温度から冷却する過程を変える事により冷却後の部材に縮みの残留変形を生ずる事も亦反対に伸びの残留変形を生ずる事もある。本研究に於いては以上の観点に基づいて実際例の定量的な数値計算に重点をおかず、先づ現象の特性を失わない範囲で出来るだけ問題を単純化して理論解析を行いその定性的結果を求めてみた。

1. 変形に関する Navier の仮定

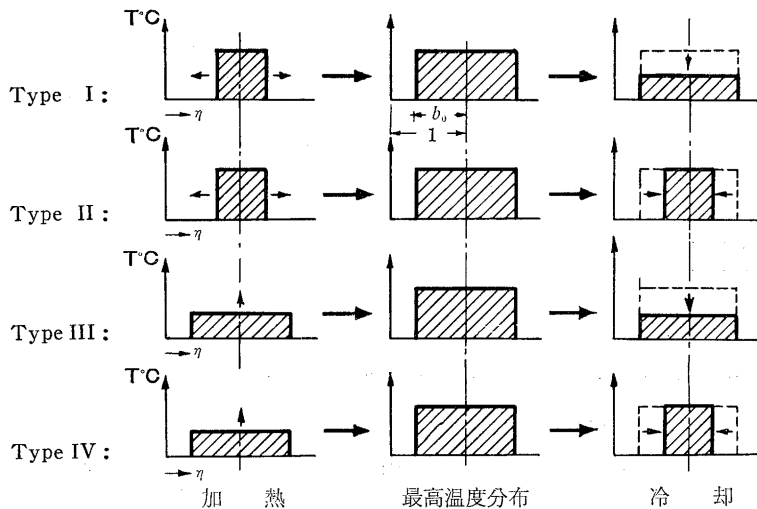
巾に比べて充分長さの長い条材を考え、各断面は変形過程を通じて常に平面に保たれ、且つ変形は伸縮のみで曲げはおこらないものとする。第 1 図はその一部分を取り出して考えたもので、温度分布は当然長軸に関して左右対称である。

2. 温度分布に関する仮定

実際の加工に際する加熱冷却法は一定ではなく、温度分布も複雑となる故、ここでは条材中の温度変化をそれ等の extreme case と考えられる 4 種類に限定し、その各々の場合に生ずる変形を比較して履歴の効果に関する一般的考察を行うことにする。第 2 図は 4 種類の Type の温度変化を図示したもので、Type I の加熱過程は条材の中心から一定温度 T_c' の高温部が左右に拡がって、 b_0 の巾に達して、この状態が最高温度分布となる。更に冷却過程は巾 b_0 を一定に保



第 1 図

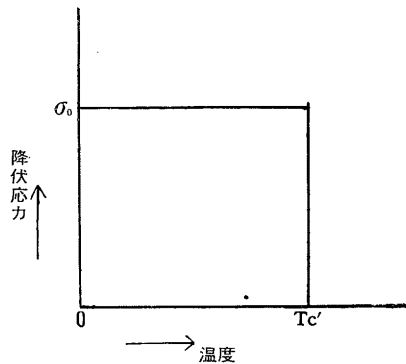


第 2 図

ちながら加熱された部分の温度を一様に冷却して常温に到らしめるものである。又 Type II の加熱は Type I と同じであるが冷却過程は加熱過程とは逆に左右から冷却して高温部分の範囲を縮小してゆく型である。ただしこの場合高温部分の温度は T_0' に保たれるものとする。Type III は b_0 の範囲の温度を一様に上昇させて、Type I, II と同じ最高温度分布に到らしめた後 Type I と同様な冷却を行う。最後に Type IV は Type III と同じ加熱過程をたどり Type II と同様な方法で冷却を行うものである。

3. 機械的および熱的常数に関する仮定

現在取扱う問題に於いては熱膨脹に伴う材料の塑性的挙動が最も支配的であり、特に加熱部の塑性歪が大体熱膨脹歪の order になる様な場合に重点をおいて論ずることにして、弾性および塑性歪以外の歪を無視する。又材料を完全弾塑性体と見做して、応力—歪関係は Prandtl-Reuss の式を満足するものとする。又降伏応力は高温になるにつれ減少して、約 700°C で 0 となるがここでは簡単のため、温度が上昇してある一定の温度 T_0' に達するまでは不変でこの温度を越えると突然 0 となるものとする。(第 3 図)



第 3 図

§ 2. 基礎方程式

最高温度分布に到達した時の条材を strip ① および ② にわけ、① の温度分布はこの瞬間には一様で、② は過程を通じて 0°C に保たれるものとする。(第 1 図) 第 2 図に示した如く、最高温度分布に到る迄に ① の温度分布は変化する故、① に生ずる塑性歪は strip の中にわたつて一様には分布しない。したがって ① の軸応力は必ずしも一様ではない。以上の点および降伏応力の温度依存性を第 3 図の様に仮定すると、基礎方程式は次の様になる。

$$\epsilon^t = \frac{\sigma_1}{E} + \epsilon_1^p + \alpha T + \epsilon_1^0 = \frac{\sigma_2}{E} + \epsilon_2^p + \epsilon_2^0 \tag{1}$$

$$\dot{\epsilon}^t = \frac{\dot{\sigma}_1}{E} + \dot{\epsilon}_1^p + \alpha \dot{T} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} + \dot{\epsilon}_2^p \tag{2}$$

strip ① においては

a) $\theta < \theta_0'$ の時

$$\dot{\epsilon}_1^p = -\frac{\dot{W}_{p1}}{(\sigma_0')^2} \sigma_1$$

ここで

$$\dot{W}_{p1} = \begin{cases} 0, & \text{但し } \bar{\sigma}_1 < \sigma_0' \text{ 或は } \bar{\sigma}_1 = \sigma_0' \text{ で且つ } \dot{\bar{\sigma}}_1 < 0 \\ \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^p, & \text{但し } \bar{\sigma}_1 = \sigma_0' \text{ で且つ } \dot{\bar{\sigma}}_1 = 0 \end{cases}$$

(3)

ただし $\bar{\sigma}_1 = |\sigma_1|, \dot{\bar{\sigma}}_1 = \frac{\sigma_1 \dot{\sigma}_1}{|\sigma_1|}$

b) $\theta \geq \theta_c'$ の時

$$\sigma_1 = \dot{\sigma}_1 = 0 \quad (4)$$

strip ② では

a) $\theta < \theta_c'$ の時

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_2^p &= \frac{\dot{W} p_2}{(\sigma_0')^2} \sigma_2 \\ \text{ここで} \\ \dot{W} p_2 &= \begin{cases} 0, \text{ 但し } \bar{\sigma}_2 < \sigma_0' \text{ 或は } \bar{\sigma}_2 = \sigma_0' \text{ で且つ } \dot{\bar{\sigma}}_2 < 0 \\ \sigma_2 \dot{\epsilon}_2^p, \text{ 但し } \bar{\sigma}_2 = \sigma_0 \text{ で且つ } \dot{\bar{\sigma}}_2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\text{ただし } \bar{\sigma}_2 = |\sigma_2|, \quad \dot{\bar{\sigma}}_2 = \frac{\sigma_2 \dot{\sigma}_2}{|\sigma_2|}$$

b) $\theta \geq \theta_c'$ の時

$$\sigma_2 = \dot{\sigma}_2 = 0 \quad (6)$$

力の釣合条件から

$$\int_0^{1-b_0} \sigma_2 d\eta + \int_{1-b_0}^1 \sigma_1 d\eta = 0 \quad (7)$$

力の増分の釣合条件は

$$d\left(\int_0^{1-b_0} \sigma_2 d\eta\right) + d\left(\int_{1-b_0}^1 \sigma_1 d\eta\right) = 0 \quad (8)$$

§ 3. 最高温度分布に於ける塑性歪に及ぼす加熱履歴の影響

既に述べた 4 種類の型を分解して考えると、加熱履歴は第 2 図の Type I, Type II は共通で、加熱域が左右に拡大して行く型であり、Type III, Type IV は加熱域の大きさは一定で温度が一樣に増大する型である。又冷却履歴では Type I, Type III が高温域の大きさが一定で温度が一樣に降下する型で、Type II, Type IV は高温域が左右から縮小する型である。従つて加熱履歴については加熱域拡大型と一樣加熱型の二つ、又冷却履歴は高温域縮小型と一樣冷却型の二つについて塑性歪を解析すれば、Type I ~ IV はこれ等の組合せから容易に求める事が出来る。

1. 加熱域拡大型

前節に述べた仮定にしたがうと、加熱域は温度 T が T_c' 以上で応力は零であり、又第 2 図に示した如く高温、常温の境界では不連続的に変化している。従つてこの加熱法を用いると、常温部の応力も絶えず零なる故、加熱域の塑性歪は $-\alpha T$ に等しい。

即ち T_c' 以上の温度 T_c' 迄加熱すると

$$\left. \begin{aligned} \text{全歪 } \frac{\epsilon_t}{\epsilon_0} &= 0, \\ \text{① の塑性歪 } \frac{\epsilon_1^p}{\epsilon_0} &= -A\theta \end{aligned} \right\} (9)$$

2. 一樣加熱型

(1) から

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0'} = \frac{\sigma_1}{E\varepsilon_0'} + \frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0'} + A\theta = \frac{\sigma_2}{E\varepsilon_0'} + \frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_0'}, \quad (\varepsilon_1^e = \varepsilon_2^e = 0) \quad (10)$$

$$(7) \text{ から } b_0 \sigma_1 + (1-b_0) \sigma_2 = 0 \quad (11)$$

$$(8) \text{ から } b_0 \dot{\sigma}_1 + (1-b_0) \dot{\sigma}_2 = 0 \quad (12)$$

今 T_0' 以下の温度に於ける降伏応力を σ_0 とし, $\sigma_1 = \sigma_0'$, $\sigma_2 = \sigma_0'$ の場合を考えると (11) から

$$b_0 = \frac{1}{2} \quad (13)$$

$b_0 < \frac{1}{2}$ では ② の降伏がおこらず, $b_0 > \frac{1}{2}$ では ① の降伏がおこらない.

(2), (3), (5) 及び (12) を用いると,

$$1) \quad \sigma_1 = -\sigma_0', \quad 0 < \sigma_2 < \sigma_0', \quad b_0 = \frac{1}{2}$$

$\dot{\theta} > 0$ なる時 ① loading ② elastic

$\dot{\theta} < 0$ なる時 ① unloading ② elastic

$$2) \quad 0 < \sigma_1 < -\sigma_0', \quad \sigma_2 = \sigma_0', \quad b_0 = \frac{1}{2}$$

$\dot{\theta} > 0$ なる時 ① elastic ② loading

$\dot{\theta} < 0$ なる時 ① elastic ② unloading

以上の関係及び (10), (11) を用い, 温度上昇の過程を追つて計算する. 先ず $b-\theta$ 面は弾性域及び塑性域 I, II の三つに分類される. (第4図) 塑性域 I ($b_0 < \frac{1}{2}$) では $\sigma_1 = -\sigma_0'$ なる故 (11) より

$$\frac{\sigma_2}{E} = \frac{b_0}{1-b_0} \varepsilon_0'$$

これを (10) に代入し, $\varepsilon_2^p = 0$ とすると

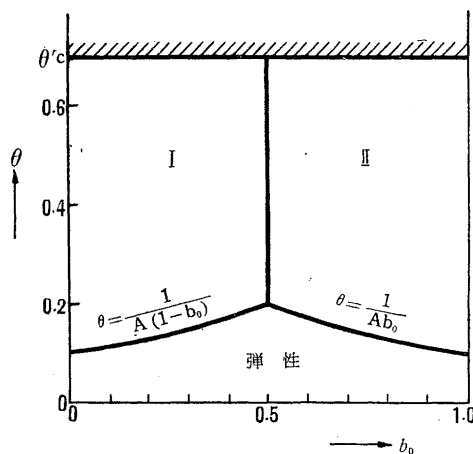
$$-\frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0'} = \frac{1}{1-b_0} - A\theta \quad (14)$$

弾塑性境界線方程式は $\varepsilon_1^p = 0$ とおいて

$$\theta = \frac{1}{A(1-b_0)}$$

温度が上式であらわされる値より更に上昇して遂に θ_0' を超えると, ① の変形抵抗は零になる故, 同時に ② の応力も零になる. しかるにこの領域では, 温度上昇の過程を通じて ② に塑性変形を生じない故, 最終的全歪 ε' は零である. 故に ① の塑性歪 $\varepsilon_1^p = -\varepsilon_0' A\theta$ ($\theta > \theta_0'$) である. 次に塑性域 II ($b_0 > \frac{1}{2}$) では $\sigma_2 = \sigma_0'$ なる故, (11) より

$$\frac{\sigma_1}{E} = -\frac{1-b_0}{b_0} \varepsilon_0'$$



第 4 図

これを (10) に代入し, $\epsilon_1^p=0$ とすると

$$\frac{\epsilon_2^p}{\epsilon_0'} = -\frac{1}{b_0} + A\theta \quad (15)$$

弾塑性境界線方程式は $\epsilon_2^p=0$ において

$$\theta = \frac{1}{Ab_0}$$

更に温度が上昇して θ_c' を超えると, 前同様 ① の変形抵抗は零になり, ② の応力も零になる. 然るに温度が θ_c' に到達した瞬間の ② の塑性歪は (15) から

$$\frac{\epsilon_2^p}{\epsilon_0'} = -\frac{1}{b_0} + A\theta_c' \quad (16)$$

であるから, $\theta > \theta_c'$ の時の system の全歪 ϵ は (16) 式の ϵ_2^p に等しい. 即ち $\theta > \theta_c'$ ならしめると

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq b_0 \leq \frac{1}{2} \text{ の時は system の全歪} \equiv \frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'} = 0, \text{ ① の塑性歪} \equiv \frac{\epsilon_1^p}{\epsilon_0'} = -A\theta \\ 1 \geq b_0 \geq \frac{1}{2} \text{ の時は} \left\{ \begin{array}{l} \text{system の全歪} \equiv \frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'} = \left(-\frac{1}{b_0} + A\theta_c'\right) \\ \text{① の塑性歪} \equiv \frac{\epsilon_1^p}{\epsilon_0'} = -\frac{1}{b_0} - A(\theta - \theta_c') \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (17)$$

である. ここでは $A\theta_c' = 7$ とする.*

§ 4. 塑性歪に及ぼす冷却履歴の影響

1. 高温域縮小型

この方法により冷却する型は, 高温部分が次第に縮小しながらその跡の冷却部に残留歪を残してゆく型であつて, 各瞬間毎に高温部と冷却部の境界線に残されてゆく残留歪の大きさは, その瞬間の system の全歪によつて決定されるべきである. 従つて system の変形を求める為には, 現在迄に述べた種々な場合の如く, 単に力の釣合条件と変位の連続条件丈けから直接求める事は出来ないで, 各瞬間に於ける残留歪の発生を追跡してゆかねばならない. 又この残留歪が満足する方程式は上に述べた理由から当然非線型となる. 幸いな事に, 本論で取扱う問題に於ては容易にその解を求める事が出来るのであつて, 降伏域の拡大に伴つて, 次に述べる三つの段階に分けて計算を進めてゆく事にする. 即ち冷却開始前の常温部を strip ②, 又高温部を strip ① として, 1) 第 1 段階……strip ② が降伏しない場合, 2) 第 2 段階……strip ② が圧縮降伏した場合, 3) 第 3 段階……圧縮降伏域が strip ② 丈けでなく strip ① に迄拡がった場合の三つである.

1) 第 1 段階 (strip ② が降伏しない場合)

本節においては便宜上 strip ② の中の b_0 を 1 とし, 冷却が進行する方向に座標の正

* 栖原寿郎. 鋼材の熱塑性加工に関する研究 (その 1), 造船協会論文集, 第 103 号, 233 頁.

の値をとり、高温部と冷却部の境界の位置を b' とする。(第5図) 基礎方程式は (1) 式より

$$\epsilon = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma_1(\eta)}{E} + \epsilon_{10}(\eta) \quad (18)$$

ただし $\epsilon_{10}(n)$ は冷却部の残留歪である (7) 式より

$$\sigma_2 + \int_1^{b'} \sigma_1 d\eta = 0 \quad (19)$$

又高温部、冷却部の境界に於いて高温部の温度が充分高い時は

$$\sigma_1(b') = E\epsilon_0' \quad (20)$$

となる。(18) より $\frac{\sigma_1(\eta)}{E} = \frac{\sigma_2}{E} - \epsilon_{10}(\eta)$ となり、これを (19) に代入して

$$\frac{\sigma_2}{E} b' - \int_1^{b'} \epsilon_{10}(\eta) d\eta = 0$$

更に (18) 及び (20) を用いて

$$\epsilon_0' b' + b' \epsilon_{10}(b') - \int_1^{b'} \epsilon_{10}(\eta) d\eta = 0$$

両辺に b' について微分すると

$$\frac{d\epsilon_{10}(b')}{db'} = -\frac{\epsilon_0'}{b'} \quad (21)$$

又 $b'=1$ なる時 $\epsilon_{10}(1) = -\epsilon_0'$ なる故、(21) より

$$\epsilon_{10}(b') = -\epsilon_0'(1 + \log b')$$

故に

$$1 \leq \eta \leq b' \text{ で}$$

$$\epsilon_{10}(\eta) = -\epsilon_0'(1 + \log \eta) \quad (22)$$

又 (18) から

$$\frac{\sigma_2}{E\epsilon_0'} = -\log b'$$

$$\frac{\sigma_1(\eta)}{E\epsilon_0'} = 1 - (\log b' - \log \eta) \quad (23)$$

及び

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_0'} = -\log b' \quad (24)$$

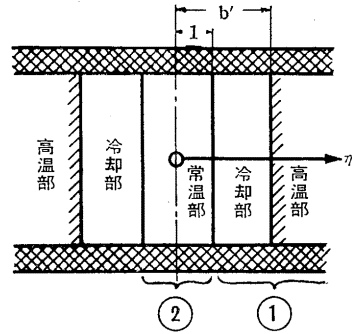
次に strip ② が丁度圧縮降伏応力に達した時の b' を b_0' とすると、(23) の第1式から

$$\log b_0' = 1 \text{ 即ち } b_0' = 2.718\cdots \quad (25)$$

となる

2) 第2段階 (strip ② が圧縮降伏した場合)

1) の段階につづいて発生する状態は、strip ② が圧縮降伏した状態である。



第5図

この時は少くとも $b' \geq b_0'$ でなければならぬ。従つて基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^t &= -\varepsilon_0' + \varepsilon_2^b & (0 \leq \eta \leq 1) \\ &= \frac{\sigma_1(\eta)}{E} + \varepsilon_{10}^e(\eta) & (1 \leq \eta \leq b_0) \\ &= \frac{\sigma_1(\eta)}{E} + \varepsilon_{11}^e(\eta) & (b_0' \leq \eta \leq b') \\ \sigma_1(b') &= E\varepsilon_0' & (\eta = b') \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ただし 1) より $\varepsilon_{10}^e(\eta) = -\varepsilon_0(1 + \log \eta)$, 又 $\varepsilon_{11}^e(\eta)$ は $b_0' < \eta < b'$ 間の残留歪である。又 (19) 式は

$$E\varepsilon_0' + \int_1^{b_0} \sigma_1 d\eta + \int_{b_0'}^{b'} \sigma_1 d\eta = 0 \quad (27)$$

である。(26) を (27) に代入すると、前と全く同様な方法で

$$\frac{d\varepsilon_{11}^e(b')}{db'} = -\frac{\varepsilon_0'}{b'-1} \quad (28)$$

初期条件は (25) を考慮して

$$b' = b_0 \text{ の時 } \varepsilon_{11}^e(b_0') = \varepsilon_{10}^e(b_0') = -\varepsilon_0'(1 + \log b_0') = -2\varepsilon_0',$$

これを解くと

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}^e(b') &= -\varepsilon_0' \{2 - \log(b_0' - 1) + \log(b' - 1)\} \\ \text{故に } b_0' \leq \eta \leq b' \text{ で} \\ \varepsilon_{11}^e(\eta') &= -\varepsilon_0' \{2 - \log(b_0' - 1) + \log(\eta - 1)\} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

これを (26) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_2}{E} &= -\varepsilon_0' & (0 \leq \eta \leq 1) \\ \frac{\sigma_1(\eta)}{E\varepsilon_0'} &= \log(b_0' - 1) - \log(b' - 1) + \log \eta & (1 \leq \eta \leq b_0) \\ \frac{\sigma_1(\eta)}{E\varepsilon_0'} &= 1 - \log(b' - 1) + \log(\eta - 1) & (b_0' \leq \eta \leq b') \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\text{及び } \frac{\varepsilon^t}{\varepsilon_0'} = -\{1 - \log(b_0' - 1) + \log(b' - 1)\} \quad (31)$$

次に strip ① の冷却部に於いて、 $\eta = 1$ なる線が丁度圧縮降伏応力に達した時の b' を b_1' であらわす。(30) の第 1 式から

$$\log \frac{b_1' - 1}{b_0' - 1} = 1, \quad b_1' = 5.671 \dots \dots \quad (32)$$

3) 第 3 段階 (圧縮降伏域が strip ② だけでなく、strip ① 迄拡がった場合)

更に 2) の段階につづいて発生する状態は、圧縮降伏域が strip ① 迄拡がった状態である。前と同様に、この時は又 $b' \geq b_1'$ でなければならぬ。今圧縮降伏域の境界線を d_1 と

し、 $b_0' > d_1 \geq 1$ の範囲を考える。又 $b' > \eta > b_0'$ の間の残留歪を $\varepsilon_{12}^\circ(\eta)$ とすると、前と同様に

$$\begin{aligned}
 \varepsilon' &= -\varepsilon_0' + \varepsilon_2^p & (0 \leq \eta \leq 1) \\
 &= -\varepsilon_0' + \varepsilon_{10}^\circ(\eta) + \varepsilon_1^p(\eta) & (1 \leq \eta \leq d_1) \\
 &= \frac{\sigma_1(\eta)}{E} + \varepsilon_{10}^\circ(\eta) & (d_1 \leq \eta \leq b_0') \\
 &= \frac{\sigma_1(\eta)}{E} + \varepsilon_{11}^\circ(\eta) & (b_0' \leq \eta \leq b_1') \\
 &= \frac{\sigma_1(\eta)}{E} + \varepsilon_{12}^\circ(\eta) & (b_1' \leq \eta \leq b') \\
 \sigma_1(b') &= E\varepsilon_0' & (\eta = b') \\
 \sigma_1(d_1) &= -E\varepsilon_0' & (\eta = d_1)
 \end{aligned} \tag{33}$$

ただし $\varepsilon_{10}^\circ(\eta)$ 及び $\varepsilon_{11}^\circ(\eta)$ は (22), (29) で求めた通りである。次に (19) 式は

$$-E\varepsilon_0'd_1 + \int_{d_1}^{b_0'} \sigma_1 d\eta + \int_{b_0'}^{b_1'} \sigma_1 d\eta + \int_{b_1'}^{b'} \sigma_1 d\eta = 0 \tag{34}$$

(33) と (34) より

$$\varepsilon_0'(d_1 + b' + 2b_1' - 1) + b'\varepsilon_{12}^\circ(b') - \int_{b_1}^{b'} \varepsilon_{12}^\circ(\eta) d\eta = 0$$

両辺を b' について微分すると

$$b' \frac{d\varepsilon_{12}^\circ(b')}{db'} + \varepsilon_0' \frac{dd_1}{db'} + \varepsilon_0' = 0 \tag{35}$$

然るに (33) から $-\varepsilon_0' \log d_1 = 3\varepsilon_0' + \varepsilon_{12}^\circ(b')$ が求められ、これを両辺微分する事により

$$\varepsilon_0' \frac{dd_1}{db'} = -d_1 \frac{d\varepsilon_{12}^\circ(b')}{db'}$$

が与えられる。以上の2式を用い、 $\frac{\varepsilon_{12}^\circ(b')}{\varepsilon_0'} \equiv y$ とすると、(35) 式は

$$\frac{dy}{db'} = -\frac{1}{b' - e^{-(3+y)}} \tag{36}$$

となる。初期条件は $b' = b_1'$ の時

$$y(b') \equiv \frac{\varepsilon_{12}^\circ(b')}{\varepsilon_0'} = -\{2 - \log(b_0' - 1) + \log(b_1' - 1)\} = -3$$

である故、(36) の解は

$$b' = (3 + y + b_1')e^{-(3+y)} \tag{37}$$

ただし $y = \frac{\varepsilon_{12}^\circ(b')}{\varepsilon_0'}$

又 $d_1 = e^{-(3+y)}$ (38)

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_2}{E} &= -\varepsilon_0' & (0 \leq \eta \leq 1) \\
 \frac{\sigma_1}{E} &= -\varepsilon_0' & (1 \leq \eta \leq d_1) \\
 \frac{\sigma_1}{E} &= \varepsilon_0' \{y(b') + 2 + \log \eta\} & (d_1 \leq \eta \leq b_0') \\
 \frac{\sigma_1}{E\varepsilon_0'} &= y(b') + 3 - \log(b_0' - 1) + \log(\eta - 1) & (b_0' \leq \eta \leq b_1') \\
 \frac{\sigma_1}{E\varepsilon_0'} &= y(b') + 1 - y(\eta) & (b_1' \leq \eta \leq b') \\
 \frac{\varepsilon^t}{\varepsilon_0'} &= 1 + y(b') &
 \end{aligned} \tag{39}$$

d_1 が次第に拡大して $d_1 = b_0'$ に到達した時の値を b_2' とすると, (38) 及び (25) から

$$-\{3 + y(b_2')\} = \log b_0' = 1$$

故に (37) から

$$b_2' = (-1 + b_1')b_0' = 12.696$$

即ち 3) に於ける解は $b_2' \geq b' \geq b_1'$ の範囲で成立つものである。

最後に以上の降伏域の存在を証明する事にする。

2) の場合: (27) から

$$\int_1^{b_0'} \sigma_1 d\eta + \int_{b_0}^{b'} \dot{\sigma}_1 d\eta + \sigma_1(b')b' = 0$$

又 (26) から

$$\dot{\varepsilon}_2^p = \frac{\dot{\sigma}_1(\eta)}{E}$$

以上 2 の式及び (26) から

$$E\dot{\varepsilon}_2^p(b_0' - 1) + E\dot{\varepsilon}_2^p(b' - b_0') + E\varepsilon_0'b' = 0$$

故に
$$\dot{\varepsilon}_2^p = -\frac{\varepsilon_0'}{b-1} b'$$

従つて $b' > 0$ なる時に $\dot{\varepsilon}_2^p < 0$ である。

又 $\sigma_2 = -\sigma_0'$ より (5) の \dot{W}_{p2} は

$$\dot{W}_{p2} = \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2^p > 0 \quad \text{又} \quad \dot{\sigma} = 0$$

即ち strip ② は loading である。3) の場合も全く同様に証明する事が出来る。

2. 一様冷却型

(1) から

$$\frac{\varepsilon^t}{\varepsilon_0'} = \frac{\sigma_1}{E\varepsilon_0'} + \frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0'} - A\theta = \frac{\sigma_2}{E\varepsilon_0'} + \frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_0'}, \quad (\varepsilon_1^t = \varepsilon_2^t = 0) \tag{41}$$

とする。

(7) から
$$b_0\sigma_1 + (1-b_0)\sigma_2 = 0 \tag{42}$$

以下第3節2と全く同様な方法で解を求めると、冷却後の応力及び全歪は $0 \leq b_0 \leq \frac{1}{2}$ の時は

$$\sigma_1 = \sigma_0', \quad \sigma_2 = -\frac{b_0}{1-b_0}\sigma_0', \quad \frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'} = -\frac{b_0}{1-b_0} \tag{43}$$

$1 \geq b_0 \geq \frac{1}{2}$ の時は

$$\sigma_1 = \left(\frac{1}{b_0} - 1\right)\sigma_0', \quad \sigma_2 = -\sigma_0', \quad \frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'} = \frac{1}{b_0} - A\theta_0' - 1 \tag{44}$$

ただし現在の場合、加熱部の最初の温度を T_0' 以上即ち $A\theta_0' = 7$ 以上であるとする。

§5. 4種の基本型加熱—冷却法とそれ等に依る条材の残留歪

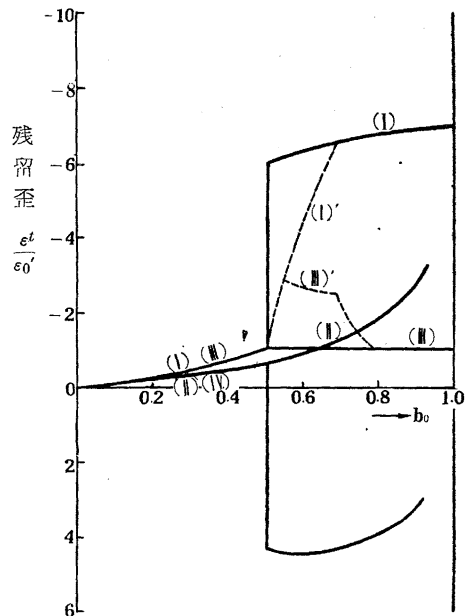
§3, §4 に於いては、加熱及び冷却履歴の特殊の問題に就いて解析を行つたが、本節では其れ等を組合せて、本章の最初に述べた4種類の基本型加熱—冷却法(第2図)を用いた場合の条材の残留歪を計算し、其れ等を比較する事によつて、履歴の影響に関する考察を行う事にする。

1. Type I (第2図):

この Type は加熱が拡大して最高温度分布に到達し、其の後は一様に冷却する Type である。最高温度分布に於いて strip ① に生ずる塑性歪 ϵ_1^p は、第3節(9)式で与えられた通りで $\frac{\epsilon_1^p}{\epsilon_0'} = A\theta (\theta > \theta_0')$ 、その時の system の全歪 $\epsilon^t = 0$ である。又冷却は §4.2 で求めた結果を用いばよい。従つて完全に冷却した後の system の応力及び全歪 ϵ^t は(43), (44)で与えられる。これを図示したものが第6図の(I)線である。この図に於いて縦軸は system の残留歪 $\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'}$ で、横軸は最大加熱巾 b_0 である。

2. Type II:

この Type は Type I と同じ加熱法で、即ち加熱域が拡大して最高温度分布に達し、其の後冷却に際しては温度 θ を一定としたまま、その高温域が縮小して結局全体が冷却される Type である。Type I と同様最高温度分布に於ける strip ① の塑性歪は $-\epsilon_0' A\theta$ で、その時の全歪 $\epsilon^t = 0$ である。次に冷却の場合は



第6図 残留歪

§ 4.1 に求めた結果に従うのであつて、冷却中の残留応力及び system の全歪 ϵ^t は冷却境界 b' により異なり、夫々 (23), (24) ($b_0' \geq b' \geq 1$); (30), (31) ($b_1' \geq b' > b_0'$); (39), (40) ($b_2' \geq b' \geq b_1'$) で与えられる。

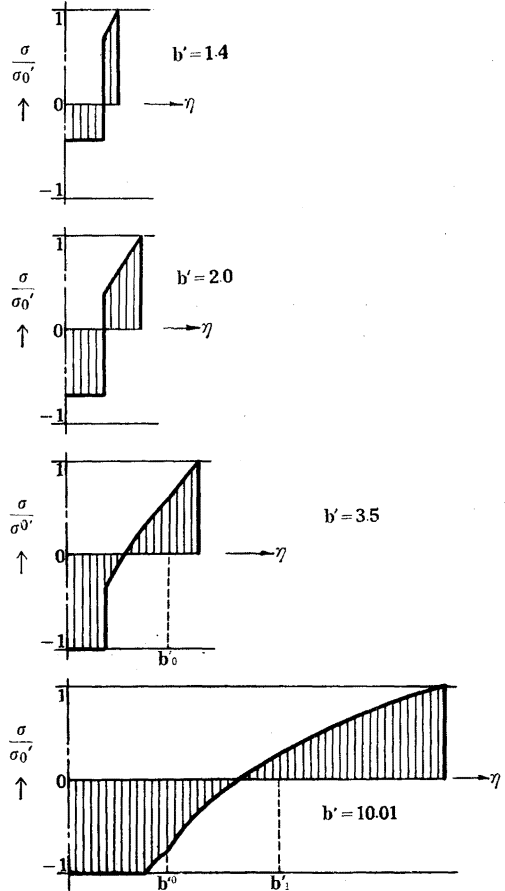
第 7 図は冷却が進行するにつれて、system の残留応力が変化する状態を例によつて図示したものである。尚冷却が b' 迄進行した瞬間の応力及び歪分布は、全巾が b' の条材が冷却完了された状態に等しい。従つてこの b' を Type I の場合と同じ b_0 に換算して、これと冷却後の system の全歪 $\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'}$ との関係を示したものが第 6 図の (II) 線である。Type I と Type II の残留歪の大きさが $b_0 > \frac{1}{2}$ では甚しく違う事が明かに示された。

3. Type III:

前の二つの Type と異なり、この場合は加熱に際して加熱域の大きさが一定のまま温度が一樣に増大して最高温度分布に到達する。又冷却の場合も同様に、高温域の大きさを變えずに一樣に冷却して常温に到る Type である。最高温度分布に達した時の応力は勿論 0 であるが、この場合には温度上昇中に strip ② に伸びの塑性変形が生ずる事があり、その時には system 全体がその塑性歪の大きさだけ伸びる。その値は § 3.2 の (17) 式に示す通りである。次にこれだけの伸びを初期条件として冷却が開始されるのであるから、冷却後の残留歪は § 4.2 の (43), (44) で与えられた値に (17) の値を加えたものになる。即ち

$$\left. \begin{aligned} 0 < b_0 < \frac{1}{2} \text{ の時 } \quad \frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'} &= -\frac{b_0}{1-b_0} \\ \frac{1}{2} < b_0 < 1 \text{ の時 } \quad \frac{\epsilon^t}{\epsilon_0'} &= -\frac{1}{b_0} + A\theta_c' + \frac{1}{b_0} - A\theta_c' - 1 = -1 \end{aligned} \right\}$$

となる。第 6 図(III)線は上式を図示したものである。尚この場合の残留応力は勿論 (43), (44) で与えられる。図から明かなように、この Type と Type II との変形量はあまり大



第 7 図 冷却進行による応力の変化 (Type II)

きな差異がない。

4. Type IV :

Type III と同様に加熱は一樣加熱型で、最高温度分布に達した時の system 全体の歪は §3,2 (17) で与えられる。又冷却はこの歪を初期条件として、温度を一定としたまま高温域が縮小して零になる型であり、冷却後の応力及び歪は §4,1 の (23), (24) ($b_0' \geq b' \geq 1$); (30), (31) ($b_1' \geq b' \geq b_0'$); (39), (40) ($b_2' \geq b' \geq b_1'$) で与えられる。此れ等の値に (17) を加えたものが冷却後の残留歪であり、Type II と同様に parameter b' を b_0 に書き直して、system の残留歪 ϵ^t との関係を図示したのが第6図の (IV) 線である。図から明かなように Type IV による加熱—冷却法を用いると、前に述べた他の Type と異なり、 $b_0 \geq \frac{1}{2}$ の範囲では system に大きな伸びの残留歪を生ずる事は注意すべき事である。

5. 降伏応力が温度の上昇に比例して減少する場合の Type I 及び Type III

同様な方法を用いて降伏応力が温度の上昇に比例して減少する場合に就いて、Type I 及び III の残留全歪を求める*と

Type I: 1) $0 < b < 0.50$ の場合	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -\frac{b_0}{1-b_0}$
2) $0.50 < b < 0.69$	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -1 - A(2 - \frac{1}{b_0})$
3) $0.69 < b < 1.00$	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -1 + \frac{1}{b_0} - A\theta_c$
Type III: 1) $0 < b < 0.50$	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -\frac{b_0}{1-b_0}$
2) $0.50 < b < 0.55$	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -1 - A(2 - \frac{1}{b_0})$
3) $0.55 < b < 0.69$	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -1 - \frac{1}{b_0}$
4) $0.69 < b < 0.77$	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -1 - A\theta_c + A(2 - \frac{1}{b_0})$
5) $0.77 < b < 1.00$	$\frac{\epsilon^t}{\epsilon_0} = -1$

以上を図示したものが第6図中の (I'), (III') 線である。これより明かな如く、 $0.50 < b_0 < 0.77$ の範囲では降伏応力が T_0' 迄一定でその温度から急に 0 になつたとした場合と、温度上昇に比例して降伏応力が減少すると考えた場合ではその値に可成りの相違があるが、変形全体の傾向は同じであつて、現在の目的に対しては前者の仮定を用いても大きな誤りはない事が明かである。

* 梶原寿郎。応用力学研究所論文報告に発表予定。

§ 6. 考 察

以上の 4 種類の型の履歴を比較して定性的考察を行つてみる。即ち条材の伸縮変形は加熱—冷却履歴によつて大きな影響を受けるものであり、極端な場合反対符号の変形を生ずる事もあり得る。

1. 縮みの残留変形を与える Type I, III の場合を比較すると、Type I の縮み変形量は Type III に比して著しく大きい。これは Type III では加熱に際して、常温部に伸びの塑性歪を生ぜしめた為に、冷却の時に生ずる縮み塑性歪がその値丈差引かれた為である。言いかえると Type III は加熱に際して常温部の相対的変形抵抗が小さかつた為である。

2. Type I と II を比較すると、前と同様に前者の残留歪は後者に比して非常に大きい。これは後者の場合、冷却に當つて加熱部の引張り収縮力が前者に比べて小さく、その為常温部の縮み塑性歪が Type I の場合に比べて非常に小さかつた為である。言いかえると、冷却に際して Type II の常温部の相対的変形抵抗が大きい為である。

3. Type I と IV を比較すると、残留歪は全く反対の方向をもつている。これは Type I では加熱に際しては、相対的に常温部の変形抵抗を出来るだけ大きくし（この場合は無限大）、次に冷却に際しては、相対的に常温部変形抵抗を出来るだけ小さくした為に、大きな縮みの残留歪を生じたもので、Type IV はこれと全く逆の原理により大きな伸びの残留歪を生じたものである。

本研究を行うに当り御指導を賜つた渡辺恵弘博士、石橋正教授に深甚なる感謝の意を捧げます。又計算は応用力学研究所 肥山央、井土敏両氏の助力によるものであり併せて厚く感謝する次第である。

(昭和 35 年 11 月 19 日受理)