

曲り通路底の三次元層流境界層

妹尾, 泰利

<https://doi.org/10.15017/4743376>

出版情報：応用力學研究所所報. 14, pp.1-19, 1960. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



曲り通路底の三次元層流境界層*

妹 尾 泰 利

概 要

三次元層流境界層について一つの理論が樹てられた。この理論は次の二種類の流に適用できる。第一は側壁が一組の同心円弧で出来ていて主流にそつて高さが指数関数的に変化する通路の底の境界層、第二は側壁が一对の対数ら線によつて作られる高さ一定の通路の底の境界層である。タービンノズルを一对の対数ら線で近似してこの理論を適用し実験値と比較した結果によれば、ノズル中心線にそつても、またノズルを横切つても理論値と実験値とはよく合致する。

記 号

$$A = \delta^2(\partial V / \partial x_m)$$

$$B = \delta^2(\partial V / \partial x_c)$$

$$E = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$$

$$F = \eta(1-\eta)^3/6$$

$$f = v_\theta/V$$

$$f_0 = \text{主流での } f$$

$$k = \text{任意常数, } r_1 = e^{k\alpha}$$

$$L = \rho \text{ の関数, } \delta = L(\rho) \exp. \{ \alpha(k-m)/2 \}$$

$$M = \rho \text{ の関数, } V = M(\rho) e^{m\alpha}$$

$$m = \text{任意常数}$$

$$p = \text{無次元圧力}$$

$$R_0 = \text{代表的寸法}$$

$$r = \theta \text{ 方向の無次元半径}$$

$$r_1 = \theta \text{ 方向の無次元代表半径}$$

$$Re = \text{レイノルズ数} = U_0 R_0 / \nu$$

$$u = \text{無次元主流方向分速度}$$

$$U_0 = \text{代表速度}$$

$$V = \text{境界層の直ぐ外の無次元速度}$$

* Massachusetts Institute of Technology Gas Turbine Laboratory Report No. 37 および Transaction of ASME vol. 80 p. 1721 より要訳。

v = 無次元横切り分速度 (主流と直角方向)

v_r = 無次元半径分速度

v_θ = 無次元接線分速度

w = z 方向の分速度が $U_0 w / \sqrt{R_0}$ で定義される.

x_c = 主流流線に直角な無次元長さ

x_m = 主流流線に沿った無次元長さ

z = 底からの距離が $R_0 z / \sqrt{R_0}$ で定義される.

$\alpha = \rho, \alpha, \eta$ 座標系における角度座標

β = 対数らせん角, $\tan \beta = k$

δ = 無次元境界層厚さ

$\eta = z / \delta$

$\theta = r, \theta, y$ 座標系における角度座標

$\kappa = \rho$ の未知関数

$A = (L/\rho)^2$

$\mu = \rho$ の未知関数

ν = 運動粘性係数

$\rho = r/r_1$

ρ_0 = 流体の密度, ただし第 1 図では代表点 A_0 における ρ

$\phi = v_r / V$

ϕ_0 = 主流での ϕ

$\psi = w / V$

ψ_0 = 主流での ψ

$\psi_1 = \alpha$ に無関係で, $\psi = \psi_1(\mu, \rho) \exp\{-(m+k)\alpha/2\}$

1. 緒 言

三次元境界層に関して幾つかの理論解が得られている. Sears と Cooke [1, 2]* は無限に長い筒が流に対して傾いて置かれた場合の境界層について厳密解を得ている. この場合には主流も境界条件も筒の軸に沿って一様であるから, 境界層もまた軸に沿って一様である. その結果境界層は三次元流であるとはいえ軸に直角な面内での流は軸方向の分速度に無関係に定まる特殊な流れである. また二, 三の研究者 [3, 4] はわん曲した流が平板の上を流れる場合に生じる境界層について解いているが, これもまた平板の端に沿って一様な場合に限られている. しかしながらわん曲通路底面の境界層では, 通路を横切る流は通路

* 角括弧内の数字は本文末の参考文献番号を示す.

の側壁によつてさえぎられるから、境界層が主流を横切つて一様であることはあり得ない。その上理論 [3, 4] では圧力は到る所で一様で流は Body Force (重力等) によつて曲げられると仮定されているから、主流の全圧は平板の端にそつて異なることとなり実際的とは言えない。

以上の場合よりも一般的で流がどの方向にも一様でない場合も僅ながら解かれているが [5, 6], 式が線型化されているために、その結果は主流の方向転換が少く曲率が小さい場合にしか適用できない。

三次元境界層の問題を解くのが困難なのは、方程式が三つの独立変数を有する非線型偏微分方程式であるからである。もしも流が主流と異なるある方向に一様である場合には、この方向の独立変数は事実上なくなり方程式を解くことが出来る。[1, 2, 3, 4] はこの場合に属する。また流が主流にそつて一様である場合も [7], 独立変数が一個なくなるから解くことができる。流がどの方向にも一様でなくても、変数を適当に変換することによつて運動方程式中の新しい独立変数の一個又は二個を排除することが出来る場合には、一様な流の場合と同様に数学的取扱は著しく簡単化される。このような流は排除された独立変数の方向に相似な流と言うことが出来る。前にのべた一様な流は相似な流の特別な場合である。相似な流は一様な流にくらべると遙に多くの場合を含むが、数学的取扱の困難さは一様な流の場合と大差ない。すべての方向に境界層流が相似であるような主流を系統的に探した結果によれば [11] 実際的に問題となるような流は殆どこのような系統に属さないことがわかる。しかしながら一方向のみ相似であるような流の系統には実際的な流が数多く含まれているから、これらの流について考察を進める。

2. 円筒座標系における相似の条件

ここで取扱うのは非圧縮流体の定常流に限定する。無次元表示を得るために総ての寸法は座標原点から代表点までの距離 R_0 との比であらわし、総ての速度は代表点の主流速度 U_0 との比であらわす。円筒座標を $R_0r, \theta, R_0z/\sqrt{R_e}$ で、これらの方向の分速度を $U_0v_r, U_0v_\theta, U_0w/\sqrt{R_e}$ で、静圧を $\rho_0 U_0^2 p$ であらわせば、平板 $z=0$ 付近の境界層の運動方程式は

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \quad (2)$$

連続の式は

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

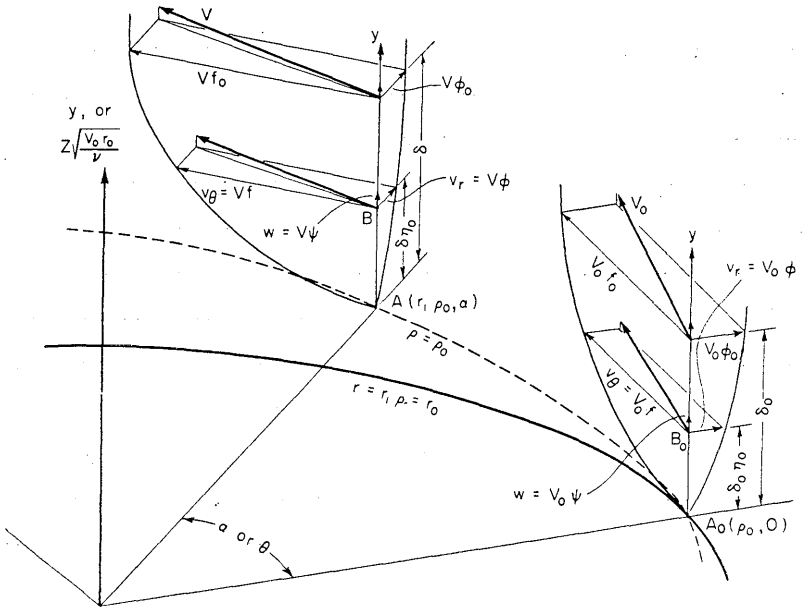
境界層内の分速度はその位置の主流速度 V と次式によつて関係づけられる。

$$v_r = V\phi, \quad v_\theta = Vf, \quad w = V\psi \quad (4)$$

ここに ϕ, f, ψ は r, θ, z の関数である。また次式で定義される新変数 ρ, η, α を導入する。

$$\rho = r/r_1, \quad \eta = z/\delta, \quad \alpha = \theta \quad (5)$$

ここに $R_0 r_1$ は座標原点から代表的な主流の流線迄の距離で θ の関数、 $R_0 \delta / \sqrt{R_e}$ は境界層厚さで r と θ との関数である* (第1図)。



第 1 図 座 標 系

壁面に描かれた点線上で境界層速度分布が相似であれば、この曲線を曲座標 $(r_1 \rho_0, \alpha)$ であらわす。また、この曲線上で対応する速度を有する点 B の壁面からの距離を $\delta \eta_0$ であらわす。ここに ρ_0 と η_0 は常数であり、 r_1 は α の関数、 δ は α と $r_1 \rho_0$ の関数である。すなわち境界層内の一点 B の座標はこれと相似な速度分布を有する代表的位置 A_0 上にある対応する速度の点 B_0 の座標 $(\rho_0, 0, \delta_0 \eta_0)$ と同一の ρ_0, η_0 を有する座標 $(r_1 \rho_0, \alpha, \delta \eta_0)$ であらわされる。図中の曲実線は A_0 を通る円弧である。

独立変数を r, θ, z から ρ, α, η に変換すれば付録 1 の関係によつて (1), (2), (3) 式は

$$\begin{aligned} & V^2 \phi \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{\eta}{r_1 \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + V \phi^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ & + \frac{V^2 f}{r_1 \rho} \left\{ -\frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{\delta} \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} - \frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right\} + \frac{V f \phi}{r_1 \rho} \left(-\frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right. \end{aligned}$$

* (5) 式に導入された r_1 と δ とは一般に任意関数である。 r_1 と δ の物理的意味は後に明かになるが、理解しやすいようにここでこれらの意味が述べられている。

$$+ \frac{\partial V}{\partial \alpha}) + V^2 \frac{\psi}{\delta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{V^2 f^2}{r_1 \rho} = - \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{\eta}{r_1 \delta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \right) + \frac{V}{\delta^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V^2 \phi \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\eta}{r_1 \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + V \phi f \frac{1}{r_1} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{V^2 f}{r_1 \rho} \left\{ - \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{\delta} \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\} + \frac{V f^3}{r_1 \rho} \left(\frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + \frac{V^2 \phi f}{r_1 \rho} + \frac{V^2 \psi}{\delta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ = - \frac{1}{r_1 \rho} \left\{ - \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \left(\frac{\eta}{\delta} \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} - \frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right\} + \frac{V}{\delta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{1}{r_1} \frac{\partial V}{\partial \rho} + V \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{\eta}{r_1 \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{V \phi}{r_1 \rho} + \frac{V}{r_1 \rho} \left\{ - \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{\delta} \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} - \frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\} + \frac{f}{r_1 \rho} \left(- \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + \frac{V}{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

となる。これらの式が* α に無関係であるためには付録 2 に示されるように次の諸条件が満足されねばならない。

$$\phi = \phi(\rho, \eta), \quad f = f(\rho, \eta) \quad (9)$$

$$V = M(\rho) e^{m\alpha} \quad (10)$$

$$p = p_1(\rho) e^{2m\alpha} + p_2 \quad (11)$$

$$r_1 = e^{k\alpha} \quad (12)$$

$$\delta = L(\rho) e^{\frac{k-m}{2}\alpha} \quad (13)$$

$$\psi = \psi_1(\rho, \eta) e^{-\frac{m+k}{2}\alpha} \quad (14)$$

ここに k と m とは常数であり、 M, L, p_1 は何れも ρ の任意関数、 ϕ, f, ψ_1 は何れも ρ と η との任意関数である。境界層がこれらの諸条件を満足するためには、勿論主流や境界条件もこれらの条件を満足しなければならない。もしも主流が渦無し流であれば $p + V^2/2$ は一定で (10), (11) 式は満足される。

3. 主 流

主流が α 方向に相似であるためには、主流は (9), (10), (11), (12) 式ならびに (6), (7), (8) 式を満足しなければならない。ここに主流は準二次元の渦無し流であるとする。主流の ϕ, f, ψ を境界層の ϕ, f, ψ と区別するために主流のものには添字 0 を着ける。(9), (10), (11), (12) 式を (6), (7), (8) 式に代入すれば、

$$M e^{(2m-k)\alpha} \{ \dot{M}(\phi_0^2 - f_0 \phi_0 k - 1) + (M f_0 / \rho)(\phi_0 - m f_0) + M(\phi_0 \dot{\phi}_0 - f_0 \dot{\phi}_0 k) \} = 0 \quad (15)$$

$$M e^{(2m-k)\alpha} \{ \dot{M}(\phi_0 f_0 - k f_0^2 + k) + (M / \rho)(\phi_0 f_0$$

* 方程式は 3 個で未知関数は ϕ, f, ψ, p の 4 個であるが、 p と主流との間には一定の関係があるから実質上方程式は 4 個である。 δ が (5) 式によつて導入されたから δ も未知関数のように見えるが、 δ は常に η と共にあらわれ $\delta \eta = z$ が一つの独立変数と見なされる。故に δ は現在の所未知関数と考える必要はない。

$$+ mf_0^2 - m) + M\dot{f}_0(\phi_0 - kf_0)\} = 0 \quad (16)$$

$$e^{(m-k)\alpha} \{ M(\phi_0 - kf_0) + (M/\rho)(\phi_0 + mf_0) \} \\ + M(\dot{\phi}_0 - k\dot{f}_0) + Me^{m\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

上式中 \dot{M} , $\dot{\phi}_0$, \dot{f}_0 の $\dot{}$ は ρ に関する微分を示す.

簡単のために

$$df_0/d\rho \cong d\phi_0/d\rho \cong 0 \quad (18)$$

$$\text{かつ } M = 1/\rho, \quad \dot{M} = -1/\rho^2 = -M/\rho \quad (19)$$

の場合について考える. ψ_0^2 は 1 にくらべて甚だ小さいから

$$\phi_0^2 + f_0^2 = \phi_0^2 + f_0^2 + \psi_0^2 = 1 \quad (20)$$

従つて (15) 式および (16) 式は $f_0\phi_0(k+m) = 0$ および $\phi_0^2(k+m) = 0$ となる.

すなわち

$$\phi_0 = 0 \text{ または } k+m = 0 \quad (21)$$

一方 (17) 式は

$$e^{(m-k)\alpha} (M/\rho) f_0(k+m) + Me^{m\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

となる. (21) 式において $k+m=0$ の場合には (22) 式は

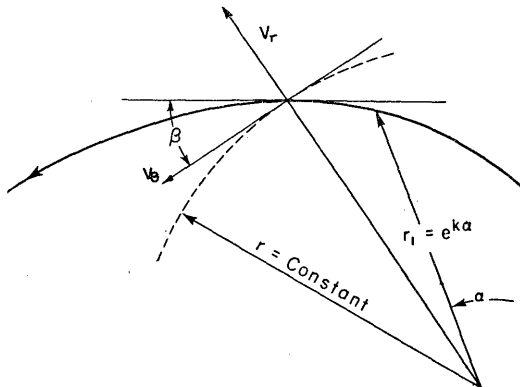
$$\partial \psi_0 / \partial z = 0 \quad (23)$$

すなわち主流は二次元流である.

(21) 式において $\phi_0=0$ の場合には

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = -\frac{(m+k)}{\rho} e^{-k\alpha} \quad (24)$$

境界条件として通路の側壁は (12) 式を満足しなければならないが, 側壁はまた主流の流



第 2 図 対数らせん線

線でもあるから (12) 式 $r_1 = e^{k\alpha}$ は流線である. すなわち $k+m=0$ の場合は対数らせん線を示す. また (24) 式で示される $\phi_0=0$ の場合は円弧流を示し r_1 は一定で $k=0$ である. 円弧流で m が正であれば主流は加速され, m が負であれば減速される. このような流は, 両側壁が同心円弧で出来ていて流に沿つて高さ変る通路内に見られる.

4. 運動量方程式

以上に得られた流が α に無関係な場合には境界層内の速度は ρ と η のみの関数であるが、運動方程式は非線型連立偏微分方程式で厳密解を得ることは容易でない。この一組の方程式を解く方法として、二次元層流境界層の Karman-Pohlhausen 近似解法と同様に、速度分布をパラメタであらわして運動量方程式を解く方法を試る。

主流が渦無し流で f, ϕ, V, r_1, δ が (9), (10), (12), (13) 式であらわされ、境界条件が $\eta = 0$ で $\phi = f = \psi = 0$; $\eta = 1$ で $\partial f / \partial \eta = \partial \phi / \partial \eta = 0$ である場合には (6), (7), (8) 式を積分することによつて

$$\begin{aligned}
 M^2 \int_0^1 \frac{\partial \phi^2}{\partial \rho} d\eta - M^2 \frac{\dot{L}}{L} \int_0^1 \eta \frac{\partial \phi^2}{\partial \eta} d\eta + 2M\dot{M} \int_0^1 \phi^2 d\eta - M^2 k \int_0^1 \frac{\partial (f\phi)}{\partial \rho} d\eta \\
 + \frac{M^2}{\rho} \left(\frac{\dot{L}}{L} \rho k - \frac{k-m}{2} \right) \int_0^1 \eta \frac{\partial (f\phi)}{\partial \eta} d\eta - 2M\dot{M}k \int_0^1 f\phi d\eta + \frac{2mM^2}{\rho} \int_0^1 f\phi d\eta \\
 + \frac{M^2}{L} (\psi_1 \phi)_{\eta=1} - \frac{M^2}{\rho} \int_0^1 (f^2 - \phi^2) d\eta = M\dot{M} - \frac{M}{L^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^2 \int_0^1 \frac{\partial (f\phi)}{\partial \rho} d\eta - M^2 \frac{\dot{L}}{L} \int_0^1 \eta \frac{\partial (f\phi)}{\partial \eta} d\eta + 2M\dot{M} \int_0^1 \phi f d\eta - M^2 k \int_0^1 \frac{\partial f^2}{\partial \rho} d\eta \\
 + \frac{M^2}{\rho} \left(\frac{\dot{L}}{L} \rho k - \frac{k-m}{2} \right) \int_0^1 \eta \frac{\partial f^2}{\partial \eta} d\eta - 2M\dot{M}k \int_0^1 f^2 d\eta + \frac{2mM^2}{\rho} \int_0^1 f^2 d\eta \\
 + \frac{2M^2}{\rho} \int_0^1 \phi f d\eta + \frac{M^2}{L} (\psi_1 f)_{\eta=1} = -M\dot{M}k + \frac{M^2 m}{\rho} - \frac{M}{L^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{L} \psi_1 + \dot{M} \int_0^1 \phi d\eta + M \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial \rho} d\eta - M \frac{\dot{L}}{L} \int_0^1 \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\eta + \frac{M}{\rho} \int_0^1 \phi d\eta - Mk \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \rho} d\eta \\
 + \frac{M}{\rho} \left(\frac{\dot{L}}{L} \rho k - \frac{k-m}{2} \right) \int_0^1 \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta - \dot{M}k \int_0^1 f d\eta + \frac{mM}{\rho} \int_0^1 f d\eta = 0 \quad (27)
 \end{aligned}$$

が得られる。上式中 \dot{M} と \dot{L} の \cdot は ρ に関する微分を意味する。

5. 境界層内の速度分布に関する仮定

この節に限り主流の流線座標を用いる。 $U_0 u$ と $U_0 v$ とは主流方向とこれに直角方向の分速度、 $R_0 x_m$ と $R_0 x_c$ は主流および直角方向の長さである。境界層のすぐ外の主流は壁に殆ど平行であるから、第3の座標軸は主流に直角でかつ底面に直角である。従つて (4) 式で定義される z と η とが第3の座標として用いられる。

境界層内の速度分布をあらわす式として η の4次式を用いると、主流方向分速度ならびに直角方向分速度はそれぞれ

$$u/V = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + A\eta(1-\eta)^3/6 \quad (28)$$

$$v/V = B\eta(1-\eta)^3/6 \quad (29)$$

となる. この速度分布は $\eta=0$ で $u/V=v/V=0$; $\eta=1$ で $u/V=1$, $v/V=0$, $d(u/V)/d\eta = d(v/V)/d\eta=0$, $d^2(u/V)/d\eta^2=d^2(v/V)/d\eta^2=0$ の諸境界条件を満足する. 壁面上で速度が 0 であるから, 壁面 $y=\eta=0$ では運動方程式は

$$\partial^2 u / \partial z^2 = \partial p / \partial x_m = -V \partial V / \partial x_m$$

$$\partial^2 v / \partial z^2 = \partial p / \partial x_c = -V \partial V / \partial x_c$$

$$\text{ゆえに } A = \delta^2 (\partial V / \partial x_m), \quad B = \delta^2 (\partial V / \partial x_c) \quad (30)$$

表現を簡単化するために次式に示す E と F とを用いる.

$$E = 2\eta - 2\eta^3 - \eta^4 \quad (31)$$

$$F = \eta(1-\eta)^3/6 \quad (32)$$

二次元層流境界層に関する Karman-Pohlhausen の方法では一つの未知数 δ 又は A が一つの運動方程式によって定められた. 三次元境界層の場合には運動量方程式が二つあるから未知数は二つあるべきである. それ故補正項として

$$C\eta(1-\eta)^3/6 \quad (33)$$

を主流に直角方向の速度分布, 圧力勾配の方向の速度分布又はその他の都合な方向の速度分布に加え, δ と C とを二つの運動量方程式によって定める. このような補正項を加えると壁面上の境界条件の内 速度の二階微係数は満足されなくなるが, 二階微係数は運動量方程式にはあられず従つて重要でないから, このような仮定は近似解としては許し得る.

6. 速度変化を伴う円弧流

円弧流は流にそつて相似でありうる事が (21) 式から明らかになつた. この場合には r_1 は一定で $k=0$ であるから (10), (11), (12), (13) 式は

$$r_1 = e^{k\alpha} = 1, \quad k=0 \quad (34)$$

$$V = M(\rho)e^{m\alpha} = \frac{1}{\rho} e^{m\alpha}, \quad M(\rho) = 1/\rho \quad (35)$$

$$\delta = L(\rho)e^{-m\alpha/2} \quad (36)$$

$$\psi = \psi_1(\eta, \rho)e^{-m\alpha/2} \quad (37)$$

となる. これらの式を (25), (26), (27) 式に代入すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{L}}{L} \int_0^1 \phi^2 d\eta + \int_0^1 \frac{\partial \phi^2}{\partial \rho} d\eta + \frac{3m}{2\rho} \int_0^1 f\phi d\eta \\ + \frac{1}{\rho} \int_0^1 (1-f^2-\phi^2) d\eta + \frac{\rho}{L^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{\dot{L}}{L} \int_0^1 f\phi d\eta + \int_0^1 \frac{\partial (f\phi)}{\partial \rho} d\eta - \frac{m}{2\rho} + \frac{3m}{2\rho} \int_0^1 f^2 d\eta + \left(\frac{\psi_1}{L} \right)_{\eta=1} + \frac{\rho}{L^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0 \quad (39)$$

$$\left(\frac{\psi_1}{L}\right)_{\eta=1} = -\frac{\dot{L}}{L} \int_0^1 \phi d\eta - \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial \rho} d\eta - \frac{m}{2\rho} - \frac{m}{2\rho} \int_0^1 f d\eta \quad (40)$$

が得られる。

f と ϕ とは (28), (29) 式によつてあらわされ, 式中の A, B は (30), (35), (36) の諸式によつて求められる. すなわち

$$f = E + mAF, \quad \text{ただし } A = (L/\rho)^2 \quad (41)$$

$$\phi = CF = \kappa AF, \quad \text{ここに } \kappa \text{ は新未知量である} \quad (42)$$

(41), (42) 式ならびに (40) 式を (38), (39) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} & \rho \kappa A (2\dot{\kappa} A + 2.5\kappa \dot{A}) \int_0^1 F^2 d\eta + 1.5m^2 \kappa A^2 \int_0^1 F^2 d\eta + 1.5m\kappa A \int_0^1 EFd\eta \\ & + \kappa \left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0} - m^2 A^2 \int_0^1 F^2 d\eta - 2m\Lambda \int_0^1 EFd\eta - \int_0^1 E^2 d\eta + 1 = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\kappa} A^2 m \rho \int_0^1 F^2 d\eta + 2.5m\kappa \rho \Lambda \dot{A} \int_0^1 F^2 d\eta + m\kappa A^2 \int_0^1 F^2 d\eta + \rho \dot{\kappa} A \left(\int_0^1 EFd\eta - \int_0^1 Fd\eta \right) \\ & + 1.5\rho \kappa \dot{A} \left(\int_0^1 EFd\eta - \int_0^1 Fd\eta \right) + \kappa A \left(\int_0^1 EFd\eta - \int_0^1 Fd\eta \right) + 1.5m^3 A^2 \int_0^1 F^2 d\eta \\ & + m^2 A \left(3 \int_0^1 EFd\eta - 0.5 \int_0^1 Fd\eta \right) + 1.5m \int_0^1 E^2 d\eta - 0.5m \int_0^1 Ed\eta - m \\ & + \frac{1}{A} \left\{ \left(\frac{dE}{d\eta}\right)_0 + m\Lambda \left(\frac{dF}{d\eta}\right)_0 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

上式にあらわれる E と F との積分値は

$$\begin{aligned} \int_0^1 Ed\eta &= 0.700000 & \int_0^1 Fd\eta &= 0.008333 \\ \int_0^1 E^2 d\eta &= 0.582540 & \int_0^1 F^2 d\eta &= 0.000110222 \\ \int_0^1 EFd\eta &= 0.0046965 \\ \int_0^1 \eta \frac{dE}{d\eta} d\eta &= 0.300000 & \int_0^1 \eta \frac{dF}{d\eta} d\eta &= -0.008333 \\ \left(\frac{dE}{d\eta}\right)_{\eta=0} &= 2.000000 & \left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0} &= 0.166667 \end{aligned} \quad (45)$$

これらの値を (43), (44) 式に用いると

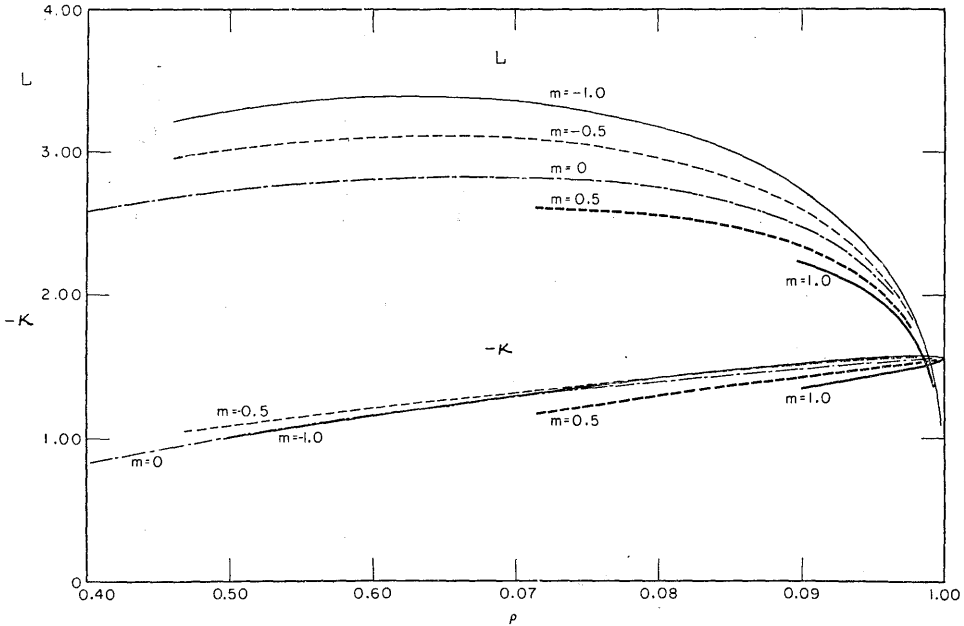
$$\begin{aligned} & (-0.001819 + 0.0002755m\Lambda) \rho \kappa A^2 (d\kappa/d\rho) - 0.0002755(m^3 + m\kappa^2) A^3 \\ & + (0.0090950\kappa^2 - 0.0153819m^2\kappa - 0.0180178m^2) A^2 + (0.841738m\kappa \\ & + 1.508629m) A - 13.25317\kappa - 20.6722 = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$(0.001819 - 0.0002755m\lambda)\rho\kappa^2\lambda(d\lambda/d\rho) + (-0.0002204m\kappa^2 - 0.0001653m^3\kappa - 0.0001102m^3)\lambda^3 + (0.007276\kappa^2 - 0.0182566m^2\kappa - 0.005752m^2)\lambda^2 + (0.553221m\kappa + 0.727447m)\lambda - 9.502111\kappa - 13.781472 = 0 \quad (47)$$

境界条件としては $\rho=1$ で境界層厚さが 0 すなわち $\lambda=0$ とする。(46), (47) 式を精しく吟味することによつて $\rho=1$ で $\lambda=0$ ならば $\kappa=-1.55948$ でなければならぬことがわかる。すなわち境界条件は

$$\rho=1 \text{ において } \lambda=0, \kappa=-1.55948 \quad (48)$$

連立方程式 (46), (47) は (48) 式の出発値として数値積分できる。その結果を第 3 図に示す。横軸は ρ で縦軸は $-\kappa$ および $L = \rho\sqrt{\lambda} = \delta e^{\frac{m}{2}\omega}$ すなわち無次元境界層厚さを示す。主流は $V=(1/\rho)e^{m\omega}$ であるから m が正ならば加速流である。



第 3 図 円弧主流の場合、 L および $-\kappa$ と ρ の関係

m が正の場合には ρ のある値で (46) 式と (47) 式とは同一となる。このような ρ の値は $m=1.0$ の場合に $\rho=0.8836$, $m=0.5$ の場合に $\rho=0.7143$ である。この ρ の値では未知数を定める二つの条件式が同一となるから、この値を越えて計算を続けることは出来ない。しかしながらこの ρ の値は物理的に何等特別の意味を持つてゐるとは思えない。もしも現在の方法を用いずに運動方程式をその儘吟味すれば、こういう限界値付近の流を定めるに充分な条件がある筈である。しかしながら現在の方法では運動方程式が二つの運動量方程式に置き換えられた。運動量方程式は非線型微分方程式であるから、独立変数のあ

る特別な値で二つの方程式がたまたま同一となつたに過ぎない。

主流方向およびこれと直角方向の速度分布は

$$u/V = f = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + mA\eta(1-\eta)^3/6 \quad (49)$$

$$v/V = \phi = \kappa A\eta(1-\eta)^3/6 \quad (50)$$

ここに $A = (L/\rho)^2$, $\eta = z/\delta$ である。無次元化された境界層厚さ δ は

$$\delta = Le^{-\frac{m}{2}\alpha} = L/\sqrt{\rho V} \quad (51)$$

であり境界層の厚さは

$$R_0\delta/\sqrt{Re} = R_0L/(VU_0\rho R_0/\nu)^{1/2} \quad (52)$$

である。

7. 主流が対数ら線の場合

$k+m=0$ の場合に相似解が得られることが (21) 式によつて示された。この場合 (10), (12), (13), (14) 式は

$$V = M(\rho)e^{-k\alpha} = (1/\rho)e^{-k\alpha} \quad (53)$$

$$r_1 = e^{k\alpha} \quad (54)$$

$$\delta = L(\rho)e^{k\alpha} \quad (55)$$

$$\psi = \psi_1(\eta, \rho) \quad (56)$$

となる。もし $r_1 = e^{k\alpha}$ が主流の流線であれば主流は対数ら線で第2図に示されるら線角 β は

$$k = \tan \beta \quad (57)$$

これらの式を (25), (26), (27) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho \frac{\partial \phi^2}{\partial \rho} d\eta - \rho \frac{\dot{L}}{L} \left\{ [\eta\phi^2]_0^1 - \int_0^1 \phi^2 d\eta \right\} + \int_0^1 (1-\phi^2-f^2)d\eta + \frac{\rho}{L} (\psi_1\phi)_{\eta=1} \\ & + \left(\frac{\rho}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = k\rho \int_0^1 \frac{\partial (f\phi)}{\partial \rho} d\eta - k \left(\rho \frac{\dot{L}}{L} - 1 \right) \left\{ [\eta f\phi]_0^1 - \int_0^1 f\phi d\eta \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho \frac{\partial (f\phi)}{\partial \rho} d\eta - \rho \frac{\dot{L}}{L} \left\{ [\eta f\phi]_0^1 - \int_0^1 f\phi d\eta \right\} + \frac{\rho}{L} (\psi_1 f)_{\eta=1} + \left(\frac{\rho}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \\ & = k \int_0^1 \rho \frac{\partial f^2}{\partial \rho} d\eta - k \left(\rho \frac{\dot{L}}{L} - 1 \right) \left\{ [f^2\eta]_0^1 - \int_0^1 f^2 d\eta \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\frac{\rho}{L} (\psi_1)_{\eta=1} + \rho \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial \rho} d\eta - \rho \frac{\dot{L}}{L} \int_0^1 \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\eta = k \left\{ \rho \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \rho} d\eta - \left(\rho \frac{\dot{L}}{L} - 1 \right) \int_0^1 \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta \right\} \quad (60)$$

(28), (29), (33) の A, B, C を組み合せた新未知数 μ を用いると f と ϕ とは

$$f = E \cos \beta \quad (61)$$

$$\phi = E \sin \beta + \mu A F, \quad \text{ここに } A = (L/\rho)^2 \quad (62)$$

となる。この速度分布を (58), (59), (60) 式に代入し (57), (60) 式を用いて k と ψ_1 とを消去すれば

$$\begin{aligned} & \rho \mu A \left(\sin \beta \int_0^1 E F d\eta - \sin \beta \int_0^1 F d\eta + 2\mu A \int_0^1 F^2 d\eta \right) + \frac{\rho}{2} \dot{A} \left(3\mu \sin \beta \int_0^1 E F d\eta \right. \\ & \quad \left. - 2\mu \sin \beta \int_0^1 F d\eta + \mu \sin \beta \int_0^1 \eta \dot{F} d\eta + 5\mu^2 A \int_0^1 F^2 d\eta \right) \\ & \quad + (1 - E^2 d\eta)(1 - \sin^2 \beta) + \sin^2 \beta \int_0^1 \eta \dot{E} d\eta + \\ & \quad \mu A \sin \beta \int_0^1 \eta \dot{F} d\eta + (1/A) \{ \sin \beta \dot{E}(0) + \mu A \dot{F}(0) \} = 0 \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \mu A \left(\int_0^1 E F d\eta - \int_0^1 F d\eta \right) + \frac{\rho}{2} \mu \dot{A} \left(3 \int_0^1 E F d\eta - 2 \int_0^1 F d\eta + \int_0^1 \eta \dot{F} d\eta \right) \\ & \quad - \sin \beta \left(1 - \int_0^1 E^2 d\eta \right) + \mu A \left(\int_0^1 E F d\eta + \int_0^1 \eta \dot{F} d\eta \right) + \sin \beta \int_0^1 \eta \dot{E} d\eta + 2/A = 0 \quad (64) \end{aligned}$$

が得られる。(45) 式の積分値を用いればこれらの式は

$$0.055111 \rho \mu^2 A \frac{dA}{d\rho} = 417.460 - 11.816246 \mu A \sin \beta - 0.220444 (\mu A)^2 + 287.895214 \mu \quad (65)$$

$$\begin{aligned} 0.110222 \rho \mu A^2 \frac{d\mu}{d\rho} &= -1252.379 + 31.888865 \mu A \sin \beta \\ &+ 0.551110 (\mu A)^2 - 803.071368 \mu \quad (66) \end{aligned}$$

境界条件として $\rho=1$ で境界層厚さが 0 すなわち $A=0$ とする。(65), (66) 式を $\rho=1$ 付近について詳しく調べると, $\rho=1$ で $A=0$ ならば $\mu=-1.55948$ であることがわかる。すなわち境界条件は

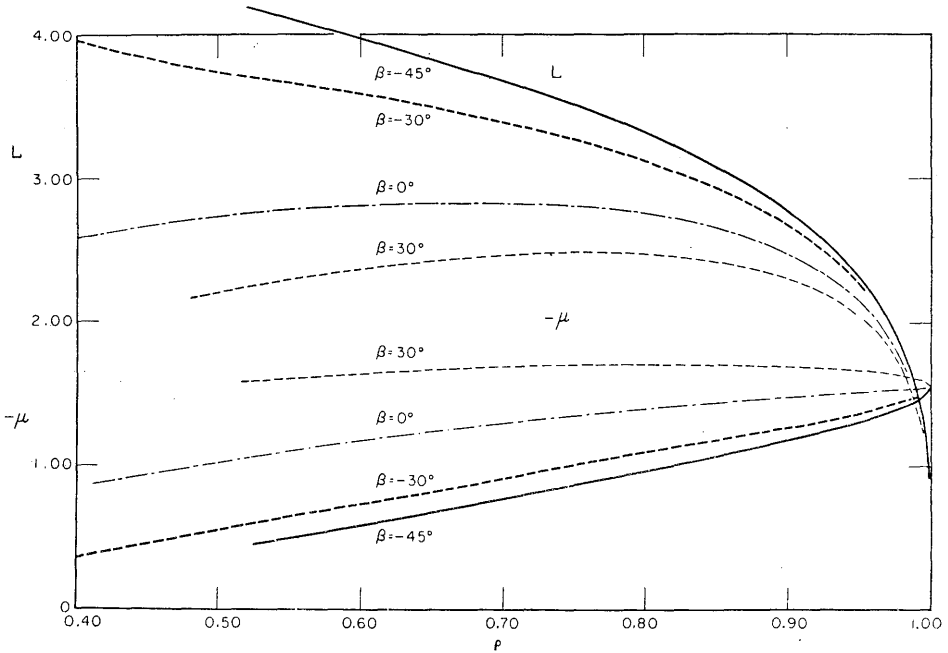
$$\rho=1 \text{ において } A=0, \quad \mu=-1.55948 \quad (67)$$

連立方程式 (65), (66) は (67) を出発値として数値積分される。その結果を第 4 図に示す。横軸は ρ であり縦軸は $-\mu$ および $L=\rho\sqrt{A}=\delta e^{-k\alpha}$ すなわち無次元境界層厚さである。 $\tan \beta = k$ であるから β が負の場合は加速される狭り流であり $\beta=0$ は圧力勾配がない円弧流となる。第 4 図において β が負の加速流の場合の方が β が正の減速流の場合よりも寧ろ境界層が厚いことは注目し値する。この場合には加速されると共に通路幅が狭まるから、通路の狭りによる境界層の集中の効果が加速により境界層が薄くなる効果よりも大きいのであろう。

主流方向および直角方向の分速度 $u/V, v/V$ は

$$u/V = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \mu A \sin \beta \eta(1-\eta)^3/6 \quad (68)$$

$$v/V = \eta A \cos \beta \eta(1-\eta)^3/6 \quad (69)$$



第 4 図 対数らせん主流の場合, \$L\$ および \$-\mu\$ と \$\rho\$ の関係

ここに $A=(L/\rho)^2$, $\eta=z/\delta$ である.

無次元境界層厚さ δ は

$$\delta = Le^{k\omega} = r_1 L \tag{70}$$

境界層の実際の厚さは

$$R_0 \delta / \sqrt{Re} = R_0 r_1 L / (U_0 R_0 / \nu)^{1/2} \tag{71}$$

である.

8. 結果の物理的解釈

(50), (60) 両式によれば直角方向分速度 v/V は A すなわち δ^2 に比例するから直角方向の流量は δ^3 に比例する. 従つてもしも境界層が厚すぎ (薄すぎ) る場合には, 横切る流は甚だ多く (少く) て, このために境界層厚さは急速に減じ (増し) て適当な厚みになる. 従つて上流の境界層はわん曲通路の底面の境界層にさほど影響を及ぼさない. その結果この理論は翼列やノズルのような短い通路にも近似的に用いることが出来る.

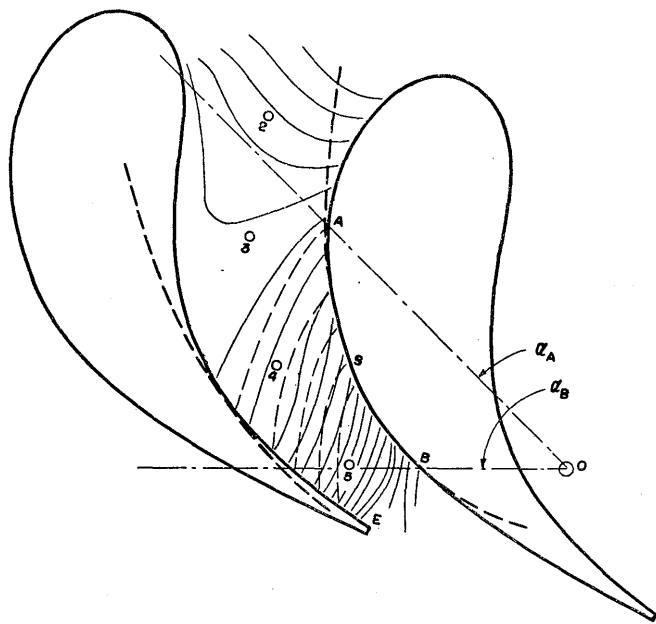
上述のように横切り流は δ^3 に比例するから, 主流が減速されても境界層は容易に厚くならず, 主流が加速される場合にも圧力勾配がない場合にくらべて境界層はさほど薄くならない. 第 3 図はこのことを定量的に示している.

二次元流では $U = U_0 e^{a\theta}$ ($a < 0$) の減速流では境界層ははく離して相似流が得られない

ことが証明されている [8]. しかしながらここに示された三次元流の計算例の範囲でははく離は生じていない. 実際のところ, 境界層内にある運動量の少ない流体は主流方向の圧力勾配に逆つて流れることなく, 圧力勾配があまり急でない, あるいは寧ろ圧力が降下している方向——曲率の中心に向つて——流れて行く. 従つて曲率が小さくて横切り流が弱い場合を除いては境界層ははく離しない.

9. 実験との比較

タービンノズル翼列の底面上の境界層が実測され層流であることが示された [9]. ここで得られた理論をこの実験結果と比較するために, このノズル通路は一對の対数らせん線通路



第 5 図 実際のノズルと理論模型

で置換えられた. 第 5 図において太い実線は実物の形を示し太い破線はらせん角が 45° の対数らせん線を示す, 通路を横切る細い実線は干渉計によつて観測された, 等密度線 (等圧線) であり, 細破線は対数らせん線における等圧線である.

境界層内の速度分布, 壁面摩擦力, 排除厚さおよび壁面上の流の方向が測定されているノズル中心線上の 3 点とノズルを横切る 6 点において理論値と実測値とが比較された. その結果は

[9] に示されているが, 大体満足できる程度の一致が得られている.

10. 境界層の横切り流による排除面積

この理論では通路の内外側壁を主流の流線とし, 通路の底面に生じる境界層の横切り流は外側壁との隅から始まるとしている. これらの条件は実際の流に即したものであるが, この理論では内側壁の取扱が完全でない. すなわち実際の流では境界層の横切り流が内側壁によつて妨げられ底面から離れてこの隅に堆積する. 堆積した流体の主流方向の分速度は主流速度よりも小さいから, ノズルを通過する流量はノズル側壁や底面に生じる境界層ならびに堆積した流体の排除面積だけ減少する. この排除面積は次のようにして算定され

る。なお以下には、堆積した流体は主流と混ることなく、横切り流れ分速度は主流分速度に変わらないとする。

第5図において、喉部 BE を通過する堆積流体は、もしも内側壁がないとした場合に曲線 ASB を通過する横切り流と同一である。 S における境界層の主流方向および横切り方向分速度は u, v であり、主流方向の速度圧の不足は $\rho_0(V^2 - u^2)/2$ である。流体が底面から離れて堆積すると下流に流れる間に全圧損失は生じないから、下流の位置 B における主流速度が V_B であれば S で底面を離れた流体の主流方向分速度は $(V_B^2 - V^2 + u^2)^{1/2}$ となる。 S で底面を離れ上述の速度を有する流体の量は単位時間当り $|v| dh dx_m = -v dz dx_m / \sqrt{R_e}$ である。この流体が喉部 BE で占める面積は $-v dh dx_m / (V_B^2 - V^2 + u^2)^{1/2}$ であり排除面積 δ_a は

$$\delta_a = \int_A^B \int_0^{\delta} \frac{V_B - (V_B^2 - V^2 + u^2)^{1/2}}{V_B / R_e} \frac{-v dz dx_m}{(V_B^2 - V^2 + u^2)^{1/2}} \quad (72)$$

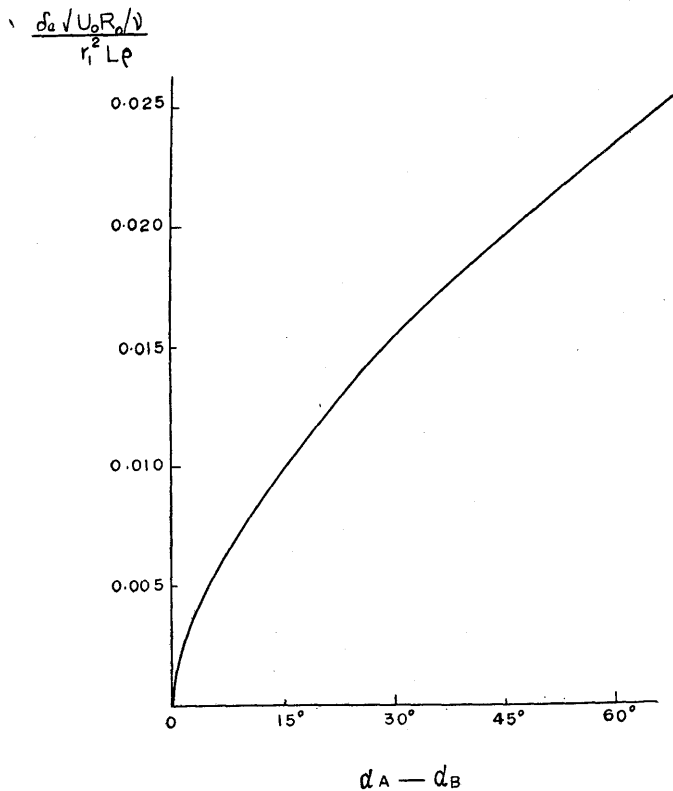
上式中の総ての項は三次元境界層理論によつて求められている。

主流が円弧流であれば上式はただ円積分を含む二重積分となる。対数らせん流の場合には $V/V_B, u/V, v/V$ は (53), (68), (69) 式で示され、(71) により $dh = r_1 L d\eta / (U_0 R_0 / \nu)^{1/2}$, $dx_m = r_1 \rho d\alpha / \cos\beta$ である。これらの関係を (72) 式に代入すれば

$$\delta_a = \frac{r_1 L}{(U_0 R_0 / \nu)^{1/2}} r_1 \rho \frac{\mu A}{6 \tan \beta} \left[\frac{1 - e^{-\alpha_B \tan \beta}}{20} - \left\{ 0.028174 + 0.003968 \frac{\mu A}{6} \sin \beta - \int_0^1 \eta (1 - \eta)^3 \left(\frac{u^2}{V^2} + e^{-2\alpha_B \tan \beta} - 1 \right)^{1/2} d\eta \right\} \right]$$

ここに μ と A は ρ と β の関数として第4図に示されている。上式の最後の項は図式積分によつて求められる。

数値例。 別報 [9] に示されるタービンノズルは一对の対数らせん $\beta = -45^\circ$, $\rho = 1$ および $\rho = 0.525$ によつて近似された。第4図によれば $\beta = -45^\circ$ の場合には $\rho = 0.525$ において $\mu = -0.455$, $L = 4.1815$, $A = (L/\rho)^2 = 63.4373$ である。この場合の $\delta_a (U_0 R_0 / \nu)^{1/2} / r_1^2 L \rho$ と $\alpha_B - \alpha_A$ との関係を示す。なお $r_1 L / (U_0 R_0 / \nu)^{1/2}$ は B における底面の境界層厚さであり $r_1 \rho$ はらせん中心 O から B 迄の距離である。上流における境界層の全圧損失はさほど大きくないが上流の境界層は厚い上に単位角度 $d\alpha$ 当りの側壁の長さが長いので、上流で堆積した流体も排除面積に大きな影響を及ぼす。実験に用いられたノズルが $\alpha_B - \alpha_A = 45^\circ$ の一对の対数らせん線で代表されるならば、堆積流体による排除面積は喉部 BE における底面境界層の排除面積の 13% となる。



第 6 図 堆積境界層排除面積とノズル転向角の関係

11. 結 論

三つの独立変数を有する三次元層流境界層方程式は、相似の条件と運動量の方法とを用いることによつて一対の連立常微分方程式となつた。相似の条件を満たす流には色々な流れが含まれるが、ここには実際的な二つの系列が選ばれた。すなわち側壁が一対の対数らせんから成る高さ一定の通路底面の境界層、および流に沿つて主流の速度が指数関数的に変化する同心円弧通路底面の境界層である。

この二つの系列の各について幾つかの場合が計算された。その結果によれば円弧流の場合には主流が増速すれば境界層は薄くなり主流が減速すれば境界層は厚くなるが、圧力勾配による境界層の厚さの変化は二次元流の場合に較べると極めて僅かである。特に二次元境界層がはく離する圧力上昇の場合でも、計算された例では三次元境界層ははく離しない。対数らせん流の計算例によれば、側壁が狭まることによる境界層の集りのために、流は加速されるにも拘らず境界層は厚く、減速される捩り流の境界層の方が寧ろ薄い。

最後に横切り流が堆積するために流量が減少する量を示す排除面積が求められた。なお

この理論はタービン翼列の通路に適用され実験値と満足すべき一致が得られることが確かめられた。

この研究は General Electric Company, Westinghouse Electric Corporation, Curtiss-wright Corporation, Allison Division of General Motors Corporation 各社ならびに 米国海軍研究所の経済的援助のもとに Massachusetts Institute of Technology のガスタービン実験室において行われた。この研究を行うに当り種々の便宜を計り助言を与えられた Taylor 教授および Dean 教授, ならびに計算を手伝つてくれた Wu 君に感謝の意を表す。

付 録 1 微係数の変数変換

変数変換 $\rho=r/r_1, \eta=z/\delta, \alpha=\theta$ を行えば関数 $\Phi(r, \theta, z)$ の偏微分は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial r} &= -\frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial r} = -\frac{\eta}{r_1 \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \theta} &= -\frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} = -\frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \theta} &= -\frac{\eta}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right) = \frac{\eta}{\delta} \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial \delta}{\partial \rho} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} - \frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} &= 1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\delta} \right) = \frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

付 録 2 相似の条件

(10), (11), (12) 式が α に無関係であるためには

$$\phi = \phi(\eta, \rho), \quad f = f(\eta, \rho)$$

かつまた,

$$(1) \quad \frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \rho}, \quad (2) \quad \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad (3) \quad \frac{\rho}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha}, \quad (4) \quad \frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha},$$

$$(5) \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad (6) \frac{r_1}{\delta^2 V}, \quad (7) \frac{1}{V^2} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad (8) \frac{1}{V^2} \frac{\partial p}{\partial \eta},$$

$$(9) \frac{1}{V^2} \frac{\partial p}{\partial \alpha}, \quad (10) \frac{r_1 \psi}{\delta}, \quad (11) \frac{r_1}{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

が α に独立であることが必要である。

(1) の条件から

$$\log \delta = \delta_1'(\rho) + \delta_2'(\alpha) \quad \text{すなわち} \quad \delta = \delta_1(\rho) \delta_2(\alpha),$$

(2) の条件から

$$\log V = V_1'(\rho) + V_2'(\alpha) \quad \text{すなわち} \quad V = V_1(\rho) V_2(\alpha), \quad (73)$$

(3) の条件から

$$\log r_1 = K_1(\rho) \alpha + K_2'(\rho) \quad \text{すなわち}$$

$$r_1 = K_2(\rho) \exp K_1(\rho) \alpha = e^{k\alpha} \quad (74)$$

上式において r_1 は ρ に無関係で $\alpha = \theta = 0$ で $r_1 = 1$ と定められているから、 k は任意常数である。

(4) の条件から

$$\log \delta = L_1(\rho) \alpha + L_2'(\rho), \quad \delta = L_2(\rho) \exp L_1(\rho) \alpha \quad (75)$$

(5) の条件から

$$\log V = M_1(\rho) \alpha + M_2'(\rho), \quad V = M_2(\rho) \exp M_1(\rho) \alpha$$

この条件と (73) とを同時に満足するためには $M_1(\rho)$ は常数でなければならぬ。従つて

$$V = M(\rho) e^{m\alpha} \quad (76)$$

ここに m は任意常数である。

(6) の条件から

$$\frac{r_1}{V \delta^2} = \frac{\exp\{k\alpha - m\alpha - 2L_1(\rho)\alpha\}}{M(\rho) L_2(\rho)^2}$$

は ρ のみの関数である。すなわち

$$k - m - 2L_1(\rho) = 0, \quad L_1 = (k - m)/2 \quad (77)$$

(8) の条件から

$$\partial p / \partial \rho = M^2(\rho) e^{2m\alpha} p_1''(\rho) = p_1'(\rho) e^{2m\alpha}, \quad \text{すなわち}$$

$$p = p_1(\rho) e^{2m\alpha} + p_2(\rho) \quad (78)$$

(9) の条件から

$$\partial p / \partial \alpha = M^2(\rho) e^{2m\alpha} p_3''(\rho) = p_3'(\rho) e^{2m\alpha}, \quad \text{すなわち}$$

$$p = p_3'(\rho) e^{2m\alpha} / 2m + p_4(\rho) \quad (79)$$

(78), (79) の両式を満足する p は

$$p = p_1(\rho) e^{2m\alpha} + p_2 \quad (80)$$

である。ここに p_2 は任意常数である。この式は (7) の条件をも満足する。

(6) と (10) の条件から δ を消去すれば $(Vr_1)^{1/2}\psi = [M(\rho)e^{m\alpha}e'^{\alpha}]^{1/2}\psi$ は α に無関係である。すなわち

$$\psi = \psi_1(\eta, \rho) \exp(-m-k)\alpha/2 \quad (81)$$

ψ がこの式を満足すれば (11) の条件は満足される。

参 考 文 献

1. J. C. Cooke, "The Boundary Layer of a Class of Infinite Yawed Cylinders," *Proceeding Cambridge Philosophical Society*, vol. 46, 1950, pp. 645-648.
2. W. R. Sears, "The Boundary Layer of Yawed Cylinders," *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 15, 1948, pp. 49-52.
3. H. G. Loose, "A Simple Laminar Boundary Layer With Secondary Flow," *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 22, 1955 pp. 35-40.
4. A. G. Hansen and H. Z. Herzig, "Analysis of Particle Motions for a Class of Three-Dimensional Incompressible Laminar Boundary Layers," NACA TN 3840.
5. A. Mager and A. G. Hansen, "Laminar Boundary Layer Over a Flat Plate in Flow Having Circular Streamlines," NACA TN 2658.
6. A. Mager, "Three-Dimensional Laminar Boundary Layer With Small Cross-Flow," *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 21, 1954, pp. 835-845.
7. G. I. Taylor, "The Boundary Layer in the Converging Nozzle of a Swirl Atomizer," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 3, part 2, 1950, pp. 129-139.
8. S. Goldstein, "A Note on the Boundary Layer Equations," *Proceedings, Cambridge Philosophical Society*, vol. 35, 1939, p. 338.
9. Y. Senoo, "The Boundary Layer on the End Wall of a Turbine Nozzle Cascade," M. I. T. Gas Turbine Laboratory, No. 35, 1956; Transaction of ASME, vol. 80, 1958, pp. 1711-1720 および応用力学研究所所報第13号. pp 55-74.
10. Y. Senoo, "Three-Dimensional Laminar Boundary Layer in Curved Channels With Acceleration," M. I. T. Gas Turbine Laboratory, No. 37, 1956; Transaction of ASME, vol. 80, 1958, pp. 1721-1733.
11. H. Z. Herzig and A. G. Hansen, "On Possible Similarity Solutions for Three-Dimensional Incompressible Laminar Boundary Layers:"
 - a. Similarity With Respect to Stationary Rectangular Co-Ordinates, NACA TN 3768.
 - b. Similarity With Respect to Stationary Polar Co-Ordinates, NACT TN 3832.
 - c. Similarity With Respect to Stationary Polar Co-Ordinates for Small Angle Variation, NACA TN 3890.

A. G. Hansen, "Possible Similarity Solutions of the Laminar, Incompressible, Boundary Layer Equations," TRANS. ASME, vol. 80, 1958, pp. 1553-1562.

(昭和 34 年 6 月 5 日受理)