

感潮湖水の水位について : その1

応用力学研究所水文学研究委員会

<https://doi.org/10.15017/4743338>

出版情報 : 応用力学研究所所報. 3, pp.1-15, 1953-08. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :



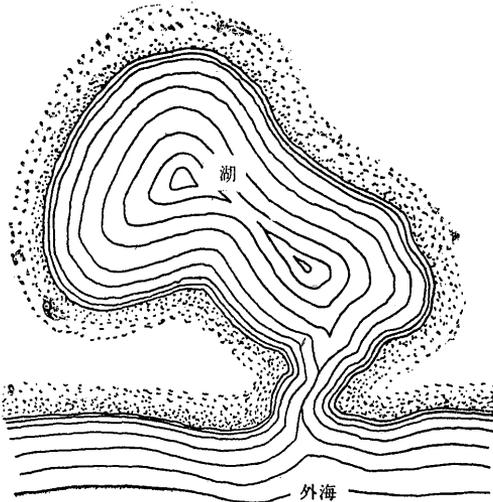
感潮湖水の水位について (その1)

応用力学研究所水文学研究委員会

感潮湖水の水位を時間の函数として定める微分方程式を出来るだけ簡単な形で書きあらわし (1), その近似解法を示し (2) (3), 更にその近似解の精度に関して若干の議論を行う (4). 次に奥に大きな貯水池をもつ感潮湖水に対してその水位の時間的変動の大勢を知る方法を述べる (5) (6). 貯水池のある感潮湖水はそれのないもの比べて, 水位変動の振幅も外海潮位からの時間おくれも共に小さいことが推論される (6).

この報告はある具体的な感潮湖水について, その水位の時間的経過をなるべく手軽に知ろうとする人々に若干の指針を与えようとのぞむもので, 微分方程式の性質を数学的に明かにしたり, それを厳密に解いたりしようとするものではない.

1. 平均水位の面から測つた湖の水位を $h(t)$ で, 外海の潮位を $H(t)$ であらわす. t



第 1 図

は時間である. 湖の面積 A は水面の上下によつて変らないものとする. 湖と外海との境の水門の幅を b , 深さを d , 流出係数を c とする. d は当然 h と H とに関係する量であるが, 変動する部分は変動しない部分に比べて小さいと仮定してこれを常数と見なす. c も亦 h や H などに依つて変るであろうがそれを無視し, cbd の積を1つの常数 B であらわす. 即ち B は有効な出口面積である. 終りに湖の水面はその全面積にわたつて一様に上下するものとする.

問題をこの様に出来るだけ簡単にする

と, h と H とは次の微分方程式で結ばれているものと考えられる:

$$\begin{aligned} H \geq h \text{ ならば } \quad A \frac{dh}{dt} &= B\sqrt{2g} \sqrt{H-h}, \\ H \leq h \text{ ならば } \quad A \frac{dh}{dt} &= -B\sqrt{2g} \sqrt{h-H}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$h = H$ で h はこれ等 2 つの方程式の間を乗り換える. これがこの問題の特徴であり, 同時に第1の困難を形造る. 第2の困難は次のことにある: H が t の判つた函数として

与えられている時、 h を t の函数として知るためには (1.1) を解かねばならぬが、 $t=0$ に於ける h の値、即ち所謂初期条件を予め明示することは原理的に出来ない。そしてそれに代る条件として我々の求めようとする h が外海の潮汐 H と同じ周期で上下に振動する周期函数であるという条件がある。数学的に言うとき我々の求めようとするのは (1.1) の周期解である。従つて $t=0$ で h の値を任意に仮定して数値的に (1.1) を積分しても、それは必ずしも我々の求める解ではない。¹⁾

基準の長さを L として

$$H=L\eta, \quad h=L\zeta \quad (1.2)$$

と書き、更に

$$\tau=\sqrt{g}t/\sqrt{L}, \quad \kappa=\sqrt{2}B/A \quad (1.3)$$

で定義された無次元量 η , ζ , τ , κ を導き入れると (1.1) を次の形に直すことが出来る:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\tau} &= \kappa\sqrt{\eta-\zeta} & (\eta \geq \zeta), \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\kappa\sqrt{\zeta-\eta} & (\eta \leq \zeta). \end{aligned} \quad (1.4)$$

外海の潮位 η は 12 時間を周期として大体正弦函数的に上下すると考えられるので、 L としてその振幅を選ぶことにすると、常数 α と時間 τ の原点とを適当にとつて

$$\eta = \cos \alpha\tau \quad (1.5)$$

とあらわす事が出来る。その時 (1.4) は

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\tau} &= \kappa\sqrt{\cos \alpha\tau - \zeta} & (\cos \alpha\tau \geq \zeta), \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\kappa\sqrt{\zeta - \cos \alpha\tau} & (\cos \alpha\tau \leq \zeta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

と書き直される。この報告の目的とするところは (1.6) を高い精度は要らないがなるべく手軽にといてその周期解 ζ を求めたいと希望する人々に若干の実際的な指針を与えることである。

2. 数値積分の方法が差当り問題にならぬとすると、 ζ の形を未定常数を含む一般的な表式で近似しなければならぬ。 ζ が厳密にどの様な形をもつかは今のところ知るべくもないが、とにかく題意によつて η と同じ周期の周期函数である。それを Fourier の級数に分解して最初の項だけをとり、higher harmonics はそれに対して無視出来る程小さいと仮定すると次の結果を得る:

$$\zeta = \lambda \cos \alpha(\tau - \sigma). \quad (2.1)$$

ここに λ , σ は常数で、 λ は振幅減小率を、 σ は時間のおくれを支配する。更に

¹⁾ このことに関しては第 2 報を参照されたい。

$$\alpha\tau = \gamma, \quad \alpha\sigma = \mu, \quad (2.2)$$

即ち $\eta = \cos \gamma, \quad \zeta = \lambda \cos(\gamma - \mu)$

とにおいて (1.6) に入れると, $\cos \gamma \geq \lambda \cos(\gamma - \mu)$ の時

$$-\lambda\alpha \sin(\gamma - \mu) = \epsilon\sqrt{\cos \gamma - \lambda \cos(\gamma - \mu)}, \quad (2.3)$$

又 $\cos \gamma \leq \lambda \cos(\gamma - \mu)$ の時

$$-\lambda\alpha \sin(\gamma - \mu) = -\epsilon\sqrt{\lambda \cos(\gamma - \mu) - \cos \gamma} \quad (2.4)$$

を得る. (2.3) 又は (2.4) は (2.1) が (1.6) の厳密解でない限り恒等式ではない. そこで我々は 0 から 2π までの γ の変域で (2.3) と (2.4) との等式が “なるべくよく” 成りたつ様に 2 つの常数 λ, μ を定める事で満足しなければならない. 但し “なるべくよく” とは “なるべく数多くの点で等式が成りたち, 成りたない場所では等式からのはずれがなるべく小さい事” を意味する. ところが (2.4) で

$$\gamma = \pi + \gamma' \quad (2.5)$$

とおくと

$$\begin{aligned} -\lambda\alpha \sin(\gamma' - \mu) &= \epsilon\sqrt{\cos \gamma' - \lambda \cos(\gamma' - \mu)} \\ (\cos \gamma' &\geq \lambda \cos(\gamma' - \mu)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

を得るから, (2.3) を用いて定められた λ, μ の値と (2.4) から出るそれらとは同じものでなければならない事が判る. そこで今後は (2.3) の方だけを考える事にしよう.

我々が定めようとする未知数は λ, μ の 2 個であるから, それを定めるには 2 つの条件式が必要である. 勿論 (2.1) で higher harmonics まで考えに入れて ϵ をもつと多くの未知常数を含む表式で仮定し, それと同じ数の条件式を作つてそれらを定める事も原理的には可能である. 然しながらその計算は実は甚だ煩雑であつて, この報告の目的とする実用性と背馳する. 計算の結果にそれほどの精度が要求される場合には全然別の解法によるのが便利であろうと思われる. 我々は後日改めてその問題に触れてみたいと思つている.¹⁾

3. A) 先ず方程式 (1.6) から直ちに明かである様に, 外海の水位と湖の水位とが相等しくなつた時, 湖の水位は最高又は最低を示す. 即ち (2.3) で $\gamma = \mu$ とおくと左辺は 0 であるから, 右辺も亦そうでなければならぬ. そのためには

$$\lambda = \cos \mu \quad (3.1)$$

である事が必要である. 又これから直ちに $\lambda \leq 1$ であることが判る. 即ち湖の水位の振幅は外海のそれより小さい. これは常識的に考えて当然の結論である. 勿論これ以外に γ に種々の値を与えてそこで (2.3) が満足される事を要請すれば, それに対応する条件

¹⁾ 第2報参照.

をいくつでも作る事が出来る。然しそれらは余り本質的な意味をもつ条件とは思われないのでここでは採り上げないことにする。

B) 第2の条件を作るには **moment** の方法を用いよう。これは先年山田教授によつて考案され、同氏及び他の人々によつて種々の応用問題を解くのに用いられ著しい成果をあげているものである。¹⁾ 積分の便利のために (2.3) の両辺を2乗して

$$\lambda^2 \alpha^2 \sin^2(\gamma - \mu) = \kappa^2 \sqrt{1 - 2\lambda \cos \mu + \lambda^2} \sin(\gamma + \psi) \quad (3.2)$$

と書く。但し ψ は

$$\sin \psi = \frac{1 - \lambda \cos \mu}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \mu + \lambda^2}}, \quad \cos \psi = \frac{-\lambda \sin \mu}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \mu + \lambda^2}} \quad (3.3)$$

で与えられる。不等式 $\cos \gamma \geq \lambda \cos(\gamma - \mu)$ の成りたつのは

$$-\psi \leq \gamma \leq \pi - \psi \quad (3.4)$$

の範囲である。(3.2) を (3.4) の範囲で“平均に”満足させるために (3.2) の両辺を γ について $-\psi$ から $\pi - \psi$ まで積分する。この様にして得られる等式は (3.2) より勿論甚だ寛かな条件であるが、その条件から

$$\begin{aligned} R &\equiv \lambda^2 \sin^2(\gamma - \mu) - \kappa^2 \alpha^{-2} \{ \cos \gamma - \lambda \cos(\gamma - \mu) \} \\ &= \lambda^2 \sin^2(\gamma - \mu) - \kappa^2 \alpha^{-2} \sqrt{1 - 2\lambda \cos \mu + \lambda^2} \sin(\gamma + \psi)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

が (3.4) の範囲で少くとも1回符号を変え、且つ R の正の部分の面積(積分)と負の部分の面積とが相等しいことが保障される、それで実際に積分を行つてみると

$$\pi \lambda^2 = 4 \kappa^2 \alpha^{-2} \sqrt{1 - 2\lambda \cos \mu + \lambda^2}, \quad (3.6)$$

或は

$$\frac{\pi^2 \alpha^4}{16 \kappa^4} \lambda^4 + 2\lambda \cos \mu - \lambda^2 - 1 = 0 \quad (3.7)$$

を得る。これを第2の条件としよう。

C) **moment** の方法は未知函数(ここでは ζ) を N 個の未知常数を含む表式で仮定し、(3.2) の両辺に γ^i ($i=0, 1, 2, \dots, N-1$) をかけて $-\psi$ から $\pi - \psi$ まで積分して得られる N 個の關係式から未知常数を定めようとする方法を総称する。B) で実行したのは $i=0$ の場合であるから、次に $i=1$ とおけばどの様な条件が出て来るであろうか。

¹⁾ こゝには最初公にされた論文だけをあげる。

山田彦児, 微分方程式の1近似解法, 九州大学流体力学研究所報告. 第3巻, 第3号(1947), 29-35.

²⁾ $\cos \gamma \leq \lambda \cos(\gamma - \mu)$ の範囲では $R \equiv \lambda^2 \sin^2(\gamma - \mu) - \kappa^2 \alpha^{-2} \{ \lambda \cos(\gamma - \mu) - \cos \gamma \}$ とする。第2図, 第1表参照。

$$\lambda^2 \alpha^2 \int_{-\psi}^{\pi-\psi} \gamma \sin^2(\gamma-\mu) d\gamma = \kappa^2 \sqrt{1-2\lambda \cos \mu + \lambda^2} \int_{-\psi}^{\pi-\psi} \gamma \sin(\gamma+\psi) d\gamma$$

から若干の演算ののち

$$\pi \lambda^2 \{\pi - 2\psi + \sin 2(\psi + \mu)\} = 4 \kappa^2 \alpha^{-2} \sqrt{1-2\lambda \cos \mu + \lambda^2} (\pi - 2\psi) \quad (3.8)$$

を得る。これが第3の条件である。

我々は以上の様にして3つの条件式を得た：(3.1)，(3.7)及び(3.8)これである。定めるべき常数は λ ， μ のただ2個であるから，3つの条件式のうちから適当な2つをえらばねばならぬ。我々は次の2つの組合せについて若干の吟味を行おうとする。

(3.1)と(3.7)：(i)と呼ぶ。脚符iをつける。

(3.7)と(3.8)：(ii)と呼ぶ。脚符iiをつける。¹⁾

前者は湖の水位の最高，最低の両点で微分方程式を完全に満し，他の場所では残差 R (3.5)(微分方程式を満さない程度のみやすと考えられる)の面積が半週期の間で正負相半ばするとうり条件であるし，後者はこれに反して，最高，最低点に於て方程式を強制的に満させることが全体としての近似を却つて損うおそれもあることに注意してその条件をすて，²⁾その代りにもう1次高いmomentまで0とおいたものである。これらの条件から R は半周期の間で少くとも2回符号を変えることが保障される。³⁾

先ず(i)を吟味するために(3.1)を(3.7)に入れると

$$\frac{\pi^2 \alpha^4}{16 \kappa^4} = k \quad (3.9)$$

とおいて λ に関する次の方程式を得る：

$$k\lambda^4 + \lambda^2 - 1 = 0. \quad (3.10)$$

この解は

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4k}-1}{2k}} \quad (3.11)$$

であるから，(3.1)にもどつて

$$\mu = \cos^{-1} \sqrt{\frac{\sqrt{1+4k}-1}{2k}} \quad (3.12)$$

を導くことが出来る。 λ ， μ が常識と矛盾しないことをためすには次の極端な場合を考えればよい： $k \rightarrow 0$ ， $k \rightarrow \infty$ 。(1.3)と(3.9)とを併せ考えると，前者は湖の面積に比べ

1) (3.1)と(3.8)との組合せは不自然であるから棄てる。

2) 山田彦児，非線型振動を解く1つの試み，九大流研報告.第7巻第2号(1950)，8-16，特に10。

3) 山田，前掲(頁4)。29。

て出口が非常に大きい場合であり、後者はその逆であることが判る。夫々の場合 (3.11), (3.12) から、

$$k \rightarrow 0 : \lambda \rightarrow 1, \quad \mu \rightarrow 0,$$

$$k \rightarrow \infty : \lambda \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \pi/2.$$

即ち前者では湖の水位の振幅は外海のそれと同じく、位相のおくれもない。後者では湖の水位の動きは極めて小さく、同時に位相は $\pi/2$ だけおくれる。これらの事は常識的にもなつとくの出来る結論である。

(ii) 次に (3.6) を (3.8) に入れると

$$\sin 2(\psi + \mu) = 0$$

を得る。これから

$$\cos(\psi + \mu) = 0 \quad \text{又は} \quad \sin(\psi + \mu) = 0$$

でなければならない。そこで (3.3) を考慮すると

$$\sin \mu = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda^2 = \cos \mu. \\ \text{従つて又 } \lambda \leq 1. \end{array} \quad (3.13)$$

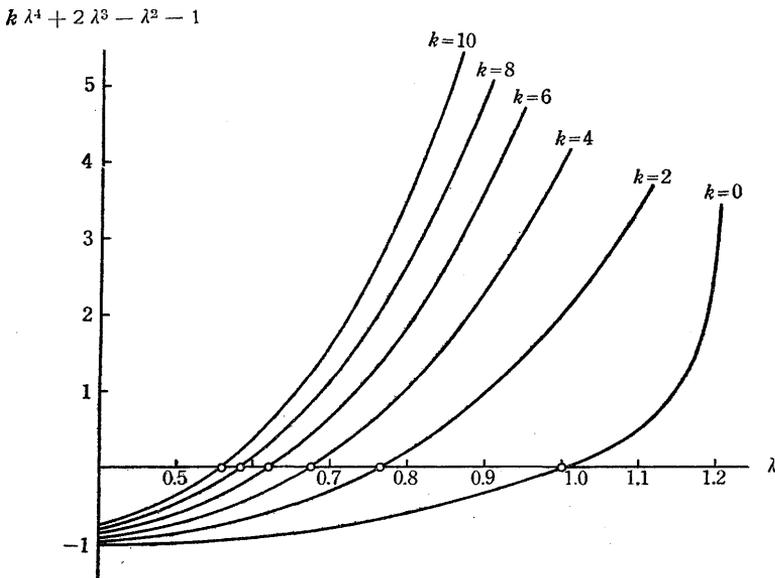
即ち μ は π の如何に拘らず 0 又は π .

これは明かに不合理である。

(3.13) を (3.7) に入れると (3.9) の k を使つて

$$k\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0. \quad (3.14)$$

k の種々の値に対する λ の値は第 2 図から読みとられる。 λ が判ると μ は (3.13) から



第 2 図

求められる。 $k \rightarrow 0, \infty$ の時 λ, μ が前と同じ極限值をもっている事は容易に証明出来る。

我々はこの様にして 2種類の解 $(\lambda_i, \mu_i), (\lambda_{ii}, \mu_{ii})$ を得た。そこで次の問題はそのいずれが我々の目的によりふさわしいかという事である。

4. 凡そ近似解の優劣は計算の容易さと精度とによつて判定されるべきであろう。先ず計算の容易さという点では (3.11), (3.12) から出る λ_i, μ_i は (3.13), (3.14) からの λ_{ii}, μ_{ii} にまさる; というのはある指定された k の値に対して, 前者は唯簡単な開平によつて所求の量を知ることが出来るのに反し, 後者は (3.14) を数値的に解くか, 又は第2図の上で k を内挿するかの途をえらばねばならぬからである。次に精度に関して述べると, 次の事は予め分つている: 湖の水位の半周期, 谷から山まで, の間で

(i) は R を両端で0にし, 中間で少くとも1回その符号を変えさせる。

(ii) は R の符号を変域の中間で少くとも2回変えさせる。然し両端では一般に R を0としない。

然しこれだけで精度の優劣をきめることは出来ないので, 具体的な例について更に詳しく述べよう。

数値の例として $k=10$ ととる。(1.3) と (3.9) にもどつて計算するとこれは L , 外海の潮汐の振幅, を 1 m として大体 $A/B=6 \times 10^4$ の場合に対応する。 $k=10$ を

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) (3.11) に入れると} \\ \text{(3.12) から} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lambda_i = 0.5197 \ 655. \\ \mu_i = 1.024 \ 220. \end{array} \right\} (4.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ii) (3.14) に入れると} \\ \text{(3.13) から} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lambda_{ii} = 0.5572 \ 723. \\ \mu_{ii} = 1.255 \ 023. \end{array} \right\} (4.2)$$

を得る。これらを使つて湖の水位は (2.2) から

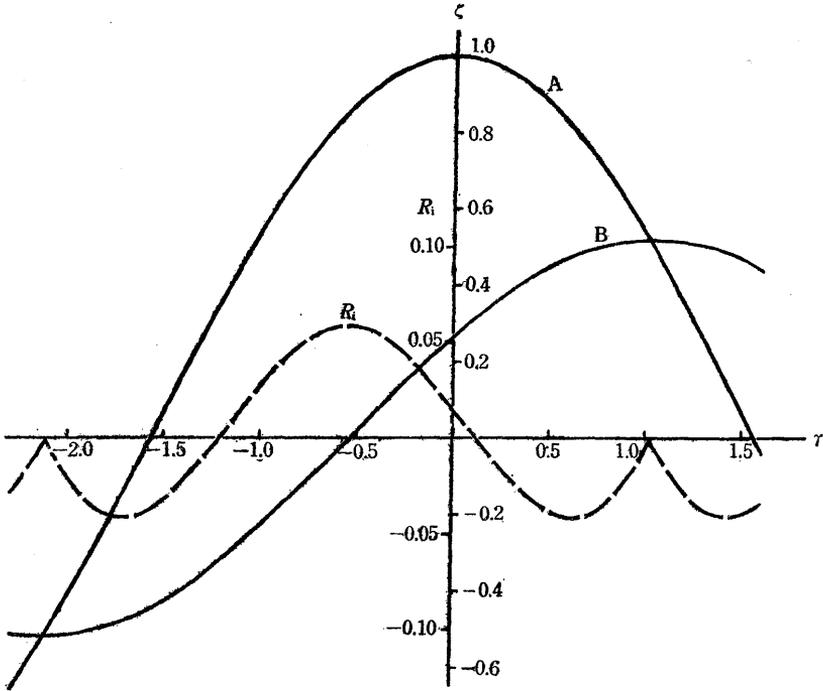
$$\zeta = \lambda \cos(\gamma - \mu)$$

で与えられる。第3図に外海の水位 $\cos \gamma$, 湖の水位 $\lambda_i \cos(\gamma - \mu_i)$ 及び R_i (3.5) が示され, 第4図には $\lambda_{ii} \cos(\gamma - \mu_{ii})$ と R_{ii} とが示されている。詳細な数値は第1表について見られたい。 R_i は変域 $(-\psi, \pi - \psi)$ の両端で0となり, 中間で2回符号を変える。(条件として要請したのは1回であるのに, 要求したのよりもよい結果が出たのである。) これに対し R_{ii} は変域の中間で要求通り2回符号を変えている。又 R は近似解が原の方程式を完全には満さないその程度を示すと見られるので,¹⁾ $|R|$ の最大値を比べてみると

$$|R_i|_{\max} \doteq 0.06, \quad |R_{ii}|_{\max} \doteq 0.10 \quad (4.3)$$

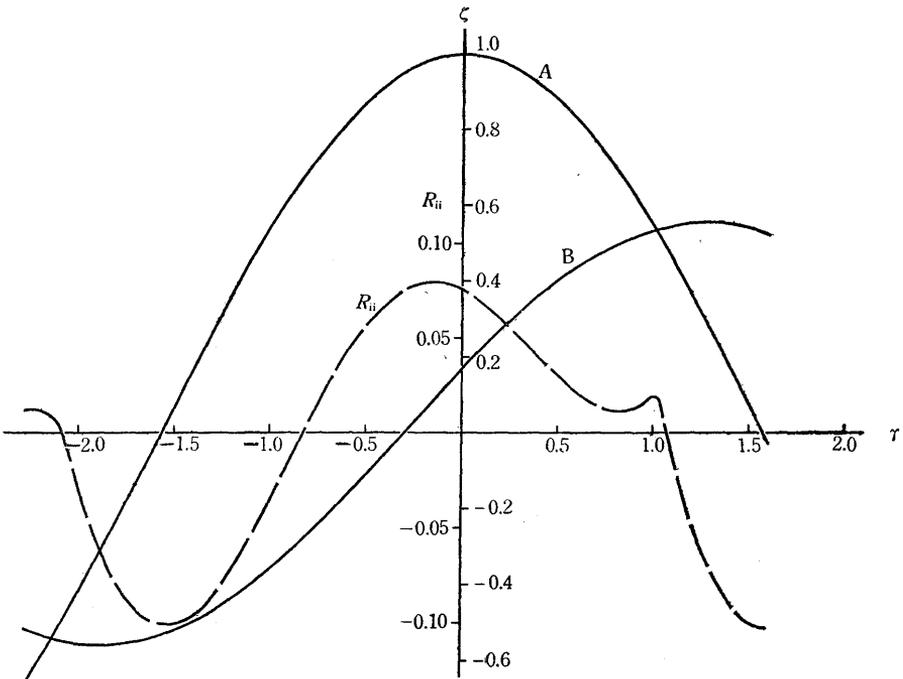
である。以上計算の手数の簡単さからでも, 半周期の間に原方程式を完全に満す回数からでも, $|R|_{\max}$ の値からでも (i) の解法がすぐれている事が判る。それで **結論**: (1.6) の

¹⁾ R を直ちに近似解の誤差と見る事は出来ない。



第 3 圖

A : $\cos r$ B : $\lambda_1 \cos(r - \mu_1)$



第 4 圖

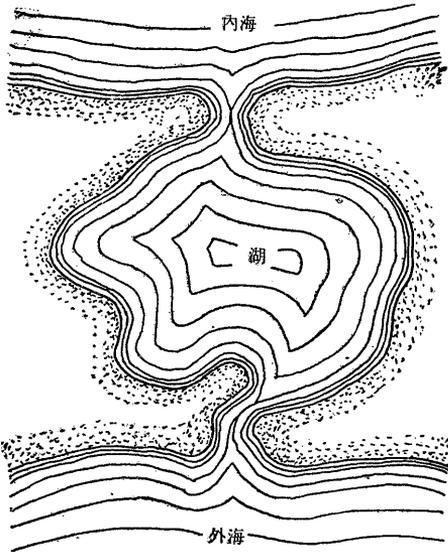
A : $\cos r$ B : $\lambda_{11} \cos(r - \mu_{11})$

第 1 表

γ	$\cos \gamma$	$\lambda_i \cos(\gamma - \mu_i)$	R_i	$\lambda_{ii} \cos(\gamma - \mu_{ii})$	R_{ii}
-2.3	-0.66628	-0.51113	-0.02963	-0.51031	0.01140
-2.2	-0.58850	-0.51800	-0.01567	-0.53012	0.01503
-2.1	-0.50485	-0.51969	-0.00360	-0.54463	0.00406
-2.0	-0.41615	-0.51620	-0.02115	-0.55369	-0.03018
-1.9	-0.32329	-0.50754	-0.03321	-0.55722	-0.05804
-1.8	-0.22720	-0.49382	-0.03992	-0.55519	-0.07914
-1.7	-0.12885	-0.47516	-0.04163	-0.54760	-0.09332
-1.6	-0.02920	-0.45175	-0.03887	-0.53454	-0.10070
-1.5	0.07074	-0.42383	-0.03231	-0.51615	-0.10162
-1.4	0.16997	-0.39168	-0.02275	-0.49259	-0.09665
-1.3	0.26750	-0.35561	-0.01106	-0.46411	-0.08655
-1.2	0.36236	-0.31598	0.00184	-0.43099	-0.07224
-1.1	0.45360	-0.27320	0.01501	-0.39357	-0.05745
-1.0	0.54030	-0.22769	0.02757	-0.35221	-0.03517
-0.9	0.62161	-0.17990	0.03873	-0.30734	-0.01462
-0.8	0.69671	-0.13032	0.04777	-0.25939	0.00581
-0.7	0.76484	-0.07943	0.05416	-0.20885	0.02510
-0.6	0.82534	-0.02775	0.05751	-0.15622	0.04236
-0.5	0.87758	0.02421	0.05792	-0.10213	0.05680
-0.4	0.92106	0.07593	0.05449	-0.04692	0.06794
-0.3	0.95534	0.12689	0.04830	0.00875	0.07538
-0.2	0.98007	0.17658	0.03942	0.06434	0.07898
-0.1	0.99500	0.22450	0.02839	0.11929	0.07883
0	1.	0.27018	0.01590	0.17304	0.07522
0.1	0.99500	0.31317	0.00274	0.22506	0.06867
0.2	0.98007	0.35302	-0.01020	0.27484	0.05986
0.3	0.95534	0.38934	-0.02200	0.32187	0.04962
0.4	0.92106	0.42172	-0.03171	0.36568	0.03890
0.5	0.87758	0.44995	-0.03851	0.40583	0.02869
0.6	0.82534	0.47368	-0.04156	0.44194	0.02002
0.7	0.76484	0.49268	-0.04017	0.47362	0.01391
0.8	0.69671	0.50675	-0.03382	0.50057	0.01127
0.9	0.62161	0.51576	-0.02214	0.52252	0.01291
1.0	0.54030	0.51961	-0.00498	0.53925	0.01950
1.1	0.45360	0.51828	-0.01452	0.55059	-0.01669
1.2	0.36236	0.51176	-0.02885	0.55643	-0.04726
1.3	0.26750	0.50013	-0.03775	0.55671	-0.07120
1.4	0.16997	0.48350	-0.04149	0.55142	-0.08825
1.5	0.07074	0.46204	-0.04051	0.54063	-0.10091
1.6	-0.02920	0.43596	-0.03544	0.52443	-0.10197

周期解を近似的に求めるには (3.11), (3.12) の公式によるのが便利である。

5. 次に前節までの問題の拡張として外海と内海 (貯水池) との間に面積 A の湖がある



第 5 図

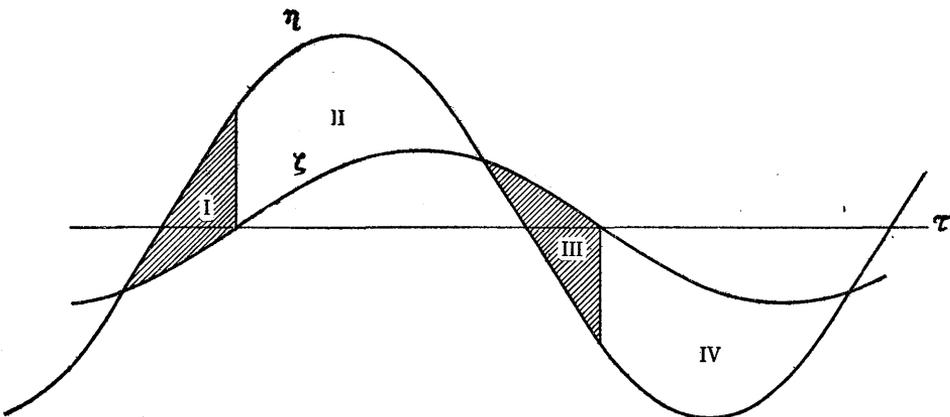
場合を考えよう。外海の水位を $H(t)$, 湖の水位を $h(t)$ として, 内海は非常に広いのでその水面は常に一定の高さに保たれ, その水位は外海の平均水位に等しいと仮定する。2つの水位の間にきまつた差違があるときにでもこれから述べようとするのは少し修正しさえすればそのままあてはまるであろう。湖から外海, 内海への有効な出口面積を夫々 B, B' とし (1 参照),

$$\kappa = \sqrt{2}B/A, \quad \kappa' = \sqrt{2}B'/A \quad (5.1)$$

とおく。(1.2), (1.3) で定義された無次元の高さ η, ζ と無次元の時間 τ を用いると, 未知量 ζ に関する微分方程式は 1 と同じ近似の程度で次の様にかかれる:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\tau} &= \kappa\sqrt{\eta-\zeta} + \kappa'\sqrt{-\zeta} \quad (\eta \geq 0 \geq \zeta \text{ 又は } 0 \geq \eta \geq \zeta \text{ の時}), & (I) \\ &= \kappa\sqrt{\eta-\zeta} - \kappa'\sqrt{\zeta} \quad (\eta \geq \zeta \geq 0 \text{ の時}), & (II) \\ &= -\kappa\sqrt{\zeta-\eta} - \kappa'\sqrt{\zeta} \quad (\zeta \geq \eta \geq 0 \text{ 又は } \zeta \geq 0 \geq \eta \text{ の時}), & (III) \\ &= -\kappa\sqrt{\zeta-\eta} + \kappa'\sqrt{-\zeta} \quad (0 \geq \zeta \geq \eta \text{ の時}). & (IV) \end{aligned} \right\} (5.2)$$

ζ の最大, 最小は明かに (II) と (IV) の場合におこり, その時の ζ の値 ζ_m と同じ点の



第 6 図

η の値との間には

$$\zeta_m = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \kappa'^2} \eta \quad (5.3)$$

という関係がある。 $\kappa' = 0$ とおけば (3.1) と同じである。 η としては相かわらず $\cos \gamma$ ($\gamma = \alpha\tau$) を仮定し、周期解 ζ の近似値を $\lambda \cos(\gamma - \mu)$ の形で求めようとする。 これらを (5.2) に入れて、(I), (II) で $\gamma = \gamma' + \pi$ とおくと夫々 (III), (IV) が導かれる。 言いかえると、(I) 乃至 (IV) の範囲で ζ が夫々 $\lambda_i \cos(\gamma - \mu_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) で近似的にあらわされたと考えると次の関係がある。

$$\lambda_1 = \lambda_3, \quad \mu_1 = \mu_3; \quad \lambda_2 = \lambda_4, \quad \mu_2 = \mu_4. \quad (5.4)$$

それで (I), (II) の範囲 (半周期) だけに注目してそれから λ, μ を定めておけば、それらは他の半周期に対しても使われる。^D そこで (2.3), (2.4) の代りに

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \alpha \sin(\gamma - \mu_1) &= \kappa \sqrt{\cos \gamma - \lambda_1 \cos(\gamma - \mu_1)} + \kappa' \sqrt{-\lambda_1 \cos(\gamma - \mu_1)} \\ (-\phi_1 \leq \gamma \leq -\frac{\pi}{2} + \mu_1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

及び

$$\begin{aligned} -\lambda_2 \alpha \sin(\gamma - \mu_2) &= \kappa \sqrt{\cos \gamma - \lambda_2 \cos(\gamma - \mu_2)} - \kappa' \sqrt{\lambda_2 \cos(\gamma - \mu_2)} \\ (-\frac{\pi}{2} + \mu_2 \leq \gamma \leq \pi - \phi_2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

を得る。 ϕ_i は λ_i, μ_i を使つて (3.3) から定められる。 然しながらこれでは ζ の曲線が (I), (II) の境界でうまくつながるかどうか分からないので簡単のため

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2$$

とおいて ζ が単一な cosine 曲線であらわされるものと仮定する。 例えば λ_1, λ_2 の平均を λ とし、 μ_1, μ_2 の平均を μ とすると考えておけばよい。 そうすると最後に我々に残されたものは唯 2 つの未定常数であるから、 2 つの条件式があればこれらをきめる事が出来る。

6. その条件式を求めるために前に述べた moment の方法を使おうとすると直ちに困難に出逢う。 先ず (5.5) 又は (5.6) を 3 と同じ様に 2 乗して γ について積分すると、 argument に未知数を含む楕円積分の項のある代数方程式を取り扱わねばならぬ事になる。 それをさけるために、もう一度 2 乗して積分すると今度は λ, μ を定める 2 つの方程式は余りに複雑になつてしまつて到底実用には供されそうもない。 膨大な労力を要する計算法を示す事はこの報告の目的とするところでないので、我々は次の様な簡便法で解の大略の様子を知ろうとする： 4 で我々は境界条件と第 0 次の moment から定められた解が第 1 次、第

^D (2.5), (2.6) 附近の議論と同じである。 一般に ζ が $\cos(\gamma - \mu)$ の奇数乗だけを含む級数で仮定されていれば (5.4) は成立する。

2 次の moment から定められたものよりその精度に於て却て優ることを知つた。そこで極めて大ざつばな事を知るだけを目的とするなら、moment を考慮せずに境界条件だけから近似解の見当をつける事は出来ないであろうか。境界条件としては先ず水位の山又は谷に於ける条件 (5.3) がある。この山は $\gamma = \mu$ にあるので、(5.3) に $\zeta_m = \lambda$, $\eta = \cos \mu$ を入れて

$$\lambda = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \kappa'^2} \cos \mu$$

を得る。そこで今

$$\frac{\kappa}{\alpha} = \rho, \quad \frac{\kappa'}{\alpha} = \rho' \quad (6.1)$$

とかくと、

$$\lambda = \frac{\rho^2}{\rho^2 + \rho'^2} \cos \mu \quad (6.2)$$

である。序でにこれから $\lambda < 1$ である事も判る。もう 1 つの境界条件は (I) と (II) との境にえらぶのが自然であろうから、(5.5) で $\gamma = -\frac{\pi}{2} + \mu$ とおくと

$$\lambda = \rho \sqrt{\sin \mu}. \quad (6.3)$$

(6.2) と (6.3) を連立にとくと

$$\lambda = \rho \sqrt{\sqrt{1 + \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^2}{4\rho^4}} - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^2}{2\rho^3}}, \quad (6.4)$$

$$\mu = \sin^{-1} \left\{ \sqrt{1 + \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^2}{4\rho^4}} - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^2}{2\rho^3} \right\} \quad (6.5)$$

ρ	ρ'	λ	μ
0	有限	0	0
有限	0	< 1	$< \pi/2$
∞	有限	1	0
有限	∞	0	0
∞	0	1	0
0	∞	0	0
0	0	$\frac{\rho^2}{\rho^2 + \rho'^2}$	$\pi/2$
∞	∞	$\frac{\rho^2}{\rho^2 + \rho'^2}$	0

が直ちに得られる。(6.5) の { } の中が 1 より小さい事はすぐ判る。 ρ , ρ' の極端な場合をとつて夫々に対応する λ , μ の値をしらべると左の表のようになる。これらは不合理な結論とは思われない。

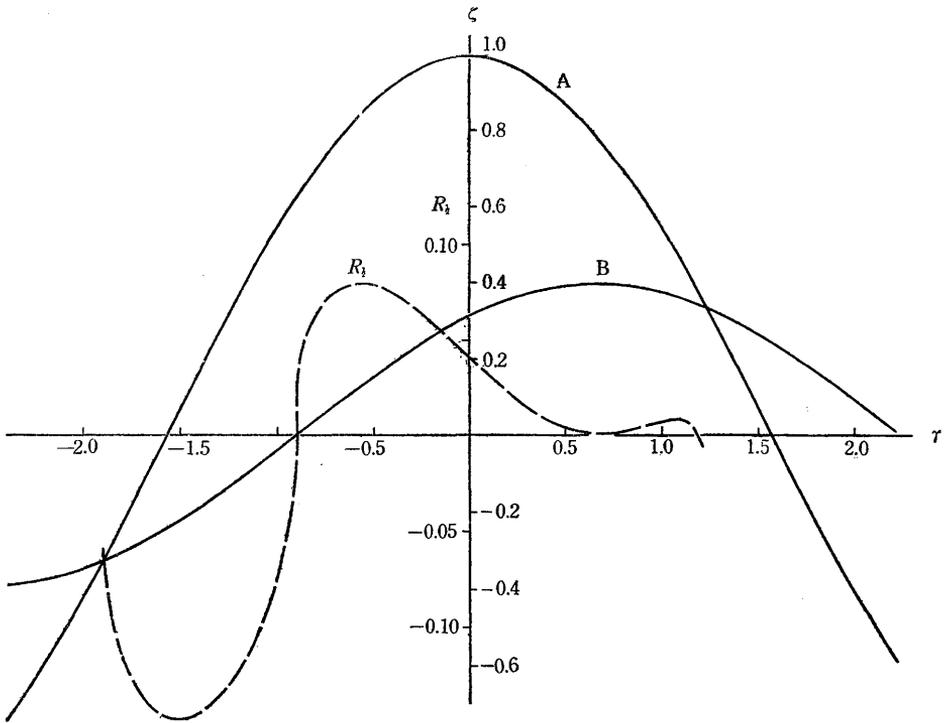
この方法の精度を次に検査するために

$$\rho = \rho' = \frac{1}{2} \quad (6.6)$$

の場合について計算を実行してみよう。この時 (3.9) から

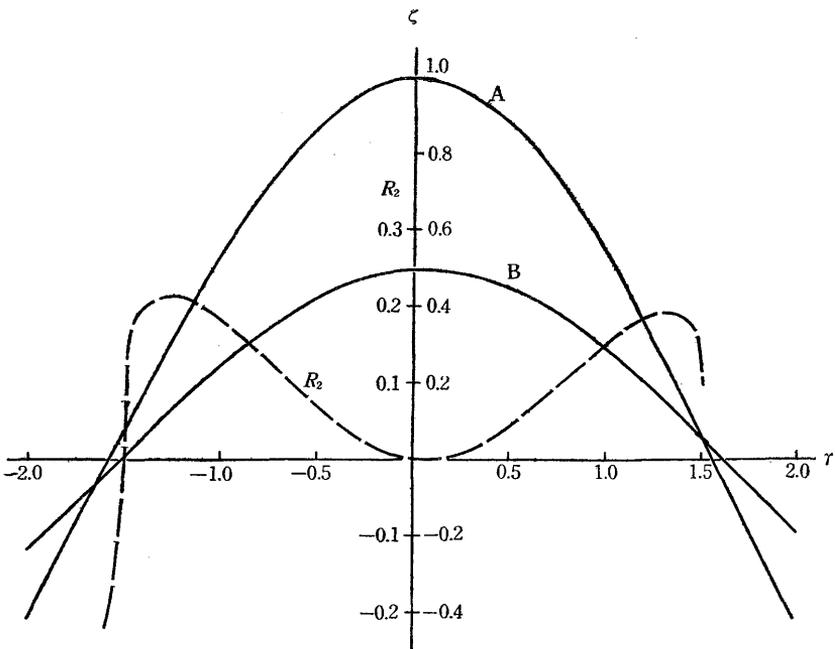
$$k = \frac{\pi^2 \cdot 16}{16} = 9.87 \doteq 10$$

であるからこれは 4 にあげた例と比較されるべきものである。(6.4), (6.5) から次の数値が得られる：



第 7 図

A : $\cos \tau$ B : $\lambda_{1/2} \cos(\tau - \mu_{1/2})$



第 8 図

A : $\cos \tau$ B : $\lambda_2 \cos(\tau - \mu_2)$

第 2 表

r	$\cos r$	$\lambda_{1/2}\cos(r-\mu_{1/2})$	$R_{1/2}$	$\lambda_2\cos(r-\mu_2)$	R_2
-2.4	-0.73739	-0.39196			
-2.3	-0.66628	-0.38704			
-2.2	-0.58850	-0.37826			
-2.1	-0.50485	-0.36570			
-2.0	-0.41615	-0.34948		-0.23551	
-1.9	-0.32329	-0.32977	-0.06143	-0.19041	
-1.8	-0.22720	-0.30681	-0.11437	-0.14340	
-1.7	-0.12885	-0.28075	-0.13573	-0.09496	
-1.6	-0.02920	-0.25188	-0.14598	-0.04558	-0.21935
-1.5	0.07074	-0.22049	-0.14873	-0.00427	0.10088
-1.4	0.16997	-0.18690	-0.14549	0.05407	0.19952
-1.3	0.26750	-0.15144	-0.13696	0.10333	0.21030
-1.2	0.36236	-0.11447	-0.12323	0.15156	0.20655
-1.1	0.45360	-0.07635	-0.10347	0.19827	0.19530
-1.0	0.54030	-0.03747	-0.07428	0.24292	0.17901
-0.9	0.62161	0.00178	0.01573	0.28523	0.15925
-0.8	0.69671	0.04102	0.06065	0.32469	0.13717
-0.7	0.76484	0.07985	0.07386	0.36090	0.11393
-0.6	0.82534	0.11787	0.07867	0.39351	0.09062
-0.5	0.87758	0.15472	0.07839	0.42218	0.06828
-0.4	0.92106	0.19003	0.07449	0.44664	0.04787
-0.3	0.95534	0.22343	0.06795	0.46663	0.03027
-0.2	0.98007	0.25460	0.05956	0.48196	0.01622
-0.1	0.99500	0.28323	0.05004	0.49247	0.00630
0	1.0	0.30903	0.04006	0.49806	0.00093
0.1	0.99500	0.33174	0.03025	0.49868	0.00035
0.2	0.98007	0.35113	0.02117	0.49331	0.00455
0.3	0.95534	0.36702	0.01331	0.48500	0.01336
0.4	0.92106	0.37923	0.00707	0.47084	0.02642
0.5	0.87758	0.38766	0.00273	0.45198	0.04316
0.6	0.82534	0.39221	0.00043	0.42860	0.06287
0.7	0.76484	0.39285	0.00010	0.40094	0.08469
0.8	0.69671	0.38957	0.00152	0.36927	0.10763
0.9	0.62161	0.38239	0.00411	0.33392	0.13065
1.0	0.54030	0.37139	0.00668	0.29522	0.15255
1.1	0.45360	0.35668	0.00685	0.25358	0.17203
1.2	0.36236	0.33841	-0.00559	0.20940	0.18748
1.3	0.26750	0.31675		0.16313	0.19630
1.4	0.16997	0.29193		0.11531	0.19097
1.5	0.07074	0.26419		0.06626	0.09957
1.6	-0.02920	0.23381		0.01655	
1.7	-0.12885	0.20110		-0.03333	
1.8	-0.22720	0.16637		-0.08288	
1.9	-0.32329	0.12998		-0.13160	
2.0	-0.41615	0.09230		-0.17900	
2.1	-0.50485	0.05369			
2.2	-0.58850	0.01454			

$$\lambda = 0.3930\ 757, \quad \mu = 0.6662\ 394. \quad (6.7)$$

第7図と第2表とに $\cos \gamma$, $\lambda \cos(\gamma - \mu)$ 及び (3.5) に対応する残差

$$R' = \lambda^2 \sin^2(\gamma - \mu) - \rho^2 \{ \cos \gamma - \lambda \cos(\gamma - \mu) \} - \rho'^2 \{ \mp \lambda \cos(\gamma - \mu) \} \\ \mp 2 \rho \rho' \sqrt{ \{ \cos \gamma - \lambda \cos(\gamma - \mu) \} \{ \mp \lambda \cos(\gamma - \mu) \} } \quad (6.8)$$

を示す. 但し複号は $(-\phi, -\pi/2 + \mu)$ で上, $(-\pi/2 + \mu, \pi - \phi)$ で下をとるものとする. $R'_{1/2}$ (脚符は $\rho = \rho'$ の値を示す) は要求通り $\gamma = -\pi/2 + \mu$ と μ とで0になり, $|R'_{1/2}|_{max} \doteq 0.15$ であるから, (4.3) と比較するとたしかに moment の方法よりは精度が劣るけれども実用にはなりそうである. 殊に R' の曲線は $\gamma = \mu$ (湖の水位の山) で横軸に切するので割合に広い範囲にわたつて R' はかなり小さい. これは非常に都合のよい事である. 同じ傾向が ρ , ρ' のどんな値についても成りたつ事を一般的に示すのは仲々面倒であろうが, ここにはもう1つの例をあげて調べてみる事にする. それは

$$\rho = \rho' = 2 \quad (6.9)$$

という場合である. この時の k の値は大体 0.04 であるから, (6.6) と比べると殆ど他の極端と見られるであろう. 前と全く同じ様にして

$$\lambda = 0.4990\ 301, \quad \mu = 0.0622\ 980 \quad (6.10)$$

を得る. 第8図と第2表とを見れば $R'_{1/2}$ と R'_2 とは大体その様相を同じくするので, 我々の予想は殆どたしかめられたものと考えてよいであろう. 以上の吟味で得られる結論: 複雑な乗り換えの微分方程式 (5.2) の周期解は境界条件からだけで略々その全貌をうかがう事が出来る. (6.4), (6.5) がその解である.

最後に水文学的に興味のある結論が (4.1) と (6.7) とを比較する事に依つて得られる.¹⁾ 即ち浜名湖の様に湖の奥に大きい第2の湖があつて, これが第1のものに対して貯水池の役をしていると考えられる時, 第1の湖の水位は貯水池のない場合に比べて次の特徴をもつ:

- A) 貯水池はその前にある湖の水位の変動の振幅を減少させ,
- B) 外海の潮汐との位相差も減少させる.

以 上

(昭和28年7月14日受理)

¹⁾ 勿論我々は ρ , ρ' の唯1組の値に対して計算を行つただけであるからこの結論は確定的ではない. こゝには予想として記しておく. これは第4報で具体的に確かめられる.