

異方弾性體としての強化積層材：非弾性的な性質について

樋口，正一

<https://doi.org/10.15017/4743337>

出版情報：應用力學研究所所報. 2, pp.3-22, 1952-12. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



異方弾性體としての強化積層材

附 非弾性的な性質について¹⁾

樋 口 正 一

要 旨

第1章に Cauchy に始まる異方弾性論發展の概観を述べ、第2章に強化積層材を“殆んど弾性的”と見なし得るとして、その異方弾性係数の計測値を掲げた。しかしこの材料の感時性を無視することも一概にはできないので、初期の匍匐や弛緩の性状を幾つかの常數に現象論的な立場から整理して第3章にかかげた。材料の感時性を構造論的に説明しようとする諸説の中から定説を求めることは現在困難なのでむしろ簡単な模型によつたものである。

第1章 異方弾性論發展の概要

1. 異方弾性論の發端 すぐれた力學者たちの數多くの研究のお蔭で、私たちは弾性體がどんな外力のもとでどんな變形をし、その内部にどのような應力を生ずるかということを嚴密に計算したり、あるいは嚴密でなくともある程度見當付けたりすることができる。しかし異方弾性體については、等方弾性體のように解析研究が行き届いていないので外力に對する異方性材料の行動を考察するのに何か不透明な幕を距てゐるような氣持が感ぜられる。それで二三の基本的な異方弾性問題の研究を私は試みた。とりかかつてみて異方弾性論は等方弾性論とほとんど同じ位古い歴史を持つてゐることを知り驚いてしまった。實に Cauchy の異方弾性論は今から 130 年程も昔のことであつた [1]^{2) 3)}。

しかし考えてみれば Hooke の法則の異方體への一般化は、2 次元 3 次元の問題へ Hooke の法則を一般化する時、同時に浮んで来る自然な概念に違ひない。だから異方弾性論は前世紀では工學者の問題であるより數學者と物理學者の問題であつたことも當然であらう。したがつていろいろな異方性が半ば概念的に考えられ、その例について解かれたりした。Saint Venant が丸太を輪切りにした圓板の様な異方性について解を求めたのはその一例である⁴⁾。また後に續いた工學者たちが弾性論の名のもとに弾性とは何ぞやの研究ではなく、もつぱら弾性力學上の研究に従事したのと違つて、弾性の由來に一應の物理的な説明を試みようとしたのも自然である。そして導かれた式が Cauchy, Poisson それから Saint Venant などの當時のいわば大陸派が據つた Rari-constant

¹⁾ 昭和27年6月10日應用力學研究所研究會において發表。

²⁾ 括弧 [] の數字は文末の文獻を示す。

³⁾ 積層材を人間が作つて使用したのは紀元前1500年だと稱されるが [16], ここに述べるのは力學としての異方弾性論である。

⁴⁾ これは Voigt も扱つた [2]。近くは木村氏 [3] のもある。二つとも外力も圓型對稱である。

theory の基本式であつた⁹⁾。そこにイギリスの G. Green [4] は Cauchy たちの分子論的な觀點を捨てて歪エネルギーを考へることから應力—歪の關係式を定めた。これが Multi-constant theory であつた。これは Lord Kelvin によつて熱力學の立場から支持されて大陸派と對立するような形勢になつた。第2章式(1)に示すように、これによると一般に異方彈性體は 21 個の彈性係數が獨立な數値として決定されることになる。Rari-constant theory では Love のいう Cauchy の關係式が導かれるので獨立な常數は 15 個になるのである¹⁰⁾。

2. Voigt の結晶物理學 當時の素朴な分子論から彈性を規定して常數のかずをへすことは今から考へればかなり危険なことだつたわけである。W. Voigt は、それから一世代ほど經て、分子論的な説明を試みることに物理學的に重要な意味を認めながらも、むしろ現象論的な立場をとつて異方彈性論を詳しく取り扱つた [5]。Voigt は物理學者ではあるが、その結晶物理學の研究のために最も實際的に異方彈性論を取り扱つた最初の人だろゝと思われる。いろいろな場合の異方彈性力學的な計算を行い、結晶の彈性係數を測定している。そして必ずしも Cauchy の關係式は成立しないことを實証的に示した。この後 Rari, Multi-constant theory なる名稱は彈性論の教科書から姿を消した¹¹⁾。これは一般的な異方彈性體の力學問題の解を得ることが係數が 15 個から 21 個にますために不可能になることもないという理由にもよる。近年 K. Wolf [6] が 2 次元異方彈性問題の解を容易に得るために用いた彈性係數についてのいわゆる Wolf の條件⁹⁾が、特別な場合しか満足されず、また研究が進んだために、その條件はなくとも解析解が求められるようになったのに似た経緯である¹⁰⁾。

式(1)に表われる係數は等方體の場合 2 個になるが、異方性材料の對稱軸の種類と數によつてその中間の場合が幾種類も生ずる¹⁰⁾。しかし座標軸を對稱軸と無關係に採れば應力—歪の關係式はやはり式(1)の形になる。この式から分るように、たとえば 1 軸に直交する面上で 2 軸方向に働く剪斷應力 σ_6 により、 $s_{16} \geq 0$ にしたがつて、1 軸方向の伸びあるいは縮み ϵ_1 を生ずる。あるいはまた、單に 1 軸方向に引張ることと 2 軸方向なり 3 軸方向なりに迂り歪みを生ずる¹¹⁾。したがつて立方體を作つて一樣な水壓をかけると等方體と違つて一般に平行六面體の形にゆがむ。それからまた塙を單に振つただけで、非對稱斷面形の梁のように、曲りの變形を生ずるとか、伸びを生ずるとかということが一般には起る。

⁹⁾ Cauchy も前期後期で所説が異なるらしいので一概には云えない [1]。

¹⁰⁾ Voigt [5], Kap. VII, Abs. 2 に詳しい誘導がある。

¹¹⁾ 同じ時代に Love の Theory of Elasticity の初版が出ている [4]。

¹²⁾ Wolf は $G_{xy} = E_x E_y / [E_x + E_y (1 - 2\nu_{xy})]$ と假定した。この記號は式 (2'), (2'') による。

¹³⁾ なお第 4 節參照。

¹⁴⁾ Voigt [5], Love [4], 近くは Zener [7] その他多くの著書に詳細な表示がある。特に前二者にはそれぞれ異つた方法で係數間の關係式を對稱性から導かれている。

¹⁵⁾ この模様は 13 ページ寫眞 1 に示した模型から推察される。もつともこの場合の荷重は自重である。

また主應力の三方向と主歪の三方向とは必ずしも一致しない。このような今定性的に述べた問題を逐一考察して解式を與えたのは Voigt であつた¹²⁾。

3. 結晶の異方弾性の再燃 結晶體と異方弾性力學の關係はそれからまた一世代余りを距てて近時再び新しくなつて來た。弾性の由來を研究する弾性論が現代の物質構造論から注目され出したためと、材料の強度を構造論的に説明するために金屬材料を構成する結晶組織における微視的な弾性力學が必要になつて來たからである。こんどは Cauchy の時代に較べると格段の知識が物理學に用意されているわけである。イギリスの A. E. Green [8], H. A. Elliot [9], R. T. Shield [10] の異方弾性力學における研究はこの方面に寄與することを動機としたものがあるように思われる。

4. 工學への應用 しかし最も多くの研究は航空機構造に用いられた波板、合板、補強板の變形、挫屈の問題に關するものであつた。これらの材料の異方性はほとんど直交異方性と呼ばれるものである。

1923, 1924 年に M. T. Huber [11] が鐵筋コンクリート板を均質な直交異方性材料と見なして曲げの計算を行つた頃から應用弾性學は始めて異方弾性論を採り入れたと云つてよい。それは E. Seydel, 山名¹³⁾など航空機の機體設計に寄與するための研究に引き繼がれて、土木工學の面では K. Wolf [6] の基礎地盤の支持力の研究¹⁴⁾をあげられる程度で充分に應用されるに至らなかつた。

Seydel の研究, 林氏 [13], 澁谷氏 [14] の研究など波板を重要な對象としたもので、特に後者は波板を一應均質な異方弾性板として取り扱い、局部の應力はその結果を用いて別に計算することの妥當性に言及している¹⁵⁾。

波板の力學が下火になると補強板、合板を對象とした研究が目立つて來る。N. J. Hoff [16], 林氏 [13], 坪井氏, 井上氏 [17], 山越氏 [18], 大橋氏 [19] の研究など木板の曲げ, 振動, 安定を扱つたもので異方性板の特性がよく伺い知られるようになった。

木材の弾性係數に關する限りならば、古くイギリスの H. Carrington¹⁶⁾ の一連の研究を見出すことができる。ドイツでは H. Hoerig, J. Stamer のがある。合板やその他の改良材についても上の研究に雁行して Brenner-Kraemer, Küch などのものがある。これらの材料はその質にむらが多いことが見のがせない點

¹²⁾ 結晶板の曲げも Voigt は取り扱つた。M. T. Huber [11] が掲げた薄板曲げの基礎方程式も既に載録されていて、F. Gehring (1860 年) の學位論文に表われたことが附記されている [5]。

¹³⁾ このあたりの研究については林氏 [13] の文献表に詳しい。

¹⁴⁾ 樋口 [12] の研究にこの問題は特殊な場合として含まれている。Love によると transversely isotropic な場合である。

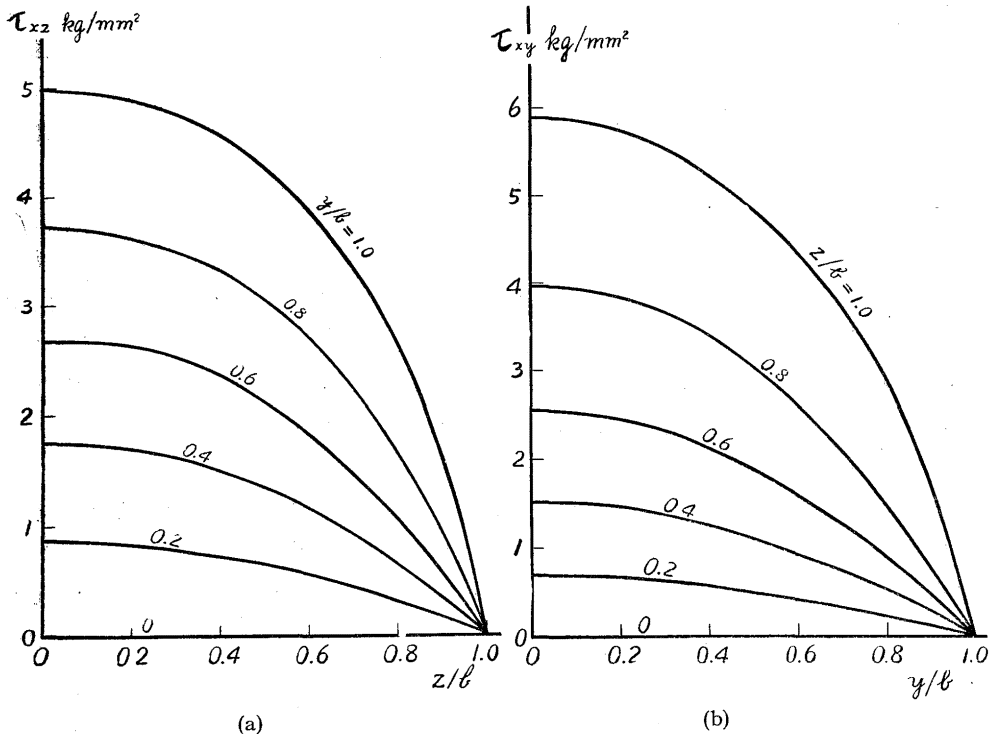
¹⁵⁾ 最近 Poritsky—Horvay の行つた管束の熱應力の研究がある。transversely isotropic な弾性體として計算し、局部の應力を別途求める方法である [15]。

¹⁶⁾ この種の文献を掲げるのはわずらわしい程である。Keylwerth [20] に詳しい。新しい合成積層材のものなど Modern Plastics にしばしば出る。

で、各國共それぞれ弾性係数を測定することが避けられなかつたが、最近 R. Keylwerth [20] は木材と積層板の弾性係數に焦點を定めて Voigt 以來の基本式と資料を集成している。

別に注目すべきものとして、特定材料について個有の弾性係數間の關係式を設定しようとする試みがある。これは弾性係數が余り多いので異方性の對稱性から導かれる關係式以外に更に實驗式を定めるもので前述の Wolf の條件もその例である。別に Stamer-Sieglerschmidt [21] のがある¹⁶⁾。

この Carrington から Keylwerth の線は材料の力學的な常數測定に主眼があり、境界値問題とか薄板曲げ、安定の問題にはない。しかし直交異方體では座標軸のとり方によつて座標軸方向のヤング率が座標軸廻轉角の三角函數の 4 次式で表わされること¹⁷⁾や、たとい材料の對稱軸方向、たとえば z 軸方向に長い試片を採つて振り試験をしても單獨にそれだけでは剪斷弾性係數 G_{xy} は求められないことなど、半世紀も前から知られていたことであるが、漸く工學の中に浸透させられて來たのはそれらの研究のお蔭である。



第 1 圖 正方形斷面の角隅の振り應力の分布。

斷面の第 1 象限が書いてある。一邊の長さ $= 2b$ 。

y, z のとり方については第 2 圖、第 3 圖参照。

(a) τ_{xx} の分布。 (b) τ_{xy} の分布。

等方體では τ_{xx} と τ_{xy} の分布は同じになる。

¹⁶⁾ 金屬についてのこの試みは Schmid-Boas [22] にあるが $E_x \neq E_y$ の場合には適用し難い。

¹⁷⁾ 式 (4) 参照。

5. 2 次元異方弾性論 等方弾性論において異常に發展した分野に2次元の境界値問題がある。異方弾性論においても各種の場合に同様な問題が現れて来る。等方弾性論の方ではその種の問題は S. Timoschenko がその幾つかの著書に集録したように Semi-inverse method によるものが多い。これは天下りの解式を與え、その中に未定の常數を含めておき境界値を満足するようにそれらを順次定めて行く方法であるが、異方弾性問題では等方弾性問題ほどに畑が耕やされていないので、この天下り式の解を假定することに困難が多い。そこに一つの手がかりとして考えられたのが modify された複素數の函數として解を與える方法であつた。これが考えつかれる頃は 各國共第二次大戰に入つたので、それぞれ獨立に池田氏 [23], 大久保氏 [24], A. E. Green [8], S. Lekhnitski¹⁸⁾ などによつて研究され佐藤氏 [25] によつて數學的な基礎を與えられた。そして半無限板、帯板、楔形板などの簡單な境界條件のものから漸次圓孔楕圓孔のある無限板の引張り、曲げなどの解が得られた [27]。

數學者が應用數學の一領域として應用力學に協力することは戰爭中から戰後にかけてわが國でも行かれたが、I. S. Sokolnikoff 一派 [28] もその例である。この人たちの研究に等方體の境界値問題の解から攝動近似的に異方體の同じ境界値問題を解こうとするのがある。これも重要な一つの道であると思われる。

異方體の力學は弾性論を越えて既に塑性論に進んだ面もある。各種の強度を調べたものもあるがここには言及しない。

第 2 章 強化積層材の弾性係數

1. 緒 言 外力を受けて等方弾性體內に生ずる應力狀態は弾性係數に無關係になるけれども、異方弾性體では一般にそうはならない。しかも異方體の弾性係數は等方體のもののように數少くしてはすまないののでわずらわしくなる。そこでまず弾性係數の記號と試験片の記號を示しておく。

異方弾性論が等方弾性論から分岐するのは應力と歪の關係を定める所からで¹⁹⁾、應力自體、歪自體は材料に無關係に單なる幾何學になつて何の相違も起らない。その應力と歪の關係を單に彈性的、あるいは“殆んど彈性的”と假定するにしても必ずしも Hooke 的である必要はないけれども、ここには一般化された Hooke 弾性を採用する、すなわち

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= S_{11} \sigma_1 + S_{12} \sigma_2 + S_{13} \sigma_3 + S_{14} \sigma_4 + S_{15} \sigma_5 + S_{16} \sigma_6, \\ \epsilon_2 &= S_{21} \sigma_1 + S_{22} \sigma_2 + S_{23} \sigma_3 + S_{24} \sigma_4 + S_{25} \sigma_5 + S_{26} \sigma_6, \\ &\dots\dots\dots \\ \epsilon_6 &= S_{61} \sigma_1 + S_{62} \sigma_2 + S_{63} \sigma_3 + S_{64} \sigma_4 + S_{65} \sigma_5 + S_{66} \sigma_6. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁸⁾ 倉西氏の紹介 [26] 参照。

¹⁹⁾ もちろん學問的には異方弾性論の特殊の場合が等方弾性論であると云えるだろう。

²⁰⁾ Voigt の記號に従つた。Voigt によると s_{ij} は Elastizitätsmoduln, 應力の逆數の次元を持つもの。 $\sigma_1 = c_{11} \epsilon_1 + c_{12} \epsilon_2 + \dots + c_{16} \epsilon_6$ などと表わした時の $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ は Elastizitätskonstante, 應力の次元を持つているがヤング率と同じではない。

ここに ϵ_i, σ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) はそれぞれ歪と應力の 6 個の成分を示し²⁰⁾, s_{ij} は弾性係数である。

直交異方弾性體の三つの對稱面に平行に座標面を位置させると,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= s_{xx} \sigma_x + s_{xy} \sigma_y + s_{xz} \sigma_z, \\ \epsilon_y &= s_{yx} \sigma_x + s_{yy} \sigma_y + s_{yz} \sigma_z, \\ \epsilon_z &= s_{zx} \sigma_x + s_{zy} \sigma_y + s_{zz} \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= t_{yz} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= t_{zx} \tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= t_{xy} \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。使い馴らされたヤング率 E , 剪斷弾性係数 G に倣つて書くと,

$$\left. \begin{aligned} s_{xx} &= \frac{1}{E_x}, & s_{yy} &= \frac{1}{E_y}, & s_{zz} &= \frac{1}{E_z}, \\ t_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}}, & t_{zx} &= \frac{1}{G_{zx}}, & t_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}}. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

また, z 方向の應力による z 方向の歪に對する, y 方向の歪みの比を ν_{zy} と書き他も同様な方式で添字をつけると,

$$\left. \begin{aligned} s_{yz} &= \frac{\nu_{zy}}{E_z}, & s_{zx} &= \frac{\nu_{xz}}{E_x}, & s_{xy} &= \frac{\nu_{yx}}{E_y}, \\ s_{zy} &= \frac{\nu_{yz}}{E_y}, & s_{xz} &= \frac{\nu_{zx}}{E_z}, & s_{yx} &= \frac{\nu_{xy}}{E_x}. \end{aligned} \right\} \quad (2'')$$

等方體では, これらはすべて $-\nu/E$ に等しくなる。

試験片の記號は第 2 圖に記入したように材料に對して座標軸を置き x, y, z の軸の方向に長くなつてゐる試験片をそれぞれ X, Y, Z で示した。引張り, 壓縮の荷重はその長手の方向に加えられる。振りではその長手の軸のまわりにねじられる。 P は板狀試験片, B は角柱狀試験片, C は圓壩狀試験片で, PX など組合せて用いる。

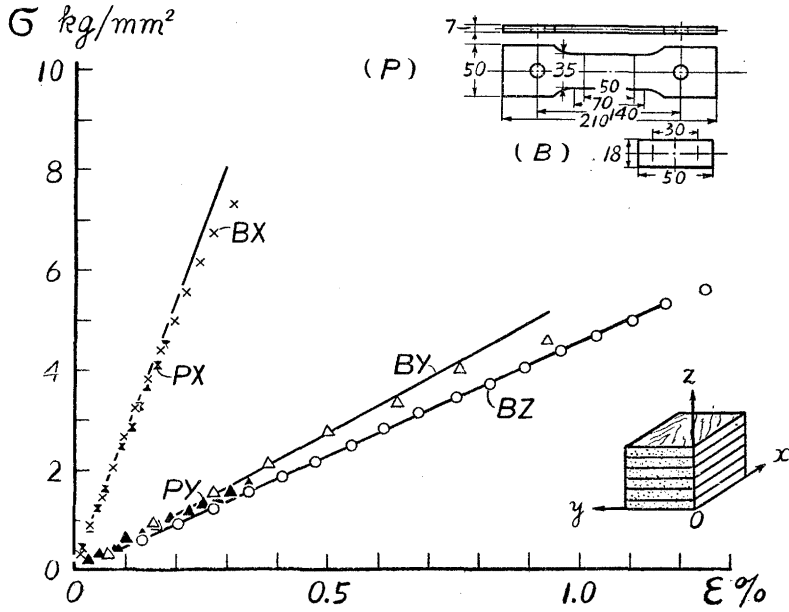
2. 計測値 第 2 圖に示すのは, 單板はブナ, 10 枚目ごとに 1 枚の直交單板を入れた強化積層材, 比重は 1.37~1.38 のものを約 5 kg/cm² sec の速度で荷重したものである。試験片斷面の形狀は平と角, 荷重は引張りと壓縮がある。第 3 圖は振り試験の結果である。第 4 圖に荷重速度を幾種類か選んで引張り試験 (CX), 壓縮試験 (BZ) を行つたものを示す。この範圍での相違は殆んど無視できる。

Hooke の法則を認めると Betti-Maxwell の相反定理が成立するから, さらに

$$s_{ij} = s_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (3)$$

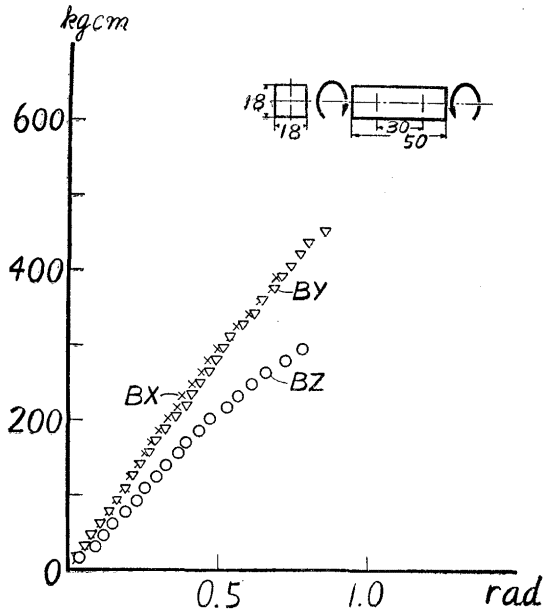
が成立する。なぜなら相反定理における第 1 系統第 2 系統の外力としてそれぞれ一様な應力 σ_i, σ_j を與えるものを考え, 他の應力成分はないとすれば s_{ij}, s_{ji}

は兩系統の Maxwell の影響数になるからである。第 5 圖に同じ材料の壓縮試験における横方向の伸び歪を示した。



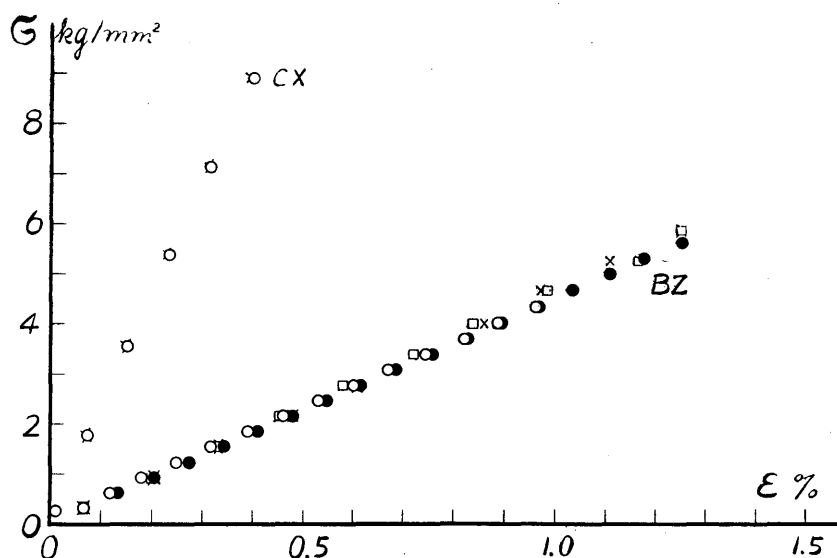
第 2 圖 強化積層材の引張試験 (PX, PY) と壓縮試験 (BX, BY, BZ)

單板 プナ 比重 1.37~1.38 荷重速度 5 kg/cm² sec.
σ 應力 ε 歪み



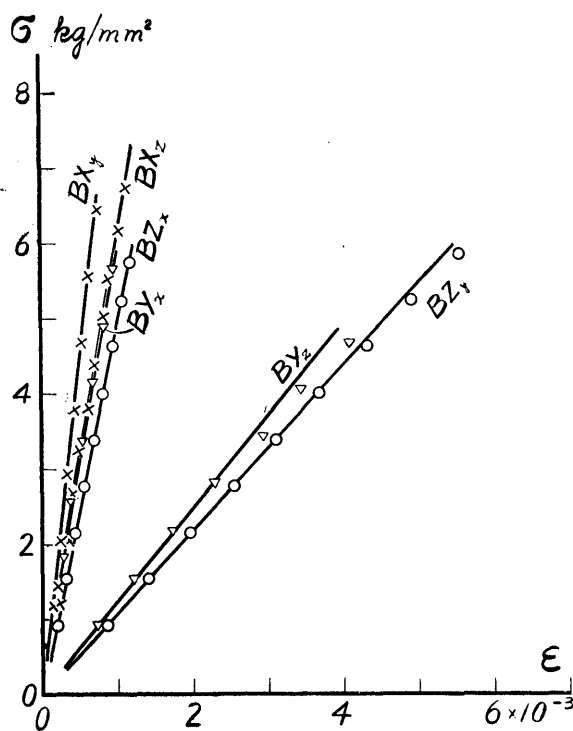
第 3 圖 同上材料の捩り試験

縦 軸 捩りモーメント
横 軸 標線間の捩り角



第 4 圖 荷重速度の影響

引張試験 (CX) × 8.9 kg/cm² sec. ○ 0.9 kg/cm² sec.
 圧縮試験片 (BZ) × 1.63 kg/cm² sec. ○ 4.7 kg/cm² sec.
 □ 22.0 kg/cm² sec. ● 4.7 kg/cm² sec.



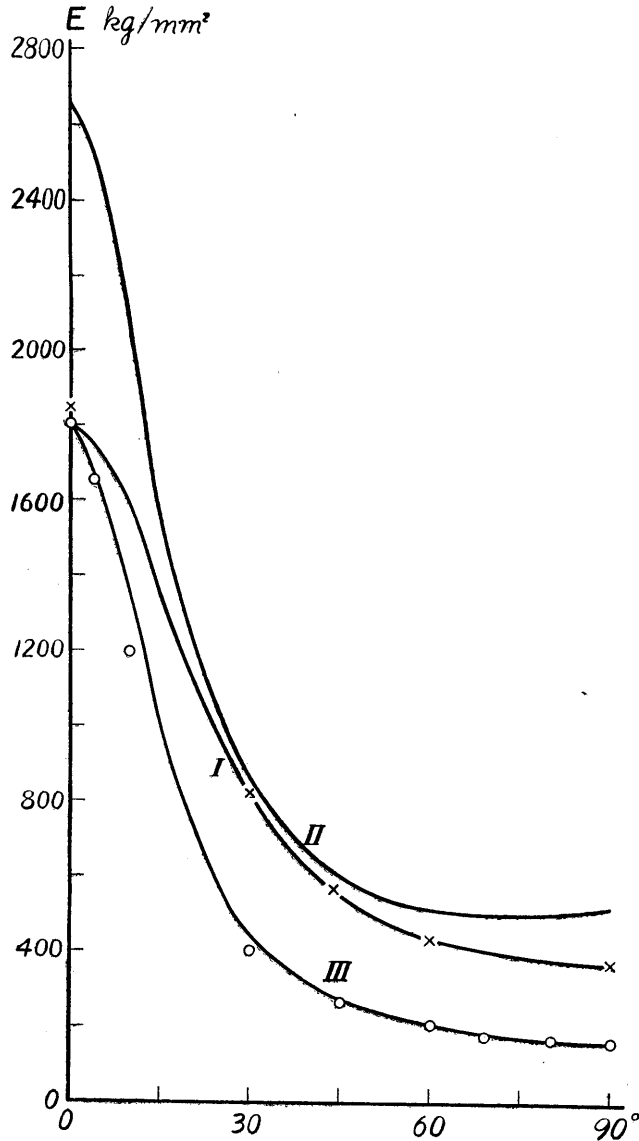
第 5 圖 圧縮試験におけるポアッソン比

BY_z と記した直線は、それが應力軸となす
 角の正切 $= \nu_{yz}$ なることを示す。

式(3)の相等はこの場合

$$s_{yz} = s_{zy}, \text{ など}$$

でしたがつて BY_z と BZ_y の兩線が一致することが期待される。材料にむらが多いことを考えればほぼこれを容認することができよう。



第 6 圖 ヤング率の方向性

xy 面 (第 2 圖参照) で方向が變つた時のヤング率の變化

- | | | |
|-----|----------------------|--------|
| I | 強化木比重 1.27~1.32 | } (著者) |
| II | 〃 1.37~1.38 | |
| III | 積層板 (Keylwerth [20]) | |

xy 面内で x 軸と角 θ をなす方向のヤング率 E_θ が $E_x, E_y, \nu_{xy}/E_x, G_{xy}$ によって與えられる式

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\cos^4 \theta}{E_x} + \frac{\sin^4 \theta}{E_y} + \left(\frac{1}{G_{xy}} + \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (4)$$

と一致するかどうかはまた式(4)の誘導のもととなつた式(1)あるいは(2), (3)の検証になる。第 8 圖の曲線 I, III に見ると計測點に對して無理のない當てはめだと云うことができる。

式(2)の Hooke 弾性を容認するこの材料の 9 個の獨立な弾性係數 $E_x, E_y, E_z, \nu_{yz}, \nu_{zx}, \nu_{xy}, G_{yz}, G_{zx}, G_{xy}$ を測定しておけば各方向の各係數が定められることになる。あるいは

$$\frac{1}{G_{xy}} + \frac{2\nu_{xy}}{E_x} = \frac{4}{E_{45^\circ}} - \frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \quad (5)$$

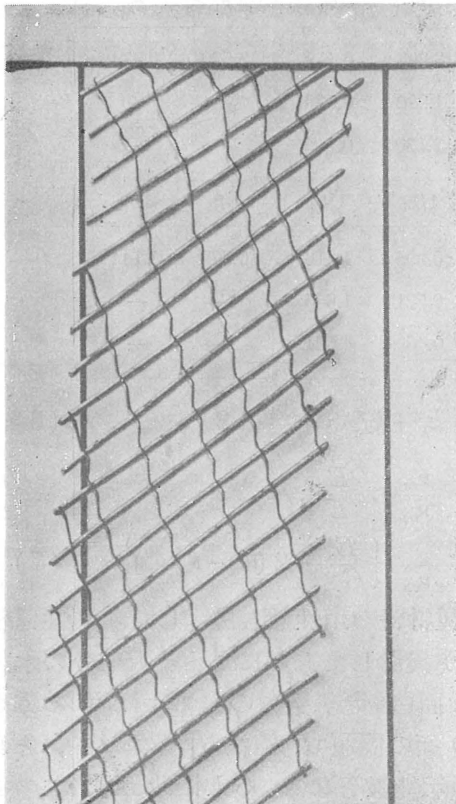
が導かれるから G_{xy} の代りに E_{45° すなわち xy 面で x 軸と 45° をなす方向のヤング率を測つてもよい。 G_{xy} などは振り角とトルクの比例常數の中に組合さつてはいるのでたとえば Z 試験片だけでは G_{xy} を求め得ない不便がある。Hoerig [29] は Voigt の解を用いて三方向の試験片の振りから三つの剪斷弾性係數を逐次近似的に算出する方式を提出している。第 1, 2 表の數値は材料 I (強化木, 比重 1.25~1.32) に對しては 45° 方向のヤング率を求める方法で [27], 材料 II (強化木, 比重 1.37~1.38) に對しては Hoerig の方式で定めたものである。

第 1 表 弾性係數 mm^2/kg と弾性常數 kg/mm^2

強化積層材 II, 比重 1.37~1.38		
$s_{xx} = 0.375 \times 10^{-3}$	$s_{xy} = -0.139 \times 10^{-3}$	$s_{xz} = -0.173 \times 10^{-3}$
	$s_{yy} = 1.966 \times 10^{-3}$	$s_{yz} = -0.890 \times 10^{-3}$
		$s_{zx} = 2.134 \times 10^{-3}$
$t_{yz} = 0.953 \times 10^{-2}$		
$t_{zx} = 0.840 \times 10^{-2}$		
$t_{xy} = 0.472 \times 10^{-2}$		
$c_{11} = 2.992 \times 10^4$	$c_{12} = 0.397 \times 10^4$	$c_{13} = 0.408 \times 10^4$
	$c_{22} = 0.679 \times 10^4$	$c_{23} = 0.316 \times 10^4$
		$c_{33} = 0.633 \times 10^4$
$c_{44} = 104.9$		
$c_{55} = 119.0$		
$c_{66} = 211.8$		

第2表 弾性常数

強化積層材	II	I
比 重	1.37~1.38	1.27~1.32
E_x kg/mm ²	2,666	1,794
E_y "	508.5	366.6
E_z "	468.4	—
$G_{yz}(=G_{zy})$ "	104.9	—
$G_{zx}(=G_{xz})$ "	119.0	—
$G_{xy}(=G_{yx})$ "	211.8	219.9
ν_{yz}	-0.453	—
ν_{zx}	-0.081	—
ν_{xy}	-0.370	-0.497
ν_{zy}	-0.417	—
ν_{xz}	-0.460	—
ν_{yx}	-0.071	-0.102



第6圖の曲線 II はこれらの數値を用い式(4)によつて描いたものである。

空間的な各方向のヤング率を計算して²¹⁾その値をベクトルで表わすと寫眞2のようになる。ヤング率の最も小さい方向は積層された方向 z にはなくて x 軸に傾いた方向にあるのは注意すべきことである²²⁾。

第3表の示性數 k_1, k_2 は異方弾性論の2次元問題を, modify された複素數

$$z_1 = x + ik_1 y, z_2 = x + ik_2 y$$

の函數を利用して解く場合のために算出したもので, たとえば問題の面が xy 面であれば

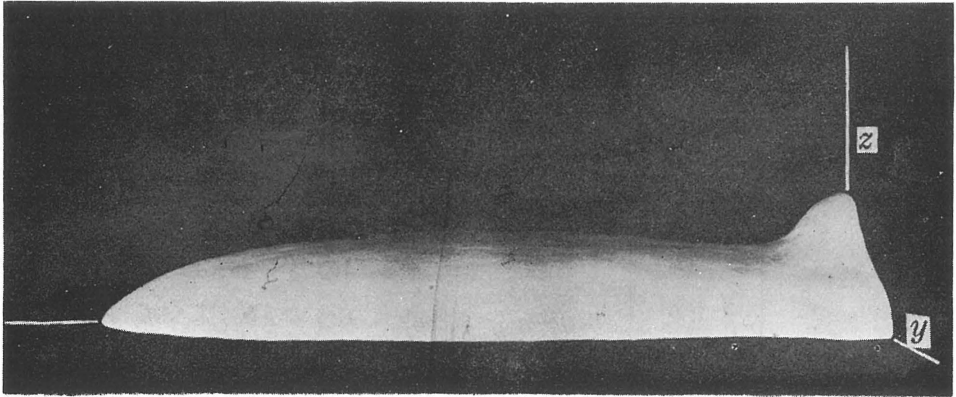
寫 眞 1.

異方體の變形の特性を示すための一つの模型

(下向きの自重によつて横方向の歪みを生ずる。)

²¹⁾ 計算式は Voigt [5], あるいは Keylwerth [20] 参照。

²²⁾ 壓延銅板, 鐵板では壓延方向に 45° に傾く方向が小さい [22]。



寫 眞 2.

各方向のヤング率のベクトル表示

第 3 表 2 次元問題における示性数

問題の平面 に平行な 座標面	材 料 II				材 料 I	
	平 面 應 力		平 面 歪		平 面 應 力	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
xy 面	3.375	0.678	3.395	0.618	2.530	0.874
yz 面	1.910	0.545	1.920	0.539	—	—
zx 面	1.931	0.216	2.130	0.215	—	—
	$1/k_1$	$1/k_2$	$1/k_1$	$1/k_2$	$1/k_1$	$1/k_2$
xy 面	0.296	1.475	0.295	1.618	0.395	1.144
yz 面	0.524	1.835	0.521	1.855	—	—
zx 面	0.518	4.630	0.469	4.651	—	—

$$\text{一般化された平面應力 } k_1^2 k_2^2 = \frac{E_{xy}}{E_y}, \quad k_1^2 + k_2^2 = \frac{E_{xy}}{G_{xy}} + 2 \nu_{xy} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{平 面 歪} \quad k_1^2 k_2^2 &= \frac{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}} \cdot \frac{E_{xy}}{E_y}, \\ k_1^2 + k_2^2 &= \frac{1}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}} \left\{ \frac{E_{xy}}{G_{xy}} + 2 (\nu_{xy} - \nu_{xz} \nu_{zy}) \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

なる式による。第 4 表および第 7 圖に他種材料の示性数も併示した。弾性係数は Carrington 以来のものを Keylwerth が集録したものによる。大部分の木材の k_2 が 1.0~1.4 の間に密集しているのは面白い²³⁾。逆数の方では $1/k_1$ の方が集つた値を示す。この逆数はたとえば xy 面の問題で、繊維方向²⁴⁾を y 軸、それに直交する方向を x 軸にとり換えた時の示性数となる。Sokolnikoff [28] の攝

²³⁾ Wolf の條件のもとに導かれる示性数とは算式が同一ではない。

²⁴⁾ 第 2 圖参照。

第 4 表 材料の示性數 ([20]より算出)

樹 種	k_1	k_2	$1/k_1$	$1/k_2$
① Balsa	5.453	0.4465	0.183	2.240
〃	5.225	0.4855	0.191	2.060
② Spruce (歐洲 トウヒ)	4.980	1.063	0.201	0.941
〃	4.113	1.249	0.243	0.801
③ Mahagoni	4.922	1.032	0.203	0.969
〃	3.612	1.092	0.277	0.916
④ Esche (歐洲 トネリコ)	4.757	0.826	0.210	1.211
〃	3.929	1.129	0.255	0.886
⑤ Kiefer (歐洲 アカマツ)	4.695	1.138	0.213	0.879
⑥ Quipo	4.597	1.033	0.217	0.968
〃	3.816	1.328	0.262	0.753
⑦ Fichte (歐洲 トウヒ)	4.190	1.527	0.239	0.655
⑧ Oregonpine	4.016	1.062	0.249	0.942
⑨ Douglasie	3.952	1.136	0.253	0.880
⑩ Birke (カバ)	3.921	1.325	0.255	0.755
Gelbbirke(カバの一種)	3.486	1.275	0.287	0.784
⑪ Bergahorn (カエデ)	2.528	1.337	0.396	0.748
⑫ Khaya	3.785	1.179	0.264	0.848
⑬ Sitkafichte (米 トウヒ)	3.662	1.315	0.273	0.760
⑭ Walnuß (クルミ)	3.657	1.153	0.273	0.867
⑮ Satin-Nußbaum	3.496	1.273	0.286	0.786
⑯ Rotbuche (ブナ)	3.456	1.226	0.289	0.816
⑰ Tulpenbaum	3.409	1.427	0.293	0.701
⑱ Eiche (ナラ)	2.307	1.053	0.433	0.950

動近似計算による場合は 1 に近い示性數を用い得るように座標軸を選ぶべきである。

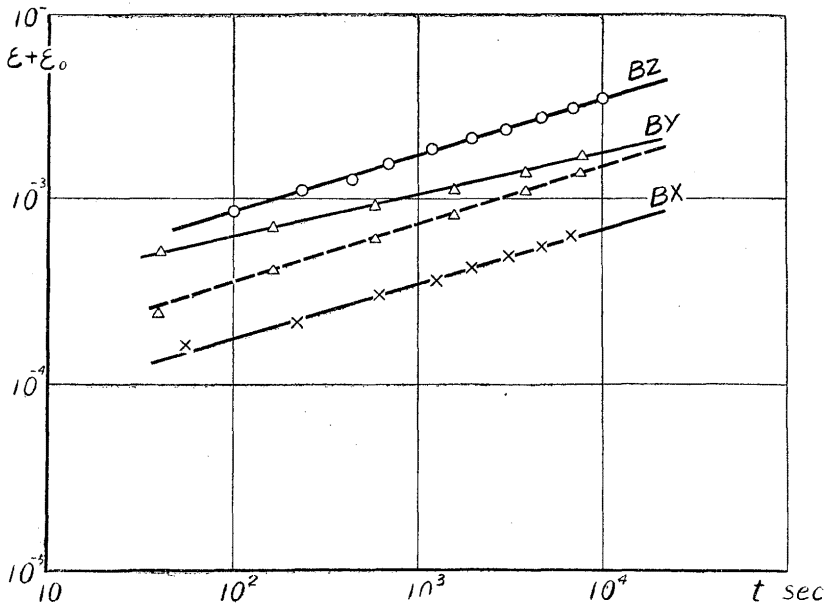
第 3 章 強化積層材の非弾性

1. 緒 言 前章では強化積層材が“殆んど Hooke 的”であることをもつぱら強調して來たが第 2, 3 圖からも分るように應力が大きくなるとそうではなくなる。特に破壊荷重近くなると著しい²⁵⁾。荷重速度一定でなく試験機の掴み部分の移動速度の方を定速にすると、この直線からのずれは殊に大きくなる。直

²⁵⁾ 紙を基材とした積層材は破断まで直線的である。

線関係が破れる原因に、二つが考えられる。一つは、弾性的だけれども non-Hookean なもの、も一つは時間効果が同時に表われるものである。破壊に近づけば事態は複雑で今のところ何とも云えないが、初期の間では強化積層材はやはり Hooke 的だとして、直線関係のずれは感時性によるものだと解すると幾分簡単になる。

2. 初期の匍匐と弛緩 第4圖に示した資料から荷重速度が弾性係數に及ぼす影響は無視されると云つたけれども、極端に速度が違えば當然その影響は表われて来る^{26) 27)}。その極端の一つの場合は第8圖に示した匍匐の現象である。も一つは第9圖の弛緩である。第8圖は室温で X 試験片に 7.76 kg/mm^2 , Y 試



第8圖 初期匍匐試験

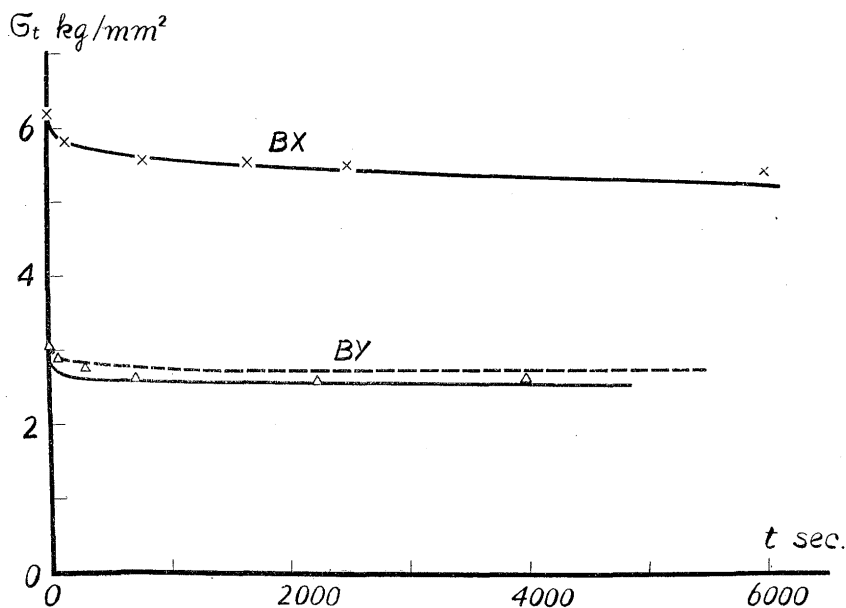
$\varepsilon + \varepsilon_0$ 歪み $\bigcirc, \triangle, \times$ 計測點 $\varepsilon + \varepsilon_0 = b t^a$. 當てはめた直線の式

		ε_0	a	b
BX	(實線)	1.07×10^{-4}	0.3	0.43×10^{-4}
BY	(")	3.70×10^{-4}	0.21	2.60×10^{-4}
	(破線)	(0.7×10^{-4})	(0.3)	(0.94×10^{-4})
BZ	(實線)	6.16×10^{-4}	0.3	2.12×10^{-4}

²⁶⁾ A. G. H. Dietz [30] の實驗は參考になる、強化木のはないがそれ以外の各種材料の既往の資料もある。Thum-Jacobi [31] の研究もある。

²⁷⁾ 強化積層材 I の片持梁 (長さ164, 巾15, 厚さそれぞれ 1.5, 2, 2.5, 3 mm) の振動から求めたヤング率 E_x は $2,000 \text{ kg/mm}^2$ で準靜的に計測した値 $1,794 \text{ kg/mm}^2$ より明らかに大きい (第2表参照)。

験片に 3.06 kg/mm^2 , Z 試験片に 5.90 kg/mm^2 の一定圧縮應力を加え歪の時間的経過を記録したものである。第 9 圖は初應力が X 試験片 6.20 kg/mm^2 , Y 試験片 3.06 kg/mm^2 になる荷重をかけ, その時の歪みに一定するように爾後の荷重を調整していつた時の應力變化の模様を記録したものである。双方とも初期の 2 時間余りのもので高温金屬の遷移匍匐の段階である。



第 9 圖 初期弛緩試験

σ_t は應力 曲線は計算値 $\times, \triangle$ は計測点

この材料の力學的な response を一方では Hooke 的と見なし, しかも他方に第 8, 9 圖のような感時性を認めるためには, 應力と歪の關係に時間を取り入れる方程式を考えねばならない。まず匍匐の歪と時間の關係は, 簡単でこの資料によく當てはまるのは

$$\varepsilon + \varepsilon_0 = bt^\alpha \quad (8)$$

で, ε は歪, t は時間, ε_0, b, α は ε, t に無關係な數値である²⁸⁾。W. N. Findley [32] もこの式を用いて實驗値を整理している²⁹⁾。しかし在來考えられて來た粘弾性に關しての力學的な模型に當てはめようとすれば, 剪斷應力と剪斷歪について論ぜられている所を單純壓縮にも借りて, 時間函數を自然對數の底とのべきの形で表わす必要がある。そこで

²⁸⁾ この式を計測點に當てはめるには, ε_0 を適當に假定しながら對數方眼紙上に $(\varepsilon + \varepsilon_0, t)$ の點をきめ, 直線と見なされるようになった所で, その時の假定値 ε_0 を既定値にし

$$\ln(\varepsilon + \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0) \div \ln(\varepsilon + \varepsilon_0) + \frac{\delta\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} = \ln b + \alpha \ln t$$

の式から最小自乗法的に $\delta\varepsilon_0, b, \alpha$ を求めればよい。 $\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0$ が採用すべき ε_0 の値になる。

²⁹⁾ Findley のは $\varepsilon_0 \leq 0$ である。式 (8') によつて與えられる ε_0 とは違つたものである。 ε_0 の評價方法は Findley によるとあいまいである。

$$\varepsilon + \varepsilon_0 = bt^a = \int_0^\infty J(\lambda) (1 - e^{-t/\lambda}) d\lambda \quad (9)$$

とする。 $J(\lambda)$ は retardation time λ の分布函数で, T. Alfrey [33] が compliance と呼ぶものである。そうすると Alfrey の次の一般式³⁰⁾ の特別の場合として解釋できるようになる。すなわち

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \varepsilon_3(t) \quad (10)$$

ただし

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= \sigma(t)/E && \text{弾性歪,} \\ \dot{\varepsilon}_3(t) &= \sigma(t)/\eta && \text{Newton 的歪速度;} \end{aligned}$$

および

$$\varepsilon_2(t) = \int_0^\infty \varepsilon^*(\lambda, t) d\lambda$$

で最後のは Maxwell 模型に相當し, $\varepsilon^*(\lambda, t)$ は

$$\sigma(t) = \frac{1}{J(\lambda)} \varepsilon^*(\lambda, t) + \frac{\lambda}{J(\lambda)} \cdot \frac{\partial \varepsilon^*(\lambda, t)}{\partial t}$$

を解いて得られる Voigt 要素である。 E, η は云うまでもなく壓縮のヤング率, 粘性係数である。Newton 流動はここで無視できるから

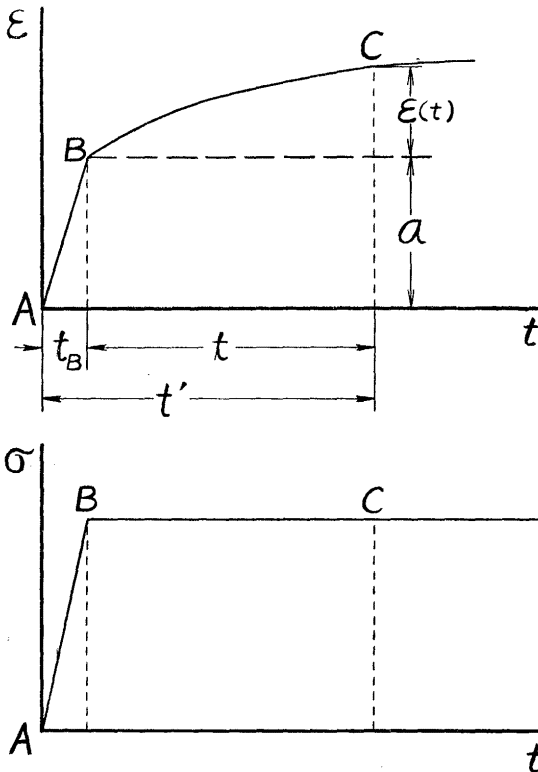
$$\varepsilon_3(t) = 0.$$

つぎに匍匐試験の起點においては第 10 圖に示すように無荷重 A から $u \text{ kg/cm}^2 \text{ sec}$ の一定速度で一定荷重状態 B まで荷重されたと考えて式(10)を

$$\begin{aligned} \sigma(t') &= ut', \\ 0 < t' &\leq t_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t') &= ut_B (\equiv \sigma_0), \\ t_B &\leq t' \end{aligned}$$

という条件で積分すると,
 $t = t' - t_B$ と置いて



第 10 圖 匍匐試験の過渡状態

³⁰⁾ 大體ここに Alfrey の式というのは Frenkel-Obrastzov の微分方程式に無數に多種類の retardation time を持ち込んだもので Alfrey 特有の殊更かわつたものではない。それを壓縮應力の場合にここでは利用した。岡 [34] その他参照。

$$\varepsilon(t) + \varepsilon_0 = \frac{b}{(1+a)t_B} \left\{ (t+t_B)^{1+a} - t_B^{1+a} \right\}, \quad t_B \leq t$$

を得る。ただし

$$\varepsilon_0 = \frac{bt_B^a}{1+a}. \quad (8')$$

近似的には

$$\varepsilon(t) + \varepsilon_0 \doteq bt^a, \quad t_B \ll t$$

すなわち式(8)を得る。實際に評價された ε_0 の値から式(8')によつて t_B を逆算すれば AB 間に要した時間に大約一致する。

式(10)を歪み一定の條件で積分すれば、應力弛緩の様子が表わされるはずである。しかし ε_0 , b , a の應力依存性を定めねばならない。第 9 圖に示した試験片 BY の應力は $3.06 \sim 2.45 \text{ kg/mm}^2$ の範圍にしか變つていないから ε_0 , b , a をすべて一定とし式(9)と匍匐試験結果によつて定められる函數 $J(\lambda)$ を用いて應力弛緩の近似式をつくれれば

$$\sigma(t) = \sigma_B \left[1 - \frac{1}{\Gamma'(1+a)} \{ I'(a) \cdot b a E t^a / \sigma_0 \} + \frac{1}{\Gamma'(1+2a)} \{ I'(2) \cdot b a E t^2 / \sigma_0 \}^2 - \dots \right], \quad 0 \leq t \quad (11)$$

ここに

σ_0 匍匐試験における一定應力,

σ_B 弛緩試験の初應力,

Γ ガンマ函數

その他 E は前章で求めた E_y を用立て、 $\sigma_0 = \sigma_B = 3.06 \text{ kg/mm}^2$ とすれば第 9 圖の實曲線 BY を得る。 X 試験片では $\sigma_0 = 7.76 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_B = 6.20 \text{ kg/mm}^2$, 弛緩の範圍は 5.40 kg/mm^2 に及ぶが、こちらでも ε_0 , b , a を近似的に一定として同様に式(11)を用いれば第 9 圖の曲線 BX を得る。

X , Z 試験片の匍匐試験で $a = 0.3$ を得るから Y 試験片も同じ a の値にすれば第 8 圖の破線を當てはめることになる。これでも充分満足されるが、この數値から弛緩の豫想をすると第 9 圖の破線になる。材料の粘弾性力學的な計算をする際に a のこの同じ數値を使つた方が好都合である。

3. 強度 引張り, 壓縮, 曲げ, ねじりによる試験片の破壊個所の計算應力値を第 5 表に掲げる。興味あることは、強度に異方性があることはもちろん、破壊の様子が方向によつて異なることである。たとえば壓縮の σ_z の破壊は靱性だけれども σ_x の破壊は脆性だということ、振りについても同様な相違が方向によつて表われることなどである。しかしここには強度の問題に深く立入らない。

第 5 表 強度 (材料比重 1.37~1.38)

kg/mm ²	σ_x	σ_y	σ_z	試験片寸法 mm
引 張 り	20.8	1.80	—	断面 18×4
圧 縮	15.4	9.12	11.4	断面 18×18, 高さ 50
曲 げ	21.4	—	—	断面 20×10, 支點間距離 100
kg/mm ²	τ_{yz}	τ_{zx}	τ_{xy}	
捩 り	4.42	2.64	3.76	断面 18×18, 長さ 50

4. 結 言 第 3 章に與えた式(10)を擴張して式(1)に類する應力—歪の關係式を書くことは M. Reiner [35] も遂に言及しなかつた複雑化になる。式(10)の成分 $\epsilon_i(t)$ は當然物質構造に關係するもので、式(1)のように各成分の寄與するものを線型獨立に記述することは失敗するだろうと思われる。もちろん變位を小さく制限すれば書けるかも知れないが複雑化を敢えてする勞に對する報いはやはり制限されたものになるだろう。問題が本來 1 次元的なものである場合とか、拘束條件が簡単な場合³¹⁾などは第 3 章の式と數値を用いて試みることができる。

しかし材料に生ずる應力や變位が複雑な場合には先ず第 2 章に求めた彈性係數を用いて彈性力學の計算を行うことは問題を考察するのに捨てることのできない重要な一段階であると思う。

この研究に用いた材料は九州大學農學部林學教室の渡邊先生、同じく工學部材料強弱學教室の石橋先生から頂いた。そして兩先生からは懇篤な御指導を賜つた。

なお文部省からの科學研究費交付金が、この研究に當てられたことを附記する。

文 献

- [1] Todhunter-Pearson, A History of the Elasticity and Strength of Materials, Vol. II, Part I, II (1893).
- [2] Voigt, W., Gött. Nachr. No. 16 (1886).
- [3] 木村鍊次, 航研彙報 232 號(昭和 18 年).
- [4] Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4 版 (1934). Introduction, Chapt. VI.
- [5] Voigt, W., Lehrbuch der Kristallphysik, Kap. VII.
- [6] Wolf, K., ZAMM., Bd. 15 (1935).

³¹⁾ Alfrey が拘束條件が時間的因子と幾何學的因子の積になっている場合を取り扱っているのはその例である。

- [7] Zener, C., *Elasticity and Anelasticity of Metals* (1948).
- [8] Green, A. E., *Proc. Roy. Soc.* 173, 180, 184 (1939~1945).
- [9] Elliot, H. A., *Proc. Camb. Phil. Soc.* 44, 45 (1948, 1949).
- [10] Shield, R. T., 同上, 47 (1951).
- [11] Huber, M. T., *Bauingenieur* 4. Jg., 5. Jg., (1923, 1924). S. Timoshenko 60th Anniversary Volume (1938).
- [12] 樋口正一, 日本機械學會論文集, 15卷 50號, 16卷 55號 (昭和 24, 25 年).
- [13] 林毅, 日本航空學會誌 8卷 79 號, 9 卷 83 號 (昭和 16, 17 年).
- [14] 澁谷巖, 同上, 7 卷, 61 號, 8 卷 71 號 (昭和 15, 16 年).
- [15] Poritsky-Horvay, *Jour. App. Mech.*, Sept. 1951.
- [16] Hoff, N. J., *Engineering Laminates* (ed. A.G.H. Dietz, 1949) の Introduction, Chapt. 1 およびその文献.
- [17] 井上眞六, 日本航空學會誌, 9 卷 89 號, 91 號 (昭和 17 年).
- [18] 山越道郎, 造船學研究 (九州大學) 第 4 號 (昭和 23 年).
- [19] 大橋義夫, *Jour. App. Math. & Phys.* Vol. III (1952).
- [20] Keylwerth, R., *VDI-Forschungsheft* 430, B (1933).
- [21] Stamer-Sieglerschmidt, *Z. VDI. Bd.* 77 (1933).
- [22] Schmid-Boas, *Kristallplastizität* (1935).
- [23] 池田健, 日本航空學會誌, 9 卷 90 號 (昭和 17 年), 日本科學文化協會誌, 2 卷 3 號 (昭和 22 年).
- [24] 大久保肇, 東北理科報告, 25 卷 (1937), *Phil. Mag. Ser. 7, Vol. XI* (1949).
- [25] 佐藤常三, 平面應力問題の新解析法, 生活社 (昭和 23 年).
- [26] 倉西正嗣, 應用數學・力學, 1 卷 2 號, 3 號 (1947).
- [27] 樋口正一, 彈研報告 (九州大學) 4 卷 4 號 (1947), 應研歐文報告 (九州大學) 1 卷 1 號 (1952).
- [28] Sokolnikoff, I. S., *Proc. of Symposia in App. Math.* Vol. III, *Elasticity* (1950).
- [29] Hoerig, H., *Ing. Arch.* Bd. 7 (1936).
- [30] Dietz, A. G. H., *A.S.T.M. Symposium on Speed Testing* (1948).
- [31] Thum-Jacobi, *VDI-Forschungsheft* 396, B (1939).
- [32] Findley, W. N., *A.S.T.M. Symposium on Plastics* (1944).
- [33] Alfrey, T., Jr., *Mechanical Behavior of High Polymers* (1948).
- [34] 岡小天, 工業物理化學第 3 輯 (昭和 24 年).
- [35] Reiner, M., *Proc. International Rheological Congress, Holland* (1948).