指標演算子法と晶族の記號

伊藤, 徳之助
九州大学

https://doi.org/10.15017/4740706

出版情報：九州帝國大學理學部研究報告. 地質學之部. 1 (3), pp.134-159, 1943-11-25. 九州帝国大学理学部
バージョン：
権利関係：

指標演算子法と晶族の記號

伊　藤　德　之　助

1　對稱記號

第一種對稱操作即ち廻轉操作を廻轉の次數によつて五種にわけ，對稱記號として次數 m を用ゐる：

$$m=1, 2, 3, 4, 6.$$

對稱軸を指標で示し，m の下につけ對稱操作を表はすことにする。

結晶軸 X, Y, Z を夫々 X_1, X_2, X_3 とし，指標には 1, 2, 3 を採ることにすれば，結晶軸を對稱軸とする對稱操作は

$$2_1, 2_2, 2_3, 3_3, 4_1, 4_2, 4_3, 6_3,$$

即ち 2_1 は X_1 軸を對稱軸とする二次廻轉對稱操作，6_3 は X_3 軸が對稱軸である六次廻轉對稱の操作を示す。

二つの結晶軸 X_1 と X_2 との間の二等分線は，X_1 及び X_2 軸双方共正の向きの間にあるものは 12，一方の負の向きと他の正の向きとの間の二等分像は 21 と書く。即ち指標が 1, 2, 3 の循環順に並んでゐる時と，逆の順に並んでゐる時とで，双方正の向きか一方逆かを區別して表はすことに規約する。

$$2_{23},\ 2_{31},\ 2_{12},$$
$$2_{32},\ 2_{13},\ 2_{21}.$$

X_1 軸 X_2 軸の間の三等分線を對稱軸とする二次廻轉對稱は，六方晶系に存在するが，X_1 軸と X_2 軸との間の比を 1:2, 2:1 に分ける二本を區別して，夫々 $2_{1/2}$, $2_{2/1}$ と書く。

三次廻轉對稱軸は前記の 3_3 の他に，X_1, X_2, X_3 の三軸の對角線を對稱軸とするものがある。これは 123 として三個の指標を用ゐる。此の場合は負の向きにある軸の指標の上に負をつけて示す，即ち

$$3_{123},\quad 3_{1\bar{2}\bar{3}},\quad 3_{\bar{1}2\bar{3}},\quad 3_{\bar{1}\bar{2}3},$$
$$3_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}},\quad 3_{\bar{1}23},\quad 3_{1\bar{2}3},\quad 3_{12\bar{3}}.$$

反像は $\bar{1}$ として，鏡映，廻映は廻轉反像と見做し，廻轉對稱に對して $\bar{m}$ の記號で表はす。

從つて二次廻轉反像即ち一次廻映は $\bar{2}$ であり，此の時の指標は對稱面の法線の方向を指すものと解釋できる。例へば $\bar{2}_1$, $\bar{2}_{21}$ の對稱面は夫々 X_1 軸，X_1 と $-X_2$ 軸との間の二等分線を法線とする對稱面をもつ鏡映である。

2　指標演算子法

指標演算子法とは，對稱記號を演算子として用ゐて對稱相互の關係を調べる方法と，對稱操作記號の指標即ち對稱要素を用ゐて行ふ方法との二つから成り立つ。

對稱記號を一般に α, 一次廻轉を 1, 反像を $\bar{1}$ とすれば

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\alpha=\alpha\,1=\alpha \\ \bar{1}\,\alpha=\alpha\,\bar{1}=\bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}\,\beta=\alpha\,\bar{\beta} \end{array}\right\}\quad (A)$$

一般に異なる次數の α と β の積には交換法則は成り立たない。

然し同じ次數のものでも，指標が違ふものでは一般に交換法則は成り立たないが，同じ指數のは交換法則に從ふものとする。從つて同じ指數のものについては

$$1=\alpha\,\alpha^{m-1}=\alpha^{m-1}\,\alpha\,,$$

$$\alpha^{-1}=\alpha^{m-1}\,.$$

α^{-1} を略して α' と書けば

$$\alpha'=\alpha^{m-1}\,,$$

α' は負の向きの m 次の廻轉を示すものである。

次に α の代りに廻轉次數を其の儘用ゐて表はすことに規約すれば，次のやうに書ける。

$$\left.\begin{array}{ll} & \boxed{m^m=1.} \\ \therefore & \boxed{m'=m^{m-1}} \end{array}\right\}\quad (B)$$

即ち 1, 2, 3, 4, 6 は演算子として次のやうな性質をもつ。

$$1=2^2=3^3=4^4=6^6$$

$$2=2',\ 3^2=3',\ 4^3=4',\ 6^5=6'$$

一言注意すべきは，

$$m\,m^{m-1}=1$$

$$\therefore\quad \bar{m}\,m'=m\,\overline{m'}=\bar{1}$$

$\bar{m}$ は m 次の廻轉反像であるが，對稱中心が單獨な對稱要素である爲には，その晶族は別に m' を對稱操作として持つてゐなければならない。$\bar{m}$ と m', 或は m と $\overline{m'}$ とが共に存在する時，初めて $\bar{1}$ は獨立した要素であつて反像を示すのである。

扨て次に m の代りに，その指標だけ用ゐて相互の關係を調べる方法を考へる。この場合反像の作用は指標には影響しないから，一般に廻轉反像はそれに對應する廻轉として計算し，最後に對稱記號の符號を變へることに規約する。

(B) で定められる關係は自ら二つの群に分れかる。即ち 6_u と 4_u とは別の群となるので，4_u の屬する群の演算を第一種指標演算子法，6_u の屬する群に對するものを第二種指標演算子法と稱へる。

このやうに區分することは煩雜に見えるが，却つて非常に簡單になることが知れる。

3 第一種指標演算子法

軸指標だけを取り出して，次のやうに括弧を用ゐて表はす。

$$\left.\begin{array}{ll} 2_u & \equiv u \\ 2_{uv} & \equiv (uv) \\ 3_{uvw} & \equiv (uvw) \\ 4_u & \equiv (u) \end{array}\right\} \left(\begin{array}{l} u \neq v \neq w \\ u, v, w = 1, 2, 3 \end{array} \right)$$

一次廻轉は軸を指定する必要がないから，指標として 0 をとり

$$1 \equiv [0]$$

として表はす。これは普通の 1 のやうに影響がないから，計算の途中では省略して書かないことにしてよい。

扨て公理 (*B*) は指標によつて次のやうに表はせる。

$$[0] = u^2 = (u\,v)^2 = (u\,v\,w)^3 = (u)^4$$

この中同じ指標については

$$\boxed{u = (u)^2}$$

の關係が含まれてゐる。

此の外計算の便宜上，省略した記號

$$(u)(v) = (u, v)$$

を用ゐることにしよう。

特に $(3_{uvw})^2$ の指標は，3_{uvw} と正反對の符號をもち，且つ $(3_{uvw})^{-1}$ 即ち $3'_{uvw}$ であるから，

$$(3_{uvw})^2 = (3_{uvw})' = 3_{\bar{u}\bar{v}\bar{w}} \equiv (\bar{u}\bar{v}\bar{w})\,.$$

これに倣つて

$$(4_u)^3 = (4_u)' \equiv (\bar{u})$$

として，u に負號をつけて表はす。この表はし方も極めて都合よい性質を示し，計算が非常に樂になる。

之等の記號の説明上，二三の用語を使ふことにする。

指標が 1, 2, 3 の循環順に並んでゐる時を正順，逆の順の時を逆順と名付ける。

例へば

正順　(23), (31), (12), (1, 2), (2, 3), (3, 1)

逆順　(32), (13), (21), (2, 1), (3, 2), (1, 3)

次に指標 (u) が正即ち 4_u，及び 3 の場合には指標の積が正 $(u\,v\,w > 0)$ のものを正形と稱へるのに對し，その相反形を負形と稱へる。

2_{uv} は自己相反であるけれど，これにも此の言葉を借用して，指標が正順のものを正形，逆順のものを負形とする。これは一見不適當な轉用のやうに惟へるけれども，指標が逆順のの二次廻轉の行列の要素は悉く -1 であるから，負形と名付けても强ち不當ではあるまい。

正形　(u), (12), (23), (31), $(u\,v\,w)$ 但し $u\,v\,w > 0$,

負形　$(\bar{u})$, (21), (32), (13), $(u\,v\,w)$ 但し $u\,v\,w < 0$.

3・1 基礎定理

第一種指標演算子法は，次の三つの定理に基づく。$u \neq v \neq w$, $u, v, w=1,2,3$ とすれば

$$\text{(I)} \quad \boxed{u\,v=w}$$

$$\text{(II)} \quad \boxed{u(v)=(v)w=(w\,u)} \quad (v>0)$$

$$\text{(III)} \quad \boxed{(u,v)=(u\,v\,w)}$$

但し (III) に於いて

$$(u,v)\ \text{正順の時}\ \begin{cases} u\,v>0 \ \text{ならば}\ w>0 \\ u\,v<0 \ \text{ならば}\ w<0 \end{cases}$$

$$(u,v)\ \text{逆順の時}\ \begin{cases} u\,v>0 \ \text{ならば}\ w<0 \\ u\,v<0 \ \text{ならば}\ w>0 \end{cases}$$

(I) は u, v, w が異なる時

$$2_u\,2_v=2_w$$

になることを示し

$$2_1\,2_2=2_2\,2_1=2_3$$

の如き關係を指標だけで表はしたのである。

u と v は互に置換作用を及ぼし合ひ，結局全然別な w が現れる。

(II) は u が (v) の左に作用すれば，v を消去して，その代りに他の指標で置き換へる。（この作用は v が負になつても變らないが，只 u の入り込む順が違つてくることは，後にこの定理から導かれる）

この式の意味は，正形の 4_v に他の軸の二次廻轉 2_u を施したものは，X_v 軸に垂直な面内の二等分線を軸とする二次廻轉と同等であることを表はす。

$$2_u\,4_v=2_{wu},\quad 4_v\,2_u=2_{uw}.$$

(III) をみると左邊にない指標が右邊に加はり，その指標の符號が，左邊の四次廻轉のとり方の順序によつて定まることを示してゐる。(u) は u と異なり，別に他の指標を添加するやうな性質があると謂へる。

$$4_u 4_v=3_{uvw}$$

例へば

$$4_1\,4_2\equiv(1,2)=(123)\equiv 3_{123}$$

$$4_1\,4_2'\equiv(\bar{1},2)=(\bar{1}2\bar{3})\equiv 3_{\bar{1}2\bar{3}}$$

$$4_3\,4_2\equiv(3,2)=(\bar{1}23)\equiv 3_{\bar{1}23}$$

$$4_2'\,4_3\equiv(\bar{2},3)=(\bar{1}\bar{2}3)=3_{\bar{1}\bar{2}3}$$

$$4_3'\,4_1'\equiv(\bar{3},\bar{1})=(\bar{1}2\bar{3})\equiv 3_{\bar{1}2\bar{3}}$$

菱面體晶系は第二種指標演算子法により，元來六方晶形と同樣に論ずべきであるが，六次廻

轉對稱を持たないので，第一種演算子法をこれに用ゐることができる。但しその場合には，2_1，2_2，2_3 を夫々 (32), (21), (13) と見做す必要がある。

4 第二種指標演算子法

六次對稱群には四次對稱が屬さないから，指標の表はし方を少し變更した方が都合よい。

しかも直接晶系を調べるには，六次及び三次廻轉對稱軸は X_3 軸に限つてよいから，單に 6, 3 として表はす。

$$3=6^2$$

又二次廻轉對稱中 2_3 は 6 の三乘（これは四次對稱群では 4_3, $4_3'$ の二乘であることは謂ふ迄もない）であるから，2_3, 3, 6 は 6の冪として冪指數 m を指標にとり $[m]$ で表はす。

$$6=6^1\equiv[1],\quad 6'=6^{-1}\equiv[\bar{1}],$$
$$3=6^2\equiv[2],\quad 3'=6^{-2}\equiv[\bar{2}],$$
$$2_3=6^3\equiv[3]$$

又一次廻轉は第一種の時と同樣

$$1=6^0\equiv[0].$$

なほ 2_3 は自己相反であるから，

$$2_3=6^{-3}=[\bar{3}]$$

としてもよいが，指標には成るべく簡單なものを採り [3] とする。

一般に $[m]$ は 6 の倍數を週期とするから

$$[m\pm 6]=[m].$$

六次對稱群に屬する二次廻轉操作の記號として

$$2_1\equiv(1;1);\quad 2_2\equiv(1;2),\quad 2_{12}\equiv(1;3),$$
$$2_{21}\equiv(2;1),\quad 2_{2/1}\equiv(2;2),\quad 2_{1/2}\equiv(2;3).$$

を用ゐる。

一般に $(r;n)$ の形式の二次廻轉を，r 類 n 屬の二次廻轉と稱へることにする。

類數 r は 1 か 2 である。又屬數 n は 1, 2, 3 であるから，n の週期は 3 であると考へる。

$$(r;n\pm 3)=(r;n).$$

4・1 第二種指標演算子法の基礎定理

第二種指標演算子法の基礎となる演算子 [1] は，

$$[1]^m=[m]=[m\pm 6],$$

又

$$[0]^m=[0]=[6].$$

且つ

$$[m][n]=[n][m]=[m+n].$$

扨て總べて第二種の操作は，次の二つの變位法則で表はせる

$$\boxed{[1](1\,;m)=(2\,;m-1)}$$

及び

$$\boxed{[1](2\,;m)=(1\,;m)}$$

六次廻轉 [1] の對稱操作は，他の指標を 1 高めることと，二次廻轉に對しては類を交換させ，且つ第一類に働くと屬を 1 だけ低くする（或は 2 高める）。

この變位法則によつて他のすべての操作が求まる。

5・1)[1] 第一種指標演算子法公式[2]

(1) m 次の廻轉 m が n 次の廻轉に操作して r となれば

$$m\,n=r$$

m^{m-1} を左に作用させれば

$$m^m n=m^{m-1} r$$

$$\therefore\quad n=m^{m-1} r$$

$$=m' r$$

同様にして

$$m=r n'$$

(2)

$$u=(u)^2=(\bar{u})^2$$

$$(u,\bar{u})=(u)(\bar{u})=[0]$$

$$u(u)=(u)^2(u)=(u)^3=(\bar{u})$$

$$(\bar{u})(u,v)=(\bar{u})(u)(v)=(\bar{u},u)(v)=(v)$$

$$u(v)=(u)(u,v)=(u)(u\,v\,w).$$

(3)

$$\boxed{2_{uv}=2_w\,2_{vu}=2_{vu}\,2_w}$$

證明 $\quad 2_w\,2_{vu}\equiv w(v\,u)=w\,u(w)=v(w)=(u\,v)\equiv 2_{uv}$

同様にして $\quad 2_{vu}\,2_w\equiv(v\,u)w=(w)v\,w=(w)u=(u\,v).$

(4)

$$\boxed{2_u\,2_{vu}=2_{uv}\,2_u=4_w}$$

證明 $\quad 2_{vu}\equiv(v\,u)\equiv u(w)$

$$2_u\,2_{vu}\equiv u(v\,u)=u^2(w)=(w)=4_w$$

(5)

$$\boxed{2_u\,2_{uv}=2_{vu}\,2_u=4'_w}$$

證明 $\quad u(u\,v)=uv(w)=w(w)=(w)^3=(\overline{w}).$

(6) 定理 (III) の指標に i, j, k （i, j, k は正順にとる）を入れると

---

(1) 結晶の對稱を知るには，前章の定理と此の中二三の最も簡單な公式を用ゐれば十分足りる。

(2) 公式 (1) を除いて他は悉く指標による計算である。u, v, w は異なる 1, 2, 3 を表はし，i, j, k は正列にとつた時の値を示す。

$$\left.\begin{array}{ll} 4_i 4_j \equiv (i,j)=(ijk)=(123)\,; & 4_j 4_i \equiv (j,i)=(ij\bar{k}) \\ 4_i 4'_j \equiv (i,\bar{j})=(i\bar{j}\bar{k})\,; & 4_j 4'_i \equiv (j,\bar{i})=(\bar{i}jk) \\ 4'_i 4_j \equiv (\bar{i},j)=(\bar{i}j\bar{k})\,; & 4'_j 4_i \equiv (\bar{j},i)=(i\bar{j}k) \\ 4'_i 4'_j \equiv (\bar{i},\bar{j})=(\bar{i}\bar{j}k)\,; & 4'_j 4'_i \equiv (\bar{j},\bar{i})=(\bar{i}\bar{j}\bar{k})=(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) \end{array}\right\}$$

(7) 公式 (6) から

$$\left.\begin{array}{ll} (123)=(ijk) & \equiv (i,j)=(j,k)=(k,i) \\ (i\bar{j}\bar{k}) & \equiv (i,\bar{j})=(\bar{j},\bar{k})=(\bar{k},i) \\ (\bar{i}j\bar{k}) & \equiv (\bar{i},j)=(j,\bar{k})=(\bar{k},\bar{i}) \\ (\bar{i}\bar{j}k) & \equiv (\bar{i},\bar{j})=(\bar{j},k)=(k,\bar{i}) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (\bar{i}jk) & \equiv (j,\bar{i})=(k,j)=(\bar{i},k) \\ (i\bar{j}k) & \equiv (\bar{j},i)=(k,\bar{j})=(i,k) \\ (ij\bar{k}) & \equiv (j,i)=(\bar{k},j)=(i,\bar{k}) \\ (\bar{1}\bar{2}\bar{3})=(\bar{i}\bar{j}\bar{k}) & \equiv (\bar{j},\bar{i})=(\bar{k},\bar{j})=(\bar{i},\bar{k}). \end{array}\right\}$$

此の公式は三次廻轉を二つの四次廻轉の操作として表はしたもので，應用が極めて廣い。そして非常に單純な構成である。

正形 ($ijk>0$) の時は，任意の二個宛の指標を正順にとれば四次の二つの操作として三次廻轉が表はせ，負形 ($ijk<0$) の時は二つ宛逆順にとる。

これによつて任意の二個の四次廻轉の積を，他の組合せと入れ換へることができる。

例 $3_{1\bar{2}\bar{3}} \equiv (1\bar{2}\bar{3})=(1,\bar{2})=(\bar{2},\bar{3})=(\bar{3},1)=4_1 4'_2=4'_2 4'_3=4'_3 4_1$

$3_{\bar{1}\bar{2}3} \equiv (\bar{1}\bar{2}3)=(\bar{2},1)=(1,3)=(3,\bar{2})=4'_2 4_1=4_1 4_3=4_3 4'_2$

(8) $$\boxed{2_u 4_u = 4_u 2_u = 4'_u}$$

(9) $$\boxed{4'_v 2_u = 2_u 4'_u = 4_u}$$

(10) $$\boxed{2_u 4'_v = 2_{uw}}$$

證明 $$u(\bar{v})=u(v)^3=uv(v)=w(v)=(uw)\equiv 2_{uw}$$

(11) $$\boxed{4'_u 2_v = 2_{wv}}$$

(12) $$\boxed{2_u 3_{ijk} = 3_{uvw}}$$

3 の指標は順を勝手に置き換へても，符號さへ元の儘なら變りないから，初めの指標が 2 の指標に等しいやうな正順に並べ變へて計算する。

$$u(ijk)=u(uvw).$$

$ijk>0$ ならば $u(uvw)=u(u,v)=(u)^3(v)=(\bar{u})(v)=(\bar{u},v)=(\bar{u}v\bar{w})$

$ijk<0$ ならば $u(uvw)=u(u,w)=(\bar{u},w)=(\bar{u}\bar{v}w)$

即ち次の規則が成り立つことが知れる。

(1) (ijk) の符號は 2 個變るから，正形のものは正形，負形のものは負形を保つ。

(2) 符號が變る指標は

(i) ijk の中 u に等しい指標

(ii) 正形ならば順列で u の前のもの w. 負形ならば順列で u の次のもの v.

例

正形 $$\begin{cases} 2_1\,3_{123}=3_{\bar{1}2\bar{3}} \\ 2_2\,3_{1\bar{2}\bar{3}}=3_{\bar{1}2\bar{3}}\,. \end{cases}$$

負形 $$\begin{cases} 2_1\,3_{1\bar{2}3}=3_{\bar{1}23} \\ 2_3\,3_{\bar{1}23}=3_{12\bar{3}} \end{cases}$$

(13) $$\boxed{3_{ijk}\,2_u=3_{mnp}}$$

前と同様にして 3 の初標を 2 の指標に等しい正順に揃へると，正形の場合

$$(u\,v\,w)\,u=(w,u)\,u=(w,\bar{u})=(\bar{u}\,\bar{v}\,w)$$

又負形の場合は

$$(u\,v\,w)\,u=(v,u)\,u=(v,\bar{u})=(\bar{u}\,v\,\bar{w})$$

即ち此の場合も i,j,k の符號が 2 個變る。

變る指標は

(i) u に等しい指標

(ii) 正形ならば順列で u の次のもの v. 負形ならば順列で u の前の w

例

$$3_{123}\,2_1=3_{\bar{1}\bar{2}3}$$

$$3_{1\bar{2}3}\,2_3=3_{12\bar{3}}\,.$$

(14) $$\boxed{2_{uv}\,4_w=2_u}$$

證明 $$2_{uv}\,4_w\equiv(u\,v)(w)=v\,(w)(w)=v\,(w)^2=v\,w=u\equiv 2_u$$

(15) $$\boxed{4_w\,2_{uv}=2_v}$$

(16) $$\boxed{2_{uv}\,4'_w=2_v}$$

(17) $$\boxed{4'_w\,2_{uv}=2_u}$$

(18) $$\boxed{2_{ij}\,4_i=4_i\,2_{ik}=(\bar{\imath}\,\bar{\jmath}\,k)}$$ [1]

證明 $$2_{ij}\,4_i\equiv(i\,j)(i)=(k)\,i\,(i)=(k,\bar{\imath})=(\bar{\imath}\,\bar{\jmath}\,k)$$

(19) $$\boxed{2_{ij}\,4_j=2_{ki}\,4_i=4_i\,2_{ij}=(\bar{1}\,2\,\bar{3})}$$

證明 $$2_{ij}\,4_j\equiv(i\,j)(j)=j(k)(j)=j(k,j)=j(\bar{\imath}\,j\,k)=j(j,\bar{\imath})=(\bar{\jmath}\,\bar{\imath})=(\bar{\imath}\,\bar{\jmath}\,\bar{k})=(\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}).$$

(20) $$\boxed{2_{ij}\,4_i=4_i\,2_{ki}=(\bar{\imath}\,j\,\bar{k})}$$

---

(1) 以下 i,j,k は正順とする。

(21) $$\boxed{2_{ij}\,4'_i = 4'_i\,2_{ki} \equiv (1\,2\,3)}$$

(22) $$\boxed{2_{ij}\,4'_j = 2_{ik}\,4'_i = 4'_i\,2_{ij} \equiv (i\,j\,\bar{k})}$$

(23) $$\boxed{2_{ik}\,4_i = 4_i\,2_{ji} \equiv (\bar{\imath}\,j\,k)}$$

(24) $$\boxed{2_{ki}\,4'_i = 4'_i\,2_{ji} = (i\,\bar{\jmath}\,k)}$$

(25) $$\boxed{2_{ji}\,4'_i = 4'_i\,2_{ik} = (i\,\bar{\jmath}\,\bar{k})}$$

(26) $$\boxed{2_{uv}\,2_{uv} = 1}$$

これは二次廻轉の性質であつて，原理 (B) により更に證明の必要はないが

$$(u\,v)(u\,v) = (w)\,u\,v\,(w) = (w)\,w\,(w) = (w)^4 \equiv 1.$$

(27) $$\boxed{2_{uv}\,2_{vu} = 2_w}$$

證明 $$(u\,v)(v\,u) = (w)\,u\,u\,(w) = (w)\,u^2\,(w) = (w)\,(w) = w \equiv 2_w.$$

(28) $$\boxed{2_{ij}\,2_{uv} \equiv 3_{mnp}}$$

證明 $$2_{ij}\,2_{uv} \equiv (i\,j)(u\,v) = (k)\,i\,v\,(w)$$

$$v=i\begin{cases} w=j,\,u=k & 2_{ij}\,2_{ki} = (k)\,i^2(j) = (k,j) = (\bar{\imath}\,j\,k) \\ w=k,\,u=j & \cdots \quad (27) \end{cases}$$

$$v=j\begin{cases} w=k,\,u=i & \cdots \quad (26) \\ w=i,\,u=k & 2_{ij}\,2_{kj} = (k)\,i\,j\,(i) = (k)\,k\,(i) = (\bar{k},i) = (i\,\bar{\jmath}\,\bar{k}) \end{cases}$$

$$v=k\begin{cases} w=i,\,u=j & 2_{ij}\,2_{jk} = j(k)\,k\,(i) = j(i\,\bar{\jmath}\,\bar{k}) = j(\bar{\jmath},\bar{k}) = (j,k) = (\bar{\imath}\,j\,\bar{k}) \\ w=j,\,u=i & 2_{ij}2_{ik} = (k)\,i\,k\,(j) = (k)\,j\,(j) = (k,\bar{\jmath}) = (i\,\bar{\jmath}\,k). \end{cases}$$

前項 2_{ij} が負形の時にも同様な關係がある。左邊の前項及び後項に一個だけ共通な指標がある。それを m とする（二個共通に存在する時は (26) 及び (27) になる）。

(1) 右邊に於ける 3 の指標の符號は，左邊の前項に於ける m の位置と，後項正形（正順）であるか負形（逆順）であるかによつて定まる：即ち

$m=i$ ならば　後項正形の時,

$m=j$ ならば　後項負形の時

右邊に於ける m は負になる。

(2) 前項及び後項にある他の共通でない二個の指標 n, p の右邊に於ける符號は，左邊の指標四個を全部並べて書いた順に於いて，m に一個だけ挾まれてゐる時と二個で m を挾んでゐる時には變る。

假りに符號の變る指標に * をつけて示せば

$$2_{12}\,2_{31} \equiv (\overset{*}{\bar{1}}\,2)(3\,1) = (\bar{1}\,2\,3) \quad \text{後項正形}$$

$$2_{12}\,2_{13} \equiv (1\,\overset{*}{2})(1\,3) = (1\,\bar{2}\,3) \quad 後項負形$$

$$2_{23}\,2_{31} \equiv (\overset{*}{2}\,3)(3\,\overset{*}{1}) = (\bar{1}\,\bar{2}\,3) \quad 後項正形$$

$$2_{13}\,2_{12} \equiv (\overset{*}{1}\,\overset{*}{3})(1\,2) = (\bar{1}\,2\,\bar{3}) \quad 後項正形$$

$$2_{32}\,2_{13} \equiv (3\,2)(1\,3) = (1\,2\,3) \quad 後項負形$$

(29) $$\boxed{2_{ij}\,2_{uv} = (2_{uv}\,2_{ij})^{-1}}$$

(30) $$\boxed{2_{mn}\,3_{uvw} = 4_r \text{ 又は } 2_{rs}}$$

一般の形式は (32) と同様に求まるが，結果に就いてみると，3 の指標を前項 2_{mn} の指標の順に並べかへて

$$2_{mn}\,3_{mnp}$$

の形にしたものでは，次の性質がある。

(i) $\left.\begin{array}{l} p>0 \text{ ならば } n \\ p<0 \text{ ならば } m \end{array}\right\}$ が積に現れない。

積は後項の指標の符號で定まる。

(ii) 前項正形の時

(1) $mn>0$ ならば 4

$mn<0$ ならば 2

(2) $m>0$ ならば 負形

$m<0$ ならば 正形

(iii) 前項負形の時

(1) $mn>0$ ならば 2

$mn<0$ ならば 4

(2) $up>0$ ならば 正形

$np<0$ ならば 負形

前項正形	mn	m	p		前項負形	mn	np	p	
(12) (123)	+	+	+	$4_1'$	(32) (321)	+	+	+	(13)
(12) $(1\bar{2}\bar{3})$	−	+	−	(32)	(21) $(\bar{2}\bar{1}3)$	+	−	+	(23)
(23) $(\overline{23}1)$	+	−	+	4_2	(13) $(\bar{1}32)$	−	+	+	4_1
(31) $(3\bar{1}2)$	−	+	+	(32)	(32) $(\overline{321})$	+	+	−	(21)
(31) $(\bar{3}1\bar{2})$	−	−	−	(12)	(13) $(\bar{1}3\bar{2})$	−	−	−	$4_3'$

應用

$$2_{23} = 2_{31}\,m$$

m が如何なる操作かは，問題 (30) によつて三次廻轉になることが先づ知れるから

$$2_{23} = 2_{31}(k\,i\,j)$$

とおけば，左邊の指標に 3 が現れるためには $j>0$ である。

右邊の前項は正形であるから，左邊が二次廻轉であるためには $ki<0$.

左邊が正形であるには $k<0$

從つて $i>0$

よつて求める三次廻轉は $(\bar{3}\,1\,2) \equiv 3_{12\bar{3}}$.

(31) $$\boxed{3_{mnp}\,2_{vu} = 4_r \text{ 又は } 2_{rs}}$$

(30) と類似した性質をもつのは當然であるが，計算例を示す。先づ 3 の指標を後項の指標の順に並べかへるが便利である。

正形 $(u\,v\,w>0)$

$$(u\,v\,w)(uv) = (u,v)\,v\,(w) = (u,\bar{v})\,(w) = (u\,\bar{v}\,\bar{w})\,(w) = (\bar{v},\bar{w})\,(w) = (\bar{v}) \equiv 4'_v$$

同様にして

$$(\bar{u}\,\bar{v}\,w)(u\,v) = (v) \equiv 4_v$$
$$(u\,\bar{v}\,\bar{w})(u\,v) = (w\,v) \equiv 2_{wu}$$
$$(\bar{u}\,v\,\bar{w})(u\,v) = (u\,w) \equiv 2_{uw}$$

負形 $(u\,v\,w<0)$

$$\begin{aligned}(\bar{u}\,v\,w)(u\,v) &= (w,v)\,v\,(w) = (w,\bar{v})\,(w)\\ &= (u\,\bar{v}\,w)\,(w) = (u,w)\,(w) = (u)\,w = (w\,v) \equiv 2_{wv}\end{aligned}$$

同様に

$$(u\,\bar{v}\,w)(u\,v) = (v\,w) \equiv 2_{vw}$$
$$(u\,v\,\bar{w})(u\,v) = (\bar{u}) \equiv 4'_u$$
$$(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})(u\,v) = (u) \equiv 4_u$$

(32) $$\boxed{3.\,3 = 1,\,2 \text{ 又は } 3}$$

3 と 3 の積は 64 通り出來るが，正形と負形とで分類すると，次の形式になる。

(A) 正形と負形 1 又は 2

$$(u\,v\,w)(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}) = 1$$

$$\left.\begin{aligned}(u\,v\,w)(\bar{u}\,v\,w) &= w\\ (\bar{u}\,\bar{v}\,w)(\bar{u}\,v\,w) &= u\\ (\bar{u}\,\bar{v}\,w)(u\,\bar{v}\,w) &= w\\ (\bar{u}\,\bar{v}\,w)(u\,v\,\bar{w}) &= v\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})(u\,v\,w) &= u\\ (\bar{u}\,v\,w)(u\,v\,w) &= v\\ (\bar{u}\,v\,w)(\bar{u}\,\bar{v}\,w) &= w\\ (\bar{u}\,v\,w)(\bar{u}\,v\,\bar{w}) &= u\end{aligned}\right\}$$

(B) 正形と正形

$$(u\,v\,w)^2=(\bar{u}\,\bar{v}\,w).$$

$$\left.\begin{aligned}(u\,v\,w)(\bar{u}\,\bar{v}\,w)&=(u\,\bar{v}\,w)\\(\bar{u}\,\bar{v}\,w)(u\,v\,w)&=(\bar{u}\,v\,w)\\(\bar{u}\,\bar{v}\,w)(u\,\bar{v}\,\bar{w})&=(u\,\bar{v}\,w)\\(\bar{u}\,\bar{v}\,w)(\bar{u}\,v\,\bar{w})&=(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})\end{aligned}\right\}$$

(C) 負形と負形

$$\left.\begin{aligned}(\bar{u}\,v\,w)(u\,\bar{v}\,w)&=(u\,v\,w)\\(\bar{u}\,v\,w)(u\,v\,\bar{w})&=(\bar{u}\,v\,\bar{w})\\(\bar{u}\,v\,w)(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})&=(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})\\(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})(\bar{u}\,v\,w)&=(\bar{u}\,v\,\bar{w})\end{aligned}\right\}$$

(33) 3•4

$$\left.\begin{aligned}&(u\,v\,w)(u)=(w,u)(u)=(w)\,u=(u\,v)\\&(\bar{u}\,\bar{v}\,w)(u)=(w)\\&(u\,\bar{v}\,\bar{w})(u)=(v\,u)\\&(\bar{u}\,v\,\bar{w})(u)=(\bar{w})\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})(u)=(\bar{v},\bar{u})(u)=(\bar{v})\\&(\bar{u}\,v\,w)(u)=(v)\\&(u\,\bar{v}\,w)(u)=(w\,u)\\&(u\,v\,\bar{w})(u)=(u\,w)\end{aligned}\right\}$$

(34) 4•3

$$\left.\begin{aligned}(u)(u\,v\,w)&=(w\,u)\\(u)(\bar{u}\,\bar{v}\,w)&=(\bar{v})\\(u)(u\,\bar{v}\,\bar{w})&=(u\,w)\\(u)(\bar{u}\,v\,\bar{w})&=(v)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(u)(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})&=(\bar{w})\\(u)(\bar{u}\,v\,w)&=(w)\\(u)(u\,\bar{v}\,w)&=(v\,u)\\(u)(u\,v\,\bar{w})&=(u\,v)\end{aligned}\right\}$$

(35) 3•4′

これは (34) から導くことができる。

$$3_{uvw}\,4'_m=(4_m\,3_{\bar{u}\bar{v}\bar{w}})^{-1}$$

3_{uvw} の相反は指標の符號をかへたもの，$4'_m$ のは 4_m である。積に於ける 2_{mn} は自己相反であることに注意すればよい。

$$\begin{aligned}(u\,v\,w)(\bar{u}).&=\{(u)(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})\}^{-1}\\&=\{(\bar{w})\}^{-1}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}(u\,v\,w)(\bar{u})=(w)\\(\bar{u}\,\bar{v}\,w)(\bar{u})=(u\,v)\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l}(u\,\bar{v}\,\bar{w})(\bar{u})=(\bar{w})\\(\bar{u}\,v\,\bar{w})(\bar{u})=(v\,u)\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l}(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})(\bar{u})=(w\,u)\\(\bar{u}\,v\,w)(\bar{u})=(u\,w)\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l}(u\,\bar{v}\,w)(\bar{u})=(\bar{v})\\(u\,v\,\bar{w})(\bar{u})=(v)\end{array}\right\}$$

(36) $4'\ 3$

$$\left.\begin{array}{l}(\bar{u})(u\,v\,w)=\{(u\,v\,w)(u)\}^{-1}=(v)\\(\bar{u})(\bar{u}\,\bar{v}\,w)=(u\,w)\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l}(\bar{u})(u\,\bar{v}\,\bar{w})=(\bar{v})\\(\bar{u})(\bar{u}\,v\,\bar{w})=(w\,u)\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l}(\bar{u})(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w})=(u\,v)\\(\bar{u})(\bar{u}\,v\,w)=(v\,u)\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l}(\bar{u})(u\,\bar{v}\,w)=(w)\\(\bar{u})(u\,v\,\bar{w})=(\bar{w})\end{array}\right\}$$

以上で四次廻轉群のあらゆる相互關係は盡されてゐる。

例へば

$$\begin{aligned}2_2&=2_1\,2_3=2_3\,2_1\\&=2_{31}\,2_{13}\\&=2_{23}\,4_1=2_{21}\,4_3\\&=2_{12}\,4_3'=2_{32}\,4_1'\\&=4_1'\,2_{23}=4_3'\,2_{21}\\&=4_3\,2_{12}=4_1\,2_{32}\\&=4_2\,4_2=4_2'\,4_2'\end{aligned}$$

5・2 第二種指標演算子法公式

(1) 變位法則に [1] を操作すれば

$$[2](1\,;m)=[1](2\,;m-1)=(1\,;m-1)=(1\,;m+2)$$
$$[2](2\,;m)=[1](1\,;m)=(2\,;m-1)=(2\,;m+2).$$

一般に

$$\boxed{[2](r\,;m)=(r\,;m-1)=(r\,;m+2)}$$

即ち三次廻轉は類を變へず單に屬を 1 低くする。

(2) 前公式に更に [1] を操作すれば

$$[3](1;m)=[1](1;m+2)=(2;m+1).$$
$$[3](2;m)=[1](2;m+2)=(1;m+2)$$

となるから，纒めて

$$\boxed{[3](r;m)=(s;m+r)}$$

2_3 は種を交換し，且つ作用されるものの類の數だけ屬の位を高める。

(3) 同樣にして

$$[4](1;m)=[1](2;m+1)=(1;m+1)=(1;m-2)$$
$$[4](2;m)=[1](1;m+2)=(2;m+1)=(2;m-2)$$

ところで [4] は $[\bar{2}]$ であるから，三次逆廻轉の操作は

$$\boxed{[\bar{2}](r;m)=(r;m-2)}$$

(4) 次に六次逆廻轉の操作は更に $[\bar{1}]$ を左に用ゐれば

$$\left.\begin{aligned}&[\bar{1}](1;m)=[1](1;m-2)=(2;m-3)=(2;m)\\&[\bar{1}](2;m)=[1](2;m-2)=(1;m-2)=(1;m+1)\end{aligned}\right\}$$

類を變へることは [1] と同じであるが，異なる點は第一類の屬を變へずに，第二類の屬を 1 だけ高くすることである。

(5) $$\boxed{[m](r;u)=(r;u)[\bar{m}]}$$

二次廻轉は

$$1=2^2$$

であるから，一般に

$$(r;m)^2=[0]\equiv1.$$

となるのは言ふ迄もない。この關係を利用して種々の操作が求まる。

いま

$$[m](r;u)=(s;v)$$

となれば，$(r;u)$ を右に作用させて

$$[m](r;u)^2=(s;v)(r;u)$$
$$\therefore\quad [m][0]=[m]=(s;v)(r;u)$$

これに $[\bar{m}]$ を右に作用すれば

$$[m][\bar{m}]=[0]=(s;v)(r;u)[\bar{m}].$$

次に $(s;v)$ の左作用により

$$(s;v)[0]=(s;v)^2(r;u)[\bar{m}]$$

[0] は 即ち恒等變換であるから

$$(s;v)=(r;u)[\bar{m}].$$

$$\therefore \quad [m](r;u)=(r;u)[\overline{m}].$$

同様にして

$$[\overline{m}](r;u)=(r;u)[m].$$

(6) $$\boxed{[m](r;u)(s;v)=(s;v)(r;u)[\overline{m}]}$$

もし

$$[m](r;u)(s;v)=(t;w)$$

ならば,

$$[m](r;u)=(t;w)(s;v)$$

$$\therefore \quad (r;u)=[\overline{m}](t;w)(s;v).$$

又

$$[m]=(t;w)(s;v)(r;u)$$

$$\therefore \quad [0]=(t;w)(s;v)(r;u)[\overline{m}]$$

よつて

$$(t;w)=(s;v)(r;u)[\overline{m}]$$

即ち $$[m](r;u)(s;v)=(s;v)(r;u)[\overline{m}].$$

(7) 次に

$$[m](r;u)=(s;v)$$

ならば

$$[m]=(s;v)(r;u)$$

であるから, 前に求めた公式により, 二次廻轉によつて, 六次, 三次及び 2_3 を表はすことができる。

$$\begin{aligned}
[1]&=(1;m)(2;m)\\
&=(2;m)(1;m+1)\\
[2]&=(i;m)(i;m+1) && (i=1,2).\\
[3]&=(1;m)(2;m+1)\\
&=(2;m+1)(1;m)\\
[\overline{2}]&=(i;m+1)(i;m) && (i=1,2)\\
[\overline{1}]&=(2;m)(1;m)\\
&=(1;m+1)(2;m)
\end{aligned}$$

六次及び 2_3 は異數のもの, 三次は同類のものの操作によることが知れる。

(8) 前題 (7) を纏めて

$$\boxed{(i;u)(i;v)=[2n]}$$

$$u=v, \quad n=0 \quad [0]\equiv 1$$

$$u, v \quad 直順, \quad n=1 \qquad [2]\equiv 3$$

$$u, v \quad 逆順, \quad n=-1 \qquad [\bar{2}]\equiv 3'$$

$$\boxed{(r\,;u)(s\,;v)=[2n\pm 1]}$$

r, s が正順の時 +, 逆順の時をとるものとする。

$$r=1, s=2 \begin{cases} u=v, & n=0 \qquad [1]\equiv 6 \\ u, v \quad 正順, & n=1 \qquad [3]\equiv 2_3 \\ u, v \quad 逆順, & n=1 \qquad [\bar{1}]\equiv 6' \end{cases}$$

$$r=2, s=1 \begin{cases} u=v, & n=0 \qquad [\bar{1}]\equiv 6' \\ u, v \quad 正順, & n=1 \qquad [1]\equiv 6 \\ u, v \quad 逆順, & n=-1 \qquad [3]\equiv 2_3. \end{cases}$$

其他之等を結合すれば，いくらでも關係は求まるが，二つの間の相互の操作は以上で盡してゐる。

以上求めた諸公式による結果は纏めて別表で示す。

第　一　表

四　次　對　稱　群

	2_1	2_2	2_3	2_{23}	2_{31}	2_{12}	2_{32}	2_{13}	2_{21}	3	4_1	4_2	4_3	$4_1'$	$4_2'$	$4_3'$
2_1	1	2_3	2_2	2_{32}	4_2	$4_3'$	2_{23}	$4_2'$	4_3		$4_1'$	2_{31}	2_{21}	4_1	2_{13}	2_{12}
2_2	2_3	1	2_1	$4_1'$	2_{13}	4_3	4_1	2_{31}	$4_3'$	3	2_{32}	$4_2'$	2_{12}	2_{23}	4_2	2_{21}
2_3	2_2	2_1	1	4_1	$4_2'$	2_{21}	$4_1'$	4_2	2_{12}		2_{23}	2_{13}	$4_3'$	2_{32}	2_{31}	4_3
2_{23}	2_{32}	4_1	$4_1'$	1	3	3'	2_1	3	3'		2_2	3	3'	2_3	3	3'
2_{31}	$4_2'$	2_{13}	4_2	3'	1	3	3'	2_2	3	2_{mm}	3'	2_3	3	3'	2_1	3
2_{12}	4_3	$4_3'$	2_{21}	3	3'	1	3	3'	2_3	又	3	3'	2_1	3	3'	2_2
2_{32}	2_{23}	$4_1'$	4_1	2_1	3	3'	1	3	3	は	2_3	3	3'	2_2	3	3'
2_{13}	4_2	2_{31}	$4_2'$	3'	2_2	3	3'	1	3	4	3'	2_1	3	3'	2_3	3
2_{21}	$4_3'$	4_3	2_{12}	3	3'	2_3	3	3'	1		3	3'	2_2	3	3'	2_1
3		3					2_{mm} 又 は 4			1,2,3				2_{mm} 又は 4		
$4_1'$	4_1	2_{32}	2_{23}	2_2	3	3'	2_3	3	3'		1	3	3'	2_1	3	3'
$4_2'$	2_{31}	4_2	2_{13}	3'	2_3	3	3'	2_1	3	2_{mm}	3'	1	3	3'	2_2	3
$4_3'$	2_{21}	2_{12}	4_3	3	3'	2_1	3	3'	2_2	又	3	3'	1	3	3'	2_3
4_1	$4_1'$	2_{23}	2_{32}	2_3	3	3'	2_2	3	3'	は	2_1	3	3'	1	3	3'
4_2	2_{13}	$4_2'$	2_{31}	3'	2_1	3	3'	2_3	3	4	3'	2_2	3	3'	1	3
4_3	2_{12}	2_{21}	$4_3'$	3	3'	2_2	3	3'	2_1		3	3'	2_3	3	3'	1

第　二　表[1]

$\boxed{2_{mn}\,2_{uv}}$

	(23)	(31)	(12)	(32)	(13)	(21)
(23)	〔0〕	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$	1	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(12\bar{3})$
(31)	$(12\bar{3})$	〔0〕	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}23)$	2	$(\bar{1}\bar{2}3)$
(12)	$(\bar{1}\bar{2}3)$	$(\bar{1}23)$	〔0〕	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$	3
(32)	1	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}23)$	〔0〕	(123)	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$
(13)	$(1\bar{2}3)$	2	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(\bar{1}2\bar{3})$	〔0〕	(123)
(21)	$(\bar{1}23)$	$(12\bar{3})$	3	(123)	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	〔0〕

菱面體晶系の對稱では，右下の一區劃だけに限られてゐる。

なほ此の操作は $4_u\,4_v$ に類似してゐることに注意する必要がある。

第　三　表

$2_m\,3_{uvw}$，$2_{mn}\,3_{uvw}$

	(123)	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(\bar{1}\bar{2}3)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}23)$	$(1\bar{2}3)$	$(12\bar{3})$
1	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(\bar{1}\bar{2}3)$	(123)	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(12\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$	$(\bar{1}23)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$
2	$(\bar{1}\bar{2}3)$	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(1\bar{2}\bar{3})$	(123)	$(\bar{1}23)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(12\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$
3	$(1\bar{2}\bar{3})$	(123)	$(\bar{1}\bar{2}3)$	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$	$(12\bar{3})$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}23)$
(23)	$(\bar{2})$	(2)	(13)	(31)	(3)	$(\bar{3})$	(12)	(21)
(31)	$(\bar{3})$	(12)	(3)	(21)	(1)	(32)	$(\bar{1})$	(23)
(12)	$(\bar{1})$	(32)	(23)	(1)	(2)	(31)	(13)	$(\bar{2})$
(32)	(13)	(31)	$(\bar{2})$	(2)	(1)	(12)	$(\bar{3})$	(3)
(13)	(21)	(3)	(12)	$(\bar{3})$	(32)	(1)	(23)	$(\bar{1})$
(21)	(32)	$(\bar{1})$	(1)	(23)	(13)	$(\bar{2})$	(2)	(31)

第　四　表

$3_{uvw}\,2_m$，$3_{uvw}\,2_{mn}$

	1	2	3	(23)	(31)	(12)	(32)	(13)	(21)
$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$	$(12\bar{3})$	$(\bar{1}23)$	(2)	(3)	(1)	(13)	(21)	(32)
$(\bar{1}23)$	$(12\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{2})$	(12)	(32)	(31)	$(\bar{3})$	(1)
$(1\bar{2}3)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}23)$	$(12\bar{3})$	(13)	$(\bar{3})$	(23)	(2)	(12)	$(\bar{1})$
$(12\bar{3})$	$(\bar{1}13)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(1\bar{2}3)$	(31)	(21)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$	(3)	(23)

(1) 以下第十表迄は指標で示してある。第一表中の部分的關係である。

(123)	$(\bar1\bar23)$	$(1\bar2\bar3)$	$(\bar12\bar3)$	$(\bar3)$	$(\bar1)$	$(\bar2)$	(21)	(32)	(13)
$(1\bar2\bar3)$	$(\bar12\bar3)$	(123)	$(1\bar23)$	(3)	(32)	(31)	(12)	$(\bar1)$	(2)
$(\bar12\bar3)$	$(1\bar2\bar3)$	$(\bar1\bar23)$	(123)	(12)	(1)	(13)	(3)	(23)	$(\bar2)$
$(\bar1\bar23)$	(123)	$(\bar12\bar3)$	$(1\bar2\bar3)$	(21)	(23)	(2)	$(\bar3)$	(1)	(31)

第　五　表

$3_{mnp}\,3_{uvw}$

	(123)	$(1\bar2\bar3)$	$(\bar12\bar3)$	$(\bar1\bar23)$	$(\bar1\bar2\bar3)$	$(\bar123)$	$(1\bar23)$	$(12\bar3)$
$(\bar1\bar2\bar3)$	[0]	2	3	1	(123)	$(\bar12\bar3)$	$(\bar1\bar23)$	$(1\bar2\bar3)$
$(\bar123)$	2	[0]	1	3	$(\bar12\bar3)$	$(1\bar2\bar3)$	(123)	$(\bar1\bar23)$
$(1\bar23)$	3	1	[0]	2	$(1\bar2\bar3)$	$(\bar1\bar23)$	$(\bar12\bar3)$	(123)
$(12\bar3)$	1	3	2	[0]	$(\bar1\bar23)$	(123)	$(1\bar2\bar3)$	$(\bar12\bar3)$
(123)	$(\bar1\bar2\bar3)$	$(12\bar3)$	$(\bar123)$	$(1\bar23)$	[0]	3	1	2
$(1\bar2\bar3)$	$(1\bar23)$	$(\bar123)$	$(12\bar3)$	$(\bar1\bar2\bar3)$	3	[0]	2	1
$(\bar12\bar3)$	$(12\bar3)$	$(\bar1\bar2\bar3)$	$(1\bar23)$	$(\bar123)$	1	2	[0]	3
$(\bar1\bar23)$	$(\bar123)$	$(1\bar23)$	$(\bar1\bar2\bar3)$	$(12\bar3)$	2	1	3	[0]

第　六　表

$2_{mn}\,4_{u}$

	(1)	(2)	(3)	$(\bar1)$	$(\bar2)$	$(\bar3)$
(23)	2	$(1\bar2\bar3)$	$(\bar1\bar23)$	3	(123)	$(\bar123)$
(31)	$(\bar1\bar23)$	3	$(\bar123)$	$(1\bar23)$	1	(123)
(12)	$(\bar123)$	$(\bar1\bar23)$	1	(123)	$(12\bar3)$	2
(32)	3	$(\bar1\bar23)$	$(12\bar3)$	2	$(\bar1\bar23)$	$(1\bar23)$
(13)	$(\bar123)$	1	$(1\bar2\bar3)$	$(12\bar3)$	3	$(\bar1\bar23)$
(21)	$(\bar1\bar23)$	$(1\bar23)$	2	$(1\bar23)$	$(\bar123)$	1

第　七　表

$4_{u}\,2_{mn}$

	(23)	(31)	(12)	(32)	(13)	(21)
$(\bar1)$	2	(123)	$(12\bar3)$	3	$(1\bar2\bar3)$	$(1\bar23)$
$(\bar2)$	$(\bar123)$	3	(123)	$(12\bar3)$	1	$(\bar1\bar23)$
$(\bar3)$	(123)	$(1\bar23)$	1	$(\bar123)$	$(\bar123)$	2
(1)	3	$(\bar1\bar23)$	$(\bar1\bar23)$	2	$(\bar1\bar23)$	$(\bar123)$
(2)	$(\bar1\bar23)$	1	$(\bar123)$	$(1\bar23)$	3	$(1\bar2\bar3)$
(3)	$(1\bar2\bar3)$	$(\bar1\bar2\bar3)$	2	$(\bar12\bar3)$	$(12\bar3)$	1

第　八　表

$3_{uvw}\ 4_m$

	(1)	(2)	(3)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$	$(\bar{3})$
$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{2})$	$(\bar{3})$	$(\bar{1})$	(31)	(12)	(23)
$(\bar{1}23)$	(2)	(21)	(23)	(13)	(3)	$(\bar{1})$
$(1\bar{2}3)$	(31)	(3)	(32)	$(\bar{2})$	(21)	(1)
$(12\bar{3})$	(13)	(12)	(1)	(2)	$(\bar{3})$	(32)
(123)	(12)	(23)	(31)	(3)	(1)	(2)
$(1\bar{2}\bar{3})$	(21)	(1)	$(\bar{2})$	$(\bar{3})$	(23)	(13)
$(\bar{1}2\bar{3})$	$(\bar{3})$	(32)	(2)	(21)	$(\bar{1})$	(31)
$(\bar{1}\bar{2}3)$	(3)	$(\bar{1})$	(13)	(12)	(32)	$(\bar{2})$

第　九　表

$4_m\ 3_{uvw}$

	(123)	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(\bar{1}\bar{2}3)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	$(\bar{1}23)$	$(1\bar{2}3)$	$(12\bar{3})$
$(\bar{1})$	(2)	$(\bar{2})$	(31)	(13)	(12)	(21)	(3)	$(\bar{3})$
$(\bar{2})$	(3)	(21)	$(\bar{3})$	(12)	(23)	$(\bar{1})$	(32)	(1)
$(\bar{3})$	(1)	(23)	(32)	$(\bar{1})$	(31)	(2)	$(\bar{2})$	(13)
(1)	(31)	(13)	(2)	$(\bar{2})$	$(\bar{3})$	(3)	(21)	(12)
(2)	(12)	$(\bar{3})$	(21)	(3)	$(\bar{1})$	(23)	(1)	(32)
(3)	(23)	(1)	$(\bar{1})$	(32)	$(\bar{2})$	(13)	(31)	(13)

第　十　表

$4_u\ 4_v$

	(1)	(2)	(3)	$(\bar{1})$	$(\bar{2})$	$(\bar{3})$
$(\bar{1})$	$[0]$	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(\bar{1}23)$	1	$(\bar{1}\bar{2}3)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$
$(\bar{2})$	$(1\bar{2}3)$	$[0]$	$(\bar{1}\bar{2}3)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	2	$(1\bar{2}\bar{3})$
$(\bar{3})$	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(12\bar{3})$	$[0]$	$(\bar{1}2\bar{3})$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	3
(1)	1	(123)	$(1\bar{2}3)$	$[0]$	$(1\bar{2}\bar{3})$	$(12\bar{3})$
(2)	$(12\bar{3})$	2	(123)	$(\bar{1}23)$	$[0]$	$(\bar{1}2\bar{3})$
(3)	(123)	$(\bar{1}23)$	3	$(\bar{1}23)$	$(1\bar{2}3)$	$[0]$

第 十 一 表

六 次 廻 轉 群

	2_1	2_2	2_{12}	2_{21}	$2_{2/1}$	$2_{1/2}$	3	3′	6	6′	2_3
2_1	1	3	3′	6	2_3	6′	2_2	2_{12}	2_{21}	$2_{1/2}$	$2_{2/1}$
2_2	3′	1	3	6′	6	2_3	2_{12}	2_1	$2_{2/1}$	2_{21}	$2_{1/2}$
2_{12}	3	3′	1	2_3	6′	6	2_1	2_2	$2_{1/2}$	$2_{2/1}$	2_{21}
2_{21}	6′	6	2_3	1	3	3′	$2_{2/1}$	$2_{1/2}$	2_2	2_1	2_{12}
$2_{2/1}$	2_3	6′	6	3′	1	3	$2_{1/2}$	2_{21}	2_{12}	2_2	2_1
$2_{1/2}$	6	2_3	6′	3	3′	1	2_{21}	$2_{2/1}$	2_1	2_{12}	2_2
3′	2_2	2_{12}	2_1	$2_{2/1}$	$2_{1/2}$	2_{21}	1	3	6′	2_3	6
3	2_{12}	2_1	2_2	$2_{1/2}$	2_{21}	$2_{2/1}$	3′	1	2_3	6	6′
6′	2_{21}	$2_{2/1}$	$2_{1/2}$	2_2	2_{12}	2_1	6	2_3	1	3′	3
6	$2_{1/2}$	2_{21}	$2_{2/1}$	2_1	2_2	2_{12}	2_3	6′	3	1	3′
2_3	$2_{2/1}$	$2_{1/2}$	2_{21}	2_{12}	2_1	2_2	6′	6	3′	3	1

6 晶族とその記號

或る晶族のもつあらゆる對稱操作と要素を定めるに必要な，獨立した最少數の對稱操作を並べて書き表はし，それから指標を省いたものを以て，その晶族の記號とする。

例へば二個の對稱軸を要素にもてば，獨立した操作 $2_1, 2_2$ を並べ，晶族の記號を 22 で表はす。この晶族に於けるあらゆる操作は

$$1=(2_1)^2=(2_2)^2, 2_1, 2_2$$

$$2_3=2_1 2_2$$

の四個で盡きる。此の場合 X_3 軸も對稱要素となるからとて記號として 222 を用ゐるのは過分である。$2_1, 2_2, 3_3$ の中二個あれば必ず他のものは自ら定まるから，記號には簡略に 22 をとる。又 1 は總べてのものに通じて當然存在するものであるから，記號からは省く。

これにより此のやうな晶族の記號として 22 を用ゐるのが必要であり又十分であることが知れる。記號 22 は或晶族の性質を完全に意識してゐる。即ち晶族のもつ對稱操作は，記號に表はれてゐる各操作に指標をつけ；その指標を演算子法によつて計算すれば求まるのである。

併しその方法を簡易にし，且つ性質がよく識別される爲に，對稱中心のある晶族とない晶族，即ち中心對稱晶族と非中心對稱晶族とに區分し，非中心對稱晶族の記號 m の前に $\bar{1}$ を置き，$\bar{1}m$ を以て中心對稱族を表はす記號とする。

ここで誤解する虞のある點は，對稱操作として $\bar{m}$ は，$\bar{1}$ と m との結合と見做せるから，$\bar{m}$ で示される晶族があるとすれば，それはいつも對稱中心のあるものと考へ違ひするかもしれな

い懸念である。

併し例をとつてみれば

$$(\bar{2})^2=1,\ (\bar{4})^2=2,\ (\bar{6})^2=3$$

であつて，$\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$ の晶族は何れも非中心對稱族であり，これに對し $\bar{1}2$, $\bar{1}4$, $\bar{1}6$ は中心對稱晶族で，全く別種の晶族であること明かである。

つまり $\overline{m}$ は非中心對稱の晶族で，$\bar{1}m$ はその操作の中に $\overline{m}$ をも含む中心性對稱晶族である。

既に述べたやうに $\overline{m}$ がある時，$\bar{1}$ が獨立した對稱操作を示し，對稱要素として取り擧げられる爲には，m' をも含んでゐなければならない。

$\bar{3}$ だけは自ら $3'$ が表はれる。

$$3'=(3)^2=(\bar{3})^2$$

$$\therefore\quad \bar{3}.3'=\bar{1}.$$

從つて晶族 $\bar{1}3$ と $\bar{3}$ とは同一であるが，記號の統一上，非中心對稱晶族として $\bar{1}3$ を擇ぶことにする。

このやうに規約すると，晶族の記號として $\bar{2}\bar{2}$ と $2\bar{2}$ は同じものを表はし，22, $\bar{1}22\ (=\bar{1}2\bar{2})$ とは別の晶族であることが知れる。

同一の晶族を表はす記號が數種できる場合（例へば $\bar{1}22$, $\bar{1}2\bar{2}$, $\bar{1}\bar{2}\bar{2}$）には，簡單なものを晶族の記號に採る（例へば $\bar{1}22$）。

結局次に示すやうに 32 種の異なる組合せ，即ち 32 晶族に分れ，それ以外には區分できない。その中 11 個は中心對稱晶族，殘りの 21 晶族は非中心對稱である。

晶系	三斜	單斜		斜方		菱面體		
中心對稱	$\bar{1}$	$\bar{1}2$		$\bar{1}22$		$\bar{1}3$	$\bar{1}32$	
非中心對稱	1	2	$\bar{2}$	22	$2\bar{2}$	32	$3\bar{2}$	

正方				立方			六方			
$\bar{1}4$		$\bar{1}42$		$\bar{1}223$	$\bar{1}444$		$\bar{1}6$		$\bar{1}62$	
4	$\bar{4}$	42	$\bar{4}2, 4\bar{2}$	223	444	$44\bar{4}$	6	$\bar{6}$	62	$6\bar{2}, \bar{6}2$

表でみると，晶系の區分も晶族の記號によつて判然することが知れる。

この晶族の記號の特徴を上げれば

(i) 晶族が 32 に分類され，且つそれ以外にないことが知れる。

(ii) 獨立した對稱操作が記號でわかる。

(iii) 記號から直ちに計算できて，すべての對稱操作及び對稱要素が求まる。

(iv) 對稱操作記號から行列の形式が知れるので，同位點が求まる。

（v） 晶系の分類も晶系記號で明瞭に知れる。

便宜上，新記號と在來のものとを比較して次表に掲げる。

第 十 二 表

晶系	新記號	H-M	M-H	R-S	H	Sch.
三斜	1	1	1	p	$_1C$	C_1
	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	i	$_1C_i$	$C_i=S_2$
單斜	2	2	2	s	$_2C$	C_2
	$\bar{2}$	m	m	d	$2c$	C_2
	$\bar{1}2$	$\frac{2}{m}$	$2/m$	sd	$_2C_i$	C_{2h}
斜方	22	222	222	$2s$	$_2D$	$V=D_2$
	$2\bar{2}$	$2mm$	mm	$2d$	$2e$	C_{2v}
	$\bar{1}22$	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	mmm	$2sd$	$_2D_i$	$V_h=D_{2h}$
正方	4	4	4	$4p$	$_4C$	C_4
	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$4\cdot p$	$4c$	S_4
	$\bar{1}4$	$\frac{4}{m}$	$4/m$	$4i$	$_4C_i$	C_{4h}
	42	422	42	$4s$	$_4D$	D_4
	$4\bar{2}$	$4mm$	$4mm$	$4d$	$4e$	C_{4v}
	$\bar{4}2$	$\bar{4}2m$	$\bar{4}2m$	$4\cdot d$	$4d$	$V_d=D_{2d}$
	$\bar{1}42$	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$4/mmm$	$4sd$	$_4D_i$	D_{4h}
立方	223	23	23	tp	T	T
	$\bar{1}223$	$\frac{2}{m}\bar{3}$	$m3$	ti	T_i	T_h
	444	432	43	ts	O	O
	$44\bar{4}$	$\bar{4}3m$	$\bar{4}3m$	td	T_e	T_d
	$\bar{1}444$	$\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$	$m3m$	tsd	O_i	O_h
菱	3	3	$3p$	$_3C$	$_3C$	C_3
	$\bar{1}3$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$3i$	$_3C_i$	$C_{3i}=S_6$

面體	32 $3\bar{2}$	32 $3m$	32 $3m$	$3s$ $3d$	$_3D$ $3e$	D_3 C_{3v}
	$\bar{1}32$	$\bar{3}\frac{2}{m}$	$\bar{3}m$	$3sd$	$_3D_i$	D_{3d}
六方	6 $\bar{6}$	6 $\bar{6}$	6 $\bar{6}$	$6p$ $6\cdot p$	$_6C$ $6C$	C_6 C_{3h}
	$\bar{1}6$	$\frac{6}{m}$	$6/m$	$6i$	$6C_i$	C_{6h}
	62 $6\bar{2}$ $\bar{6}2$	622 $6mm$ $\bar{6}2m$	62 $6mm$ $\bar{6}2m$	$6s$ $6d$ $6\cdot d$	$_6D$ $6e$ $6d$	D_6 C_{6v} D_{3h}
	$\bar{1}62$	$\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$6/mmm$	$6sd$	$_6D_i$	D_{6h}

(註) H-M; Hermann-Mauguin
M-H; H-M の省略形
R-S; Rinne, Schiebold, Sommerfeldt.
H; Hilton 改良形
Sch; Schoenflies.

7) 對稱記號による同位點の求め方

述べる迄もなく明かなことであるが，次に例で示すことにする。或一つの對稱操作は，種々の操作を組合はして導かれるが，煩雜になるのを避け，只一つだけ記すに留める。

例 (1) $\bar{4}2$ 晶族

獨立した對稱元素として，記號の下に異なる軸指標をつければ操作は $\bar{4}_3$，2_1 となる（$\bar{4}_3$，2_2 にしても勿論差支ない）。

$$1 = (2_1)^2 = (\bar{4}_3)^4$$
$$2_3 = (\bar{4}_3)^2 \quad : \quad (3)^2 = 3 \equiv 2_3$$
$$2_2 = 2_1\, 2_3 \quad : \quad 1.3 = 2 \equiv 2_2$$
$$\bar{4}_3' = (\bar{4}_3)^3 \quad : \quad (3)^3 = (\bar{3}) \equiv 4_3'$$
$$\bar{2}_{12} = \bar{4}_3\, 2_1 \quad : \quad (3)1 = (12)$$
$$\bar{2}_{21} = 2_1\, \bar{4}_3 \quad : \quad 1(3) = (21)$$

即ち 8 個の同位點が存在する。

例 (2) 444 晶族

$$4_1,\ 4_2,\ 4_3$$
$$2_1 = (4_1)^2,\ 2_2 = (4_2)^2,\ 2_3 = (4_3)^2$$
$$4_1' = (4_1)^3,\ 4_2' = (4_2)^3,\ 4_3' = (4_3)^3$$

$3_{123}=4_1\,4_2$, $3_{12\bar3}=4_2\,4_1$, $3_{1\bar2 3}=4_3\,4_2$, $3_{\bar1 23}=4_1\,4_3$

$3_{\bar1\bar2\bar3}=(3_{123})^2$, $3_{\bar1\bar2 3}=(3_{12\bar3})^2$, $3_{\bar1 2\bar3}=(3_{1\bar2 3})^2$, $3_{1\bar2\bar3}=(3_{\bar1 23})^2$

$2_{12}=2_2\,4_3$, $2_{23}=2_3\,4_1$, $2_{31}=2_1\,4_2$

$2_{21}=2_1\,4_3$, $2_{32}=2_2\,4_1$, $2_{13}=2_3\,4_2$

これに 1 を加へて總計 24 個となる。

例 (3) $\bar1 444$ 晶族

前例によつて 444 から 24 個求まり，これに $\bar1$ を乘じたものを加へて計 48 元素の群となる。此のやうにして，32 晶族の對稱元總は，その記號から簡單に求まる。

第十三及び第十四表では，$\bar2_1$ の如き上部に負號のあるものは ○, 2_1 の如きを × として同じ區劃に簡略に表はしてある。2_1, $\bar2_1$ が双方共存在する時は ⊗ とする。3 の場合も含めて，⊗ 印のあるものは中心對稱性のものである。

第 十 三 表

晶系	晶族＼要素	1	2_1	2_2	2_3	2_{12}	2_{23}	2_{31}	2_{21}	2_{32}	2_{13}	3	4_1	$4_1'$	4_2	$4_2'$	4_3	$4_3'$	同位點の數
三斜	1	×																	1
	$\bar1$	⊗																	2
單斜	$\bar2$	×		○															2
	2	×		×															2
	$\bar1 2$	⊗		⊗															4
斜方	$2\bar2$	×	○	○	×														4
	22	×	×	×	×														4
	$\bar1 22$	⊗	⊗	⊗	⊗														8
正方	4	×			×												×	×	4
	$\bar4$	×			×												○	○	4
	$\bar1 4$	⊗			⊗												⊗	⊗	8
	$\bar4 2$	×	×	×	×	○			○								○	○	8
	$4\bar2$	×	○	○	×	○			○								×	×	8
	42	×	×	×	×	×			×								×	×	8
	$\bar1 42$	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗			⊗								⊗	⊗	16

正	223	×	× × ×			×		12
	$\bar{1}223$	⊗	⊗ ⊗ ⊗			⊗		24
方	$44\bar{4}$	×	× × ×	○ ○ ○	○ ○ ○	×	○ ○ ○ ○ ○ ○	24
	444	×	× × ×	× × ×	× × ×	×	× × × × × ×	24
	$\bar{1}444$	⊗	⊗ ⊗ ⊗	⊗ ⊗ ⊗	⊗ ⊗ ⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	48

第 十 四 表

晶系	晶族 ＼ 要素	1	2_1	2_2	2_3	2_{12}	2_{21}	$2_{2/1}$	$2_{1/2}$	3	3′	6	6′	同位點の數
菱面體	3	×								×	×			3
	$\bar{1}3$	⊗								⊗	⊗			6
	$3\bar{2}$	×	○	○	○					×	×			6
	32	×	×	×	×					×	×			6
	$\bar{1}32$	⊗	⊗	⊗	⊗					⊗	⊗			12
六方	$\bar{6}$	×			○					×	×	○	○	6
	6	×			×					×	×	×	×	6
	$\bar{1}6$	⊗			⊗					⊗	⊗	⊗	⊗	12
	62	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	12
	$6\bar{2}$	×	○	○	×	○	○	○	○	×	×	×	×	12
	$\bar{6}2$	×	○	○	○	○	×	×	×	×	×	○	○	12
	$\bar{1}62$	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	24

7・1　同位点の位置

同位點の位置は，對稱操作記號の示す行列を用ゐれば簡單に求まる。その行列は別論文の第五表と第六表で示してあるが，表がなくも對稱操作記號から推定することができるからその方法を述べる。

四次對稱群に於ける行列では零でない要素は恒に 3 個である。

$$2_i \qquad a_{ii}=1,\quad a_{jj}=a_{kk}=-1. \qquad \text{（對角行列）}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2_{ij} & \text{正形} & a_{kk}=-1,\quad a_{ij}=a_{ji}=1. \\ 2_{ji} & \text{負形} & a_{kk}=a_{ij}=a_{ji}=-1. \end{array}\right\}\text{（自己相反）}$$

$$3_{ijk}\begin{cases}\text{正形}\ (ijk>0)\begin{cases}i,j,k>0 & a_{kj}=a_{ik}=a_{ji}=1\\ i>0,j,k<0 & a_{kj}=1, a_{ik}=a_{ji}=-1.\end{cases}\\ \text{負形}\ (ijk>0)\begin{cases}i,j,k<0 & a_{jk}=a_{ki}=a_{ij}=1.\\ i,j>0,k<0 & a_{jk}=a_{ki}=-1, a_{ij}=1.\end{cases}\end{cases}$$

$$4_i \qquad a_{ii}=1,\quad a_{jk}=-1,\quad a_{kj}=1.$$

$$4_i' \qquad a_{ii}=1,\quad a_{jk}=1,\quad a_{kj}=-1.$$

說明する迄もなく，記號から行列の形は容易に判じることができる。

菱面體晶系のものでは，既に述べたやうに

$$3=3_{123},$$

$$2_1=2_{32},\quad 2_2=2_{21},\quad 2_3=2_{13}$$

六次對稱群では，$2_3, 2_{12}, 2_{21}$ の形は四次對稱群のものと變りない。其他では零でない要素が四次對稱群のより一個增すから，その加はる要素だけを示すことにする。

2_1	四次對稱群の	2_1	に	$a_{12}=-1$
2_2	,,	2_2	に	$a_{21}=-1$
$2_{1/2}$	,,	2_1	に	$a_{21}=1$
$2_{2/1}$	,,	2_2	に	$a_{12}=1$
3	,,	4_3	に	$a_{22}=-1$
$3'$	,,	$4_3'$	に	$a_{11}=-1$
6	,,	4_3	に	$a_{11}=1$
$6'$	,,	$4_3'$	に	$a_{22}=1.$

之等の對稱操作記號と行列との關係は，式で見るより實際にあたつて試みる方が容易い。結局新しい晶族の記號は對稱に關するあらゆる關係を示すに十分であると謂へる。

昭和十八年四月五日　物理學教室