九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

学部生のための「ミクロ・マクロ双対性」とその周辺の物理学講義　補講A1：接ベクトル・余接ベクトル

成清, 修
九州大学大学院理学研究院 : 准教授

https://doi.org/10.15017/4736688

出版情報：pp.1-10, 2021-11-22. Kyushu University
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

学部生のための

「ミクロ・マクロ双対性」

とその周辺の物理学講義

九州大学理学部物理学科　成清 修

補講 A1：接ベクトル・余接ベクトル

矢印と積層

補講 A では、接ベクトル[1]の導入を省略しました。一連の講義では、おおらかに数学を使うことにしたいので、接ベクトルの導入にこだわるのは、あまり本意ではありませんが、省略してみると「はじめの一歩」がうまく踏み出せていないような気がしてきました。「はじめの一歩」がうまくいくと、後はたいしたことはないというようなことが多いような気もします。ということで、今回は「はじめの一歩」にこだわってみます。今後も「はじめの一歩」的なところは大事にしたいと思います。

まず、力学のおさらいから始めます。図 1 のように（ふたつの矢印は $d\vec{x}$ と $\vec{F}$)、ポテンシャル中の経路に沿った仕事を考えます。力のベクトル $\vec{F}$ はポテンシャル V の勾配 ∇V で与えられます。経路の微小区間を $d\vec{x}$ とします。この微小移動にともなう仕事[2]を dW とすると、$dW = d\vec{x}\cdot\vec{F}$ となります。

[1] この補講での、接ベクトル空間の定義をいちおう与えておきます。服部「多様体」の定理 1.5 のように、多様体の点 p を通る滑らかな曲線すべてを考えます。曲線を引くことで、多様体に目印を付けます。各曲線の点 p における方向微分を接ベクトルとし、それらをすべて集めたものを接ベクトル空間とします。ついでに、余接ベクトル空間も定義しておきます。点 p 近傍で勾配が定義できるような滑らかな曲面群を考えます。関数の助けを借りて、等高面として、多様体に目印を付けます。用いた関数ごとに、点 p における勾配がわかり、それを余接ベクトルとします。用いる関数を線形関数の範囲で考えて、すべての線形関数について、勾配を集めるとベクトル空間となり、余接ベクトル空間と呼ぶことにします。方針を短くまとめると、点 p において、すべての**曲線**とすべての**関数**を考えるということになります。

[2] 表記上の都合から、符号は省略します。

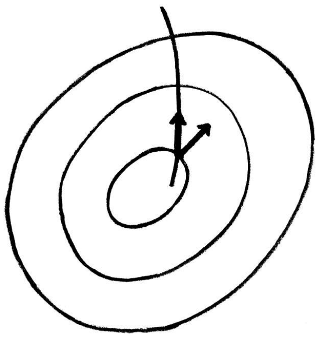

図 1: **ポテンシャル等高面と仕事の経路**（2 次元）

$\vec{x}$ を表現する基底[3]を $\{\vec{e}_i\}$、$\vec{F}$ を表現する基底[4]を $\{\vec{\theta}^i\}$ とします。ここでは、接ベクトルと余接ベクトルに繋がるように、基底を区別しました。図形による表現[5]を考えれば、$\{\vec{e}_i\}$ は矢印に、$\{\vec{\theta}^i\}$ は積層（の法線）に対応します。矢印は経路の接線として、積層は等ポテンシャル面として自然に導入されます。

i-方向は $\vec{e}_i$ でも $\vec{\theta}^i$ でも表現できて、$\{\vec{e}_i\}$ と $\{\vec{\theta}^i\}$ は独立ではありません。内積が

$$\vec{e}_i \cdot \vec{\theta}^j = \delta_i^j \tag{1}$$

となって[6]、このとき、$\{\vec{e}_i\}$ と $\{\vec{\theta}^i\}$ は双対[7]であると呼びます。

この基底を用いて

$$d\vec{x} = dx^i \vec{e}_i \tag{2}$$

および

$$\vec{F} = F_j \vec{\theta}^j \tag{3}$$

[3] $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ なので、$\vec{e}_i = \partial \vec{x} / \partial x^i$ となります。これは、[TB] では、(24.13) になります。

[4] $\vec{F} = \nabla V = (\partial V / \partial x^i) \nabla x^i$ より、$F_i = \partial V / \partial x^i$ および $\vec{\theta}^i = \nabla x^i$ となります。これは、[TB] では、(24.14) になります。

[5] このあたりは、ワインライヒ「幾何学的ベクトル」に詳しい話とたくさんの図があります。ついでに、この本の 4.6 節の議論を紹介します：共変と反変というのは、空間を圧縮したときのベクトルの大きさの増減を指しています。積層は増えるので共変ベクトル、矢印は短くなるので反変ベクトルと言います。共変ベクトルと反変ベクトルの変化が相殺して、内積は一定に留まります。内積は [MTW] の Fig.2.4 のように、矢印によって貫かれた層の数としてイメージできます。

[6] 形式的に軽く済ませると、$\vec{e}_i = \partial \vec{x} / \partial x^i$ と $\vec{\theta}^j = \partial x^j / \partial \vec{x}$ より $\vec{e}_i \cdot \vec{\theta}^j = \partial x^j / \partial x^i$ となって成り立ちます。このあたりの短い話は、北野「新版マクスウェル方程式」の付録 B に、長い話は、太田「ナブラのための協奏曲」にあります。

[7] 双対については、話を始めると長くなるので、今回は名前だけを登場させることにします。

と表現できて

$$dW = dx^i F_i \tag{4}$$

となります[8]。

写像の微分

前節の矢印は大域的に共通の座標系が使える場合の話でした。以下では、座標系が局所的にしか導入できない場合[9]でも使えるベクトルの導入[10]を目指します。

手始めに、写像の微分を導入します。補講 A のように、多様体 M から多様体 N へのなめらかな写像 ϕ を考えます。この写像 ϕ によって、M 上の点 p が N 上の点 q と対応づけられるとします。写像の微分 $\mathrm{d}\phi$ を点 p における接ベクトル $\boldsymbol{u}$ を点 q おける接ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対応づけるものとします。写像の微分は補講 A では push-forward と呼んでいたもの（$\mathrm{d}\phi = \phi_*$）です。基底の変換[11]は補講 A の (13) 式となります。

特殊な場合として、N が 1 次元（数直線）のときを考えます。このとき、写像 ϕ は関数であり、それを f と書くことにします。基底[12]の変換は

$$\mathrm{d}f \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d}{dy} \tag{5}$$

となります。ここで、右辺のベクトルと数直線上の数 $\partial f / \partial x^i$ は同一視[13]できるので、写像の微分の定義をずらして、関数の微分を

$$\mathrm{d}f \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{6}$$

として導入します。ここで、f として x^j を考えれば

$$\mathrm{d}x^j \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j \tag{7}$$

[8] $dW/dt = (dx^i/dt) \cdot (\partial V/\partial x^i)$ と書いてみると、右辺は (16) 式と同じ形になります。

[9] 多様体ではチャートを考える普通の場合ですが。

[10] 局所的な記述に進まなければならない理由は [MTW] や [TB] に詳述されています。しかし、接ベクトルが方向微分であるというのは、物理学者にすんなりと受け入れられたわけではなく、[MTW] には、その痕跡が留められているように思われます。[TB] の 1167 頁では、「Slowly, over the past century, physicists have come to see the merit in this approach.」と書かれています。ので、物理学科の学生が馴染み難く感じるのは、当然のことのようです。

[11] [松] の命題 9.4 にあたります。

[12] $\{\partial/\partial x^i\}$ と $\{\mathrm{d}x^i\}$ がベクトル空間の基底となることは確かめておいてください。このとき、ベクトル性を持つものならば、オブジェクトは何でもよいと考えています。

[13] [松] の (18.6) を導入する議論です。1 対 1 の対応が存在すれば、同一であるとみなすことにします。

となり、(1) 式と同じ双対関係が得られるので、$\{\partial/\partial x^i\}$ がベクトルの基底として使えるならば、$\{\mathrm{d}x^i\}$ をその双対基底として使えばよさそうです。局所的な記述を目指していたのですが、これらの基底は、まさに、局所的なもの[14]になっています。

(6) 式が、ベクトル $\partial/\partial x^i$ を引数とする関数であることを強調するときは

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{8}$$

と書くことにします。双対ベクトル $\mathrm{d}f$ とベクトル $\partial/\partial x^i$ の内積と見るときは

$$\left\langle \mathrm{d}f, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{9}$$

と書くことにします。今、微小領域を考えているので、$\mathrm{d}f$ は $\{\mathrm{d}x^i\}$ の線形結合の範囲で考えればよいことになり、その線形結合は双対ベクトルとなります。

異なる空間のベクトルを同一視する

ここで、矢印・積層と接ベクトル・余接ベクトルの同一視（矢印・積層と接ベクトル・余接ベクトルは異なるベクトル空間のオブジェクトですが、1 対 1 の対応をつけることができます）を図ります。まず、f を点 p のまわりで線形近似[15]して、

$$f = \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i \tag{10}$$

とします。これをもとに勾配が

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \nabla x^i \tag{11}$$

のように導入されます。∇x^i は x^i-方向の単位ベクトルになります。他方、(10) 式の微分 d を考えると、

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \tag{12}$$

---

[14] ベクトルを 2 点の差を見るものとすれば、無限小近傍内の 2 点にまで適用可能なものになっています。

[15] 補講 A の脚注 4 で、線形化ということを強調しました。関数としては、$f = a_i x^i$ の形の線形関数のみを考えることになります。係数 a_i は、$\partial f/\partial x^i$ の点 p での値です。

となります。(11) 式と (12) 式を同一視[16]することにして、図形的な解釈[17]をしたい場合は、$\mathrm{d}f$ に ∇f を対応させます。すなわち、図形的な解釈としては、$\mathrm{d}x^i$ を x^i-方向の単位ベクトルに対応させるということになります。

次に、速度ベクトル $\vec{u}$ と接ベクトル $\boldsymbol{u}$ の同一視を考えます。速度ベクトルは

$$\vec{u} = u^j \vec{e}_j \tag{13}$$

と書かれます。ここに、$u^j = \dot{x}^j$ としています。他方、接ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{14}$$

と書かれます。図形的な解釈をしたい場合は、(13) 式と (14) 式を同一視することにして、$\boldsymbol{u}$ に $\vec{u}$ を対応させます。すなわち、図形的な解釈としては、$\partial/\partial x^i$ を x^i-方向の単位ベクトルに対応させるということになります。

観測量を内積であらわす

量子力学では、観測結果としての数値をベクトルと双対ベクトル（ブラベクトルとケットベクトル）の内積であらわすのでした。

ここでは、多様体上の積分曲線 $x(t)$ に沿って、関数 f の値を観測することを考えます（多様体の探検に必要な道具が**曲線**と**関数**です）。物理量の観測では関数の値そのものではなく、変化量[18]を見ることが多いので、df/dt を観測結果の数値と考えることにします。df/dt は補講 A の (10) 式の右辺を略記したもので、今回の記法でこの式を書くと

$$\frac{d}{dt} f = \boldsymbol{u}(f) \tag{15}$$

となります。ここでは、接ベクトル $\boldsymbol{u}$ が演算子と見立てられ、関数 f に作用し、数値 df/dt が得られるという表現になっています。$\boldsymbol{u}$ は d/dt と同一視されます。この観測の話は、多様体上で閉じており、座標系が導入されていないことを注意しておきます。

次に、多様体上の点 $x(t)$ 近傍を記述する局所座標系（チャート）を導入します。多様体上の点をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の点に対応させる写像

[16] 例えば、[マ] の 223 頁の議論です。

[17] [MTW] や [P] では、接ベクトルと余接ベクトルの図形的な解釈への情熱が感じられます。その後に書かれた [TB] では、図形的な解釈は無くなっているようです。(19) 式のようなデータのみが重要であるとすれば、図形的な解釈にこだわる必要はなく、そのような立場は、例えば、藤原「情報幾何学の基礎」で強調されています。

[18] 経路に沿った微分で、補講 A で導入されたように、方向微分となります。

（チャートの作成）が必要になりますが、繁雑を避けるため、この講義では、この写像については言及しません。$f = f(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ で $x^i = x^i(t)$ とすると、微分の連鎖律[19]を用いて

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} u^i \tag{16}$$

となります（ただし、$u^i = \dot{x}^i$）。左辺は多様体での観測だったのですが、座標系を導入すれば、右辺のように表現されます。ここで、注意すべきは、チャートを作成することで、認識可能な空間が生成される[20]ということです。この空間は、情報処理のためのものであって、ベクトルの成分がデータとなります。

(9) 式と (14) 式より (16) 式は

$$\frac{df}{dt} = \langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{u} \rangle \tag{17}$$

となります。すなわち、df/dt は座標系の取り方によらない数値として、内積であらわされます[21]。

(15) 式と (17) 式から

$$\boldsymbol{u}(f) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{u}) \tag{18}$$

と書けます。

一般に、接ベクトル $\boldsymbol{u} = u^i e_i$ と余接ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega_j \theta^j$ について

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u} \rangle = \omega_i u^i \tag{19}$$

となります。ここに、接ベクトルの基底は $e_i = \partial/\partial x^i$、余接ベクトルの基底は $\theta^j = \mathrm{d}x^j$ で

$$\langle \theta^j, e_i \rangle = \delta_i^j \tag{20}$$

となることを用いました。座標系を変えると、成分 ω_i と u^i はそれぞれ変化しますが、和 $\omega_i u^i$ においては変化が相殺して（共変と反変）、座標系の取り方によらない値となります。余接ベクトルの実態は微分 1 形式：$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$ であって、$\omega_i = \partial f/\partial x^i$ となっています。

---

[19] 連鎖律を出発点とする論理展開は [マ] の第 6 章 9 節に懇切丁寧に示されています。

[20] 局所的な空間の生成ということになります。大域的な空間の生成はチャートをアトラスに貼り合わせることによってなされます。

[21] df/dt を 2 つのベクトルの積に分解する議論は、例えば、[マ] の第 6 章 9 節で行われています。

ここでは、内積が座標系によらないことを強調しましたが、そもそも、ベクトルとは（接ベクトルも余接ベクトルも）座標系によらないものでした。そのときは、座標系を変えた際の基底の変化を、成分の変化が打ち消しているのでした。

補講 A の補講

補講 A の演習で考えたように、多様体上の積分曲線 $x(t)$ に沿った移動を ϕ とします。点 p における接ベクトルを $\boldsymbol{X}$ とするとき、点の移動は $\phi_{t\boldsymbol{X}}(p)=q$、関数 f への作用は（差分の範囲で）

$$t\boldsymbol{X}f(p)=f(q)-f(p) \tag{21}$$

でした[22]。

矢印としてのベクトルは、点 p と点 q に共通の座標系があって、そのもとで 2 点の位置情報の差を見るものでした。(21) 式において、$f=x^i$ とすると

$$t\boldsymbol{X}x^i(p)=x^i(q)-x^i(p) \tag{22}$$

となって[23]、（点 p の近傍に限って）その性質を引き継いでいます。

今、点 p での局所座標系を $\{x^i\}$、点 q での局所座標系を $\{y^i\}$ とします。関数の値 $f(p)$ と $f(q)$ は座標系の取り方によらないので、2 点の差を特徴づけるものとしてベクトルを導入する際の基盤となります。

余接ベクトルは関数 f の等高面分布が与えられて初めて意味を持ちます。力学の例では、力の場が、余接ベクトルとして表現されていました。この微分 1 形式である余接ベクトルと双対な接ベクトルは、(19) 式のように内積が数値となるものとして、微分演算ということになります。

微分演算である接ベクトルは、(21) 式のように、2 点の差[24]に関する座標系によらない情報を見るもの[25]となっています。

以下の議論では、多様体 M の点から多様体 N の点への写像を ϕ とします（$q=\phi(p)$）。$\boldsymbol{X}$ が点 p での接ベクトルで、$\boldsymbol{Y}$ は $\boldsymbol{X}$ を push-forward し

[22] 補講 A を書いてみて、その範囲でいちばん大事だったのは、この式でした。[P] の Fig.10.6 で示したいことのひとつは、この式と思われます。

[23] 微分の極限（$t\to 0$）では、$\boldsymbol{X}x^i=u^i$ となって、座標系における表現では、$\boldsymbol{X}$ は位置データを速度データに変換する演算です。[HE] の 28 頁の成分計算がこれに相当します。

[24] 2 点の位置の差の極限として、(22) 式から、速度が得られます。

[25] すでに述べたように、多様体の探検に必要な道具は、**曲線**と**関数**でした。点 p の近傍に限れば、これらは、接線と関数の増分となります。

た、点 q での接ベクトルとします。それぞれの局所座標系で、$\boldsymbol{X} = \dot{x}^i \partial/\partial x^i$ および $\boldsymbol{Y} = \dot{y}^j \partial/\partial y^j$ となります。補講 A の (4) 式を今回の記法で書くと

$$\boldsymbol{X} g(y(x)) = \boldsymbol{Y} g(y) \tag{23}$$

となります。ただし、点 p の局所座標を x、点 q の局所座標を y としました。補講 A での説明がもたもたしていたので、ここで、この式が成り立つことの説明を整理してみます（ほとんど変わり映えしませんが）。

$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の関係[26]は、補講 A の (8) 式のように確定しています。(23) 式の右辺は、点 q において、素直に関数 g を方向微分しています。左辺は、合成関数の微分を行って、

$$\dot{x}^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial g(y)}{\partial y^j} \tag{24}$$

となりますが、

$$\dot{y}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \dot{x}^i \tag{25}$$

なので、右辺と同じものになります。

(23) 式を g の pull-back $\phi^* g$ と $\boldsymbol{X}$ の push-forward $\phi_* \boldsymbol{X}$ を用いて書くと

$$\boldsymbol{X}(\phi^* g) = (\phi_* \boldsymbol{X})(g) \tag{26}$$

となります[27]。同様に[28]、$\boldsymbol{\omega}$ とその pull-back$\phi^* \boldsymbol{\omega}$ は

$$(\phi^* \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\omega}(\phi_* \boldsymbol{X}) \tag{27}$$

を満たします[29]。(27) 式は内積で書くと

$$\langle \phi^* \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \phi_* \boldsymbol{X} \rangle \tag{28}$$

となります[30]。(26-28) 式では、左辺は $p \in M$ で、右辺は $q \in N$ で計算されます。

(28) 式が成り立つことは以下のようにして確かめられます。座標変換において、(12) より、

$$\mathrm{d}y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \tag{29}$$

[26] $\boldsymbol{X}$ は積分曲線 $x(t)$ に沿った方向微分でした。ϕ によって、$x(t)$ が $y(t)$ に移されます。$\boldsymbol{Y}$ は $y(t)$ に沿った方向微分となります。

[27] [HE] の (2.6) に当たります。[松] では、命題 9.5 として説明されています。

[28] g は N 上の関数でした。関数の微分である $\boldsymbol{\omega}$ も N 上の微分 1 形式を考えます。

[29] [松] では、(18.27) に当たります。

[30] [HE] の (2.7) の上の式に当たります。

となっています。余接ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が、この座標変換で不変となるため、成分 $\omega_i(x)$ と $\omega_j(y)$ は

$$\omega_i(x)\mathrm{d}x^i = \omega_j(y)\mathrm{d}y^j \tag{30}$$

となるように変換し、

$$\omega_j(y) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\omega_i(x) \tag{31}$$

となります[31]。(28) 式において、左辺は $\omega_i(x)\dot{x}^i$、右辺は $\omega_j(y)\dot{y}^j$ ですが、(25) 式と (31) 式より、左辺と右辺が等しいことがわかります。

(27) 式から

$$\phi^*(\mathrm{d}g) = \mathrm{d}(\phi^* g) \tag{32}$$

であることがわかります[32]。

補講 A 以来、push-forward とか pull-back とか言ってきましたが、局所座標系を用いて成分表示すれば、ここで見てきたように：背景をすべて忘れて、$y = \phi(x)$ という変数変換があるだけの問題として処理することができます[33]。

はじめの一頁

今回は、はじめの一歩にこだわって、接ベクトルと余接ベクトルについて考えてみました。[HE] の 2.3 節のはじめの 1 頁分[34]に書いてあること

[31] 接ベクトルの成分の変換は $\dot{y}^j = (\partial y^j/\partial x^i)\dot{x}^i$ で、反変成分と呼ばれています。余接ベクトルの成分は共変成分と呼ばれています。前出の脚注のように、積層が共変ベクトル、矢印が反変ベクトルでした。

[32] [HE] の (2.7) に当たります。[松] では、命題 18.2 として説明されています。(27) 式で、$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}g$ として、今回登場したいくつかの関係式を活用すると、$(\phi^*\mathrm{d}g)(\boldsymbol{X}) = \mathrm{d}g(\phi_*\boldsymbol{X}) = (\phi_*\boldsymbol{X})(g) = \boldsymbol{X}(\phi^* g) = \mathrm{d}(\phi^* g)(\boldsymbol{X})$ となります。いちおう (32) 式の成立を確認するとこのような感じですが、可換図式 ($\phi^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \phi^*$) と見ると当たり前のようです。図は、例えば、フランダース「微分形式の理論」69 頁にあります（それでも、証明が 31 頁で与えられています)。ついでに、この本の三角図式も見ておきます。4 頁の図のように、微分形式 ω の pull-back $\phi^*\omega$ は $\phi^*\omega = \omega \circ \phi$ となります。関数 g の pull-back $\phi^* g$ も同様で $\phi^* g = g \circ \phi$ となります。やはり三角図式で、接ベクトル $\boldsymbol{X}$ の push-forward $\phi_*\boldsymbol{X}$ は $\phi_*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} \circ \phi^*$ となり、(26) 式が成り立ちます。多様体 M から N への写像が ϕ で、g は N の点に作用し、$\boldsymbol{X}$ は M の関数に作用するという設定でした。

[33] 物理の教科書は、この立場に徹しているものも多いようです。

[34] [HE] では 10 頁から 55 頁の第 2 章が微分幾何学のレビューにあてられています。Penrose は [HE] の書評を書いていて、このレビューのことを「detailed but rapid」としています（書評では、[HE] の全般についていろいろ注文がつけられています)。今回の議論は、2.2 節までの内容も若干含んでいます。多様体と局所座標系をつなぐ写像は、記述が煩雑になるので省略しました。

が、腑に落ちたら[35]、時空多様体探検のはじめの一歩[36]が踏み出せたことになると思います。

おわりに

さて、今回も例によって、ごちゃごちゃといろいろ書き連ねてしまいました。実際の講義では、内容をできるだけ削ることを心がけるので、逆の行き方です。が、冗長な記述も何かのヒントになることもあるかもしれません。適当に情報の取捨選択をして進んでいってください。

参考文献

[HE]

Hawking, Ellis「The Large Scale Structure of Space-Time」(Cambridge, 1973)

[MTW]

Misner, Thorne, Wheeler「Gravitation」(Freeman, 1973)

[P]

Penrose「The Road to Reality」(Vintage, 2004)

[TB]

Thorne, Blandford「Modern Classical Physics」(Princeton, 2017)

[マ]

マックレーン「数学-その形式と機能」(森北出版, 1992)

[松]

松本「多様体の基礎」(東京大学出版会, 1988)

(2021-11-22)

[35]すべての式が説明抜きに当たり前に見えたら。

[36]Carroll「Spacetime and Geometry」の Appendix A が Maps between Manifolds にあてられていて、三角図式が多用されています。