四個の正方形コイルを用いた磁気式モーションキャプチャの方法とその高速化に関する研究

山口, 崇

https://doi.org/10.15017/462318

出版情報：九州大学, 2011, 博士（工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

四個の正方形コイルを用いた磁気式モーションキャプチャの方法とその高速化に関する研究

A Research on a Method of Magnetic Motion Capture Using Four Square Coils and Its Acceleration

山口　崇

Yamaguchi, Takashi

平成 23 年（2011 年）11 月

November 2011

目次

表記法について

本論文で用いるおもな表記法をここにまとめておく．

- x のようなイタリック体の小文字は，物理的次元をもたない**数**を表す．
- X のようなイタリック体の大文字は，物理的次元をもつ**量**を表す．
- $\boldsymbol{x}$ のようなボールドイタリック体の小文字は，物理的次元をもたない**数ベクトル**を表す．
- $\boldsymbol{X}$ のようなボールドイタリック体の大文字は，物理的次元をもつ**量ベクトル**を表す．
- ボールドローマン体の文字 $\mathbf{e}$ を用いて，n 次元ユークリッド空間の正規直交基底を $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ で表す．ただし，並びの順序のみが異なるものも，異なる正規直交基底として区別される．それぞれの基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ は物理的次元をもたない．
- ベクトル $\boldsymbol{x}$ が基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ による成分表示で $\boldsymbol{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ のように表されるとき，基底が文脈上明白で，誤解のおそれがない場合に限り，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のように成分で表す．
- ベクトル $\boldsymbol{x}$ の**大きさ**を $|\boldsymbol{x}|$ で表す．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の大きさは $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$ で定義される．
- ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の**スカラー積**を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で，**ベクトル積**を $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ で表す．
- t, T のようなサンセリフ体は**行列**を表し，小文字と大文字の違いは，その要素がそれぞれ数および量であることを表す．行列 T の**転置**を T^{t} で，**逆行列**を T^{-1} で表す．
- 行列を要素を並べて表す場合には角括弧で囲み，$\mathsf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ のように表す．
- $\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ は対角要素に $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ が並び，非対角要素がすべて零であるような**対角行列**を表す．

第 1 章

序論

1.1 モーションキャプチャとは

近年，映画やビデオゲームなど娯楽分野において，モーションキャプチャの技術を活用して制作されたコンピュータアニメーションが人々の生活に広く浸透したため，モーションキャプチャは一般には，人工現実感（バーチャルリアリティ）の要素技術のひとつと見られている．今日，**モーションキャプチャ (motion capture)** という用語は，われわれの生活する現実空間における物体や人体の動きを，何らかの手段・方法により観測し，時系列の数値データに変換する技術，あるいは，そのような技術を要素として複合された技術やシステムを幅広く指示している．人体を対象とする場合に限っても，顔の表情や全身の関節の動きを多数の点で追跡するものから，全身を 1 つの点として動きを追うものまで幅広い．**モーショントラッキング (motion tracking)** という用語もまた，ほぼ同じ意味で用いられている．

物体や人体のすばやい動きを正確にとらえたいという需要と，そのための技術開発の歴史はつねに，アニメーションなどの映像制作に強い影響を与えてきた．コンピュータ技術の発達により，3 次元モーションキャプチャの技術が発達すると，より現実感のあるデータを取得できるようになり，アニメーションやビデオゲームの制作者が意図する映像表現を実現するための重要な手段のひとつになった [1, p. 3–16]．ただし，映像制作の用途では通常，モーションキャプチャは実物に近い動きを取り入れるための補完的な技法であり，計測データは制作者が意図に沿って自由に加工できる素材として位置づけられる．

しかし，こうした一般の印象に反して，モーションキャプチャ装置の開発は従来より医療分野向けを最大の市場としており，アニメーションやビデオゲームのような娯楽分野の市場は，最近急速に拡大しているとはいえ相対的にはまだ小さい．医療分野では 3 次元

計測や運動解析に用いられており，同様にスポーツの分野や，人間工学を必要とする工業製品の設計にも役立っている．これらの用途では，計測データはそのまま直接に利用されるものであり，データのもつ意味は映像制作とはまったく異なっている．そのため，計測データの正確さと再現性がとりわけ重視される [2].

モーションキャプチャ装置をコンピュータへの入力装置として使う用途では，取得した情報を使用者に即座にフィードバックできる実時間性が重要となる．システムへの応用例としては，ヘッドマウントディスプレイ (head mounted display; HMD) などの出力装置を組み合わせて仮想空間を生成し，使用者の動きとその作用を人工現実感により感覚にフィードバックする実時間シミュレーションシステムがあるが，現状はかなり高価で軍事向けとしての応用が多い [2]．民生用では 2010 年以降，家庭用ビデオゲームの市場において，本格的なモーションキャプチャの手法を応用した入力装置が製品として登場しはじめている*1.

モーションキャプチャの原理は，光学式，機械式，磁気式，超音波式など数多く提案されている [5,6]．これらの方式はそれぞれに特徴があるため，実際に用いられるときには，計測対象の特性など諸条件に適した方式が選択され，ときには複数の方式を組み合わせて用いられる．Moeslund ら [7,8] は，人体を測定対象とするモーションキャプチャのおもな応用領域を，つぎのように監視 (surveillance)，制御 (control)，分析 (analysis) の 3 つに分類し，それぞれに要求される特性を，頑健さ (robustness)，正確さ (accuracy)，速さ (speed) の 3 つの観点から考察した.

- 監視

  対象物の動きを長時間にわたり追跡し，場合によっては特徴的な動きを監視する．例として，駐車場における自動車の盗難などの犯罪行為を検知するために，人の動きを追跡するシステムなどが挙げられる．照明や天候，あるいは着衣の違いなどの環境や条件の変動に影響されることなく，対象を確実に検知できる頑健さが最も強く要求される．また計測にはある程度の速さも必要であるが，位置の精度など正確さが要求されることはまれである.

- 制御

  何らかの制御機能を提供する用途としては，ゲームや仮想空間へのインターフェースや，離れた場所に設置された機器・装置の遠隔操作などがある．アニメー

*1 磁気式による米国 Sixense Entertainment 社の Razer Hydra [3] や，マーカレス光学式による米国 Microsoft 社の Kinect [4] などが市販されているが，いずれも技術の詳細は明らかではない.

ションやビデオゲームの映像制作も，CG 映像の操作ととらえることができる．

映像制作ではより自然な動きを得るために，データを高いサンプリングレートで取得することが要求される．これらの用途では一般に，計測の速さが最も要求され，正確さもある程度は必要とされる．その一方で，通常は環境や条件をある程度整えた状態で計測されるため，頑健さが厳しく要求されることは少ない．

- 分析

  モーションキャプチャの計測データは，医療分野の中でもとくに整形外科領域において研究や診断に，あるいはスポーツ分野において運動の分析に活用される．これらの用途では，位置や姿勢の正確なデータを得ることが目的であるため，システムには高い確度と分解能，および再現性が要求される．したがって，測定の環境や条件はきわめて安定な状態に保たれなければならず，その分，計測システムの頑健さへの要求は小さくなる．

  ここで最も強く要求されるのは，対象物の動きを忠実にかつ高精度に測定するという意味での正確さである．そのために位置や姿勢の精度に加えて高いサンプリングレートが要求され，対象物の捕捉を短時間で高速に繰り返し実行できることが求められる．その一方で，位置や姿勢の高精度な計測データを得るために，後処理に長い時間を要することはあまり問題とされない．このように，速さについてはその側面により要求は異なる．

モーションキャプチャシステムが対象物について直接に計測する一次データは方式により異なり，通常，光学式では画像のピクセルデータ，機械式では回転角度，磁気式では磁界ベクトルである．使用者が知りたいのは対象物の位置や姿勢などであり，これらは一次データを演算処理した結果の二次データとして得られる．一次データの取得量，あるいは二次データへの変換の演算量が大きい場合には，計測を完了して即時に位置や姿勢を出力する実時間処理は技術的に難しくなる．しかしながら，実時間シミュレーションシステムの入力装置としての利用など，システムの用途によっては実時間処理は必須となる．

計測時に装具やスーツ，マーカあるいはセンサなどが装着されることにより，計測対象は物理的な拘束を受けるが，自然な動きを制約するこのような拘束は，いかなる用途であれ少ないほうがよい．スポーツやダンスなどでは装具の装着により，計測したい目的の動作が不可能になることもある．また，医療においては，疾病や障がいをもつ患者が被験者となることが多く，被験者が負荷や苦痛を感じる装具などは，健常者に対してより強く動きを制約することがある．そのような場合，被験者の状態を忠実に記録することが難しく

なるため，計測データの信頼性の低下につながる．

1.2　モーションキャプチャの諸方式

モーションキャプチャの方式として広く用いられている光学式，機械式，および磁気式について，それぞれの方式の概要をつぎに述べる．

1.2.1　光学式

19 世紀後半の米国では，Eadweard Muybridge により複数のカメラを使用する高速連続写真撮影の技術が確立され，さまざまな動物や人体のごく短時間の動きを十数コマの連続写真で捉えたフィルムが多数制作された [1, p. 38] [9, 10]．このように，連続する動きを一定の時間間隔でサンプリングしてデータ化する発想はモーションキャプチャそのものであり，また対象を画像によりとらえる点では光学式の原型ともいえる．

一般的な光学式のシステムでは，複数のカメラで異なる方向から撮影された 2 次元の画像データから，対象物の表面に設定された計測点の 3 次元座標を計算する．測定環境では特定の色の照明を使用し，発光あるいは反射するマーカを計測点に取り付ける方式が一般的である [11]．マーカには配置を制約する配線などがないため，計測点を自由に配置することができる．

設置されたすべてのカメラで対象物を同時に撮影し，これを一定の時間間隔で連続的に繰り返すことにより，複数のカメラ画像のピクセルデータの組が時系列に並ぶ一次データが得られる．モーションキャプチャの目的はそれぞれの計測点の動きを追跡することであるから，最終的に要求される二次データは，それぞれの計測点の 3 次元空間における位置の時系列である．したがって，それぞれのマーカが正確に区別され，時間軸の前後で正しく対応づけられていなければならない．

この二次データを得るためには通常，膨大な後処理が必要である．まず，ある時点におけるピクセルデータについて，演算処理によりすべてのマーカを検出し，それぞれのカメラのピクセル座標系で表された 2 次元の位置データを得る．それらをすべて集約し演算処理することにより，すべてのマーカについて 3 次元の位置データが得られる．さらに，ひとつひとつのマーカを区別して，時系列で 1 つ前のフレームと対応づける処理をおこなうが，それには計測点の動きの特性が表現されたなんらかのモデルへのあてはめが必要になる．

後処理が膨大になる根本的な原因の一つはピクセルデータが大きなデータ量をもつこと

である．しかも，ピクセルデータのほとんどはマーカ以外の部分すなわち背景の画像で占められ，データ量としては相対的に非常に小さい計測点の時系列のデータを得るために，膨大なピクセルデータの演算処理を必要とする．位置データの精度や分解能を向上するには，高解像度の画像データと多数のカメラが必要であり，その場合にはピクセルデータの量の増大にともなって，カメラとコントローラの間で通信するデータ量も増加し，短時間での処理はさらに困難になる．このように，画像データの解像度が高くなるほど通信および後処理に要する時間が増えるため，計測される位置の精度とサンプリングレートとの間にはトレードオフの関係が存在する [1, p. 17–18].

光学式では対象物から自由空間を直進してくる光をとらえて計測する．この直進性は他の電磁現象の影響を受けないため，他の方式に比べて原理的に，位置の測定確度を高くすることができる．しかしまた，この直進性ゆえに死角が生じ，ものかげに隠れたマーカの検知は原理的に不可能となる．これはいかなる方法でも解決できない，光学式の最大の欠点である．したがって，マーカの位置の測定データにはつねに欠損の可能性を想定しておかなければならない．この問題の根本的な解決は不可能であるが，実用上の影響を軽減する方法はいくつか提案されている．その例として，検知できないマーカの位置をその前のフレームからカルマンフィルタで推定する，あるいは人体の計測においては，適切な人体モデルを用いて周辺のマーカの位置から推定する方法などがある [12, 13].

光学式の長所と短所はつぎのとおりである [1, p. 20–21] [14, p. 10] [15, p. 78].

- 長所
  - 位置の測定確度を高くすることができる．
  - 多数のマーカを追跡することができる．
  - マーカの配置を容易に変えることができる．
  - ケーブルにより動きの制約を受けることがない．
  - 他の方式に比べて計測領域が広い．
  - サンプリングレートが高速である．
- 短所
  - 後処理が膨大で計算コストが大きい．
  - ハードウエアが極めて高価である．
  - 死角によりマーカが長時間ものかげに隠れると測定できない．
  - 均一な光源などよく整備された照明環境が必要である．
  - 実時間でのプレビューは簡易なものに限られる．

実用化された光学式システムの例としては，英国 Vicon Motion Systems 社の Vicon

MX [16] や，米国 Motion Analysis 社の Raptor シリーズ [17] がある．これらは画像データの解像度にもよるが，毎秒 200 フレームから 2,000 フレームの画像を取り込むことができる．また，カメラ装置が内部のプロセッサで画像データの前処理を済ませてからデータを送出することにより，通信量と後処理の負荷を減らし，実時間で位置データの簡易なプレビューを可能にしている．光学式システムの価格帯は，性能や規模により 5 万ドルから 100 万ドルを超えるものまで幅広い [1, p. 21].

近年では，マーカを使わずに画像から身体の動きを抽出するマーカレス方式がさかんに研究されている [18–23]．光学式以外も含めてほかの方式は，マーカやセンサを用いて測定点を指定し，位置計測を基盤として構築されているのに対して，マーカレス方式では通常，身体の各部位または全体を画像データから切り出し，運動学モデルにあてはめることにより全身の動きを再構成する．実用化されたシステムとしては米国 Organic Motion 社の BioStage [24] がある．

1.2.2 機械式

機械式の原理の最も基本的な構成要素は，人体の関節に連動する外骨格機構を回転式の可変抵抗器などと組み合わせ，角度の変化を電気的に検出する電気角度計である [25, p. 90]．1988 年，米国のコンピュータアニメーション制作会社 Pacific Data Images (PDI) は，直棒と可動連結機構で構成した装具を頭部と上半身に装着し，関節の角度を光ポテンショメータにより計測する装置を開発した [1, p. 10]．この外骨格のような形状をもつ装置は，英語で外骨格を意味するエグゾスケルトン (exoskeleton) という名称で呼ばれている．

現在，全身運動計測が可能なシステムは角度計として慣性センサを用いたものが広く実用化されており，英国 Animazoo 社の Gypsy や IGS シリーズ [26]，オランダ Xsens 社の MVN [27] などがある．いずれも，サンプリングレート 120 Hz 以下，確度 0.5° 以下，基本システムの価格帯は 5 千ドルから 10 万ドル程度である．

また，手指の関節の動きを計測する装置として，DataGlove [28, 29] がある．これは手袋の表面に光ファイバを装着したもので，光ファイバが屈曲すると光の通過量が減少することを利用して，関節の屈曲角度を測定するものである．実用化されたものとして現在は，米国 CyberGlove Systems 社の CyberGlove [30] シリーズなどがある．

機械式の長所と短所は一般につぎのとおりである [1, p. 30] [14, p. 12] [15, p. 78–79].

- 長所

  - 対象物の可動領域を大きくとることができる．
  - 価格が光学式に比べて安い．
  - 装具の持ち運びが容易である．
  - データの収集が実時間で可能である．
  - データの計算処理の手間が少ない．
  - 光学式のような死角がない．
  - 複数の人体を計測することが可能である．
- 短所
  - サンプリングレートが低速である．
  - センサが増えると配線が多くなり，装着が面倒になる．
  - 関節の動きが制約される．
  - 他の方式より壊れやすい．
  - センサの配置は固定されている．
  - 単体では絶対位置や並進移動量を知ることができない．

1.2.3　磁気式

磁気式モーションキャプチャシステムは一般に，空間に参照磁界を発生するためのコイルと，磁界ベクトルを計測する磁界センサにより構成される．参照磁界は自由空間に対して方向や長さの情報をもつ測度を与える機能をもち，これをある観測点で測定すると，観測点の位置や姿勢に関係する情報を得ることができる．参照磁界としては複数の磁界分布を用意し，それぞれについて計測を実行する必要があるため，直流磁界または交流磁界を時分割で切り替えるか，または周波数の異なる複数の交流磁界を重畳する方法により，時間領域あるいは周波数領域で多重化される．

磁気式の長所および短所は一般につぎのとおりである [1, p. 28] [14, p. 11] [15, p. 78–79]．

- 長所
  - 実時間での測定が可能で，対話型の入力装置に応用できる．
  - 位置と姿勢の 6 自由度を実時間で出力することができる．
  - 価格が光学式に比べて安い．
  - 金属以外の物体に対しては光学式のような死角がない．
  - 複数の人体を計測することが可能である．

- 短所
  - 金属や磁性材料がある環境では計測の乱れが発生しうる．
  - 配線により動きが制約を受けることがある．
  - 光学式に比べてサンプリングレートは低速である．
  - 計測領域は他の方式に比べて小さい．

他の方式と比較した場合，磁気式の大きな特徴は，1 つのセンサで位置と姿勢の 6 自由度をすべて同時に実時間で計測できることである．とくに光学式に対しては，死角がないこと，すなわち，ものかげに隠れた計測点でも計測が可能である点が優れている．また，典型的な磁気式システムの価格帯は 5 千ドルから 15 万ドルで [1, p. 28]，光学式に比べて低価格のシステムを実現しやすい．

交流磁界はコイルで容易に検出でき，同期検波を用いれば微弱な磁界を高い分解能で計測することができる．また，複数の異なる磁界分布を周波数領域で多重化しておけば，それらを時間軸でずらすことなく同時に計測することが可能である．また地磁気のように，環境中に存在する静磁界の影響を受けることはない．その一方で，計測空間やその近くに導電性材料が置かれた場合，渦電流が生じて磁界が乱れ，計測に支障をきたすことが指摘されている [31, 32]．また，参照磁界はコイルに交流電流を流して発生させるため，その制御は直流磁界に比べるとやや複雑になる．

直流磁界の場合，純粋な静磁界であれば原理的に，導電体との相互作用をもつことはない．しかし，モーションキャプチャでは数種類の磁界を時分割で多重化するため，実際にはパルス磁界の切り替えが必要であり，過渡現象として渦電流による磁界の乱れが生ずる．このため直流磁界を用いるシステムで，サンプリングレートを高くした場合に，実際に計測精度が低くなることが指摘されている [33, 34]．交流磁界のときのような検波が不要で，また，参照磁界を発生させるコイルには直流電流を流すため，交流磁界の場合に比べて制御は容易になる．

一般に知られる光学式，機械式および磁気式の特徴の相対比較をまとめて Table 1.1 に示す．

1.3　磁気式モーションキャプチャ

1.3.1　磁気ダイポール方式

微小な環状電流が遠方に発生する磁界は，物理的には実在しない磁気双極子（または磁気ダイポール）による磁界と同一視されている．このため，しばしば微小環状電流によ

Table 1.1　General comparisons between optical, mechanical, and magnetic motion capture systems.

	Optical	Mechanical	Magnetic
Degrees of freedom	3	3	6
Accuracy	high	medium	medium
Range of capture	medium	large	medium
Sample/update rate	high	low	low–medium
Amount of post-processing	very large	small	very small
Occulusion-free	No	Yes	Yes
Cost	medium–very high	low–medium	low–medium

る磁界源は磁気ダイポール，その発生磁界はダイポール磁界と呼ばれている*2．磁気ダイポール方式では原理上，磁界源は計測領域から見て点と見なせることが必要である．したがって，実際の装置では，磁界源として小さなコイルを計測点から十分に離れた位置に置くことになるため，計測領域は開放的な空間となる．

磁気ダイポール方式の原型は，1960 年代に Kalmus [36] が提案した，平面上での移動体の位置・方角を検知する 2 次元の追跡装置で，そこに用いられた磁界源と磁界検知器はともに，2 つのソレノイドコイルを直交 2 軸方向に交差したものであった．この原理はさらに 1970 年代後半に，Kuipers [37–39]，Raab [40–42] らによって，直交 3 軸の磁界源および磁界検知器を用いた 3 次元の追跡装置へと発展し，そのあとにもいくつかの方式が提案されている [43, 44]．

ダイポール磁界はその大きさが磁界源からの距離の 3 乗に反比例する．距離の増加に対する磁界のこの急激な変動と減衰のため，磁界計測システムのダイナミックレンジや分解能に対する要求は厳しくならざるをえない．この特性は，ダイポール磁界を使うことの困難さ，あるいは短所としてしばしば言及される．これに対しては，空間に複数の磁気ダイポールを配置して，計測領域を広げようとする試みがある [45, 46]．

現在使われているほとんどの磁気式モーションキャプチャ装置では，磁気ダイポール方式が採用されている．実用化された代表的なシステムとしてはつぎのものがある．交流磁界を用いる米国 Polhemus 社の LIBERTY は，アップデートレート 240 Hz で，同時に 16 点まで計測できる仕様となっている．基本確度は RMS 値で位置座標 0.03 インチ (≈ 0.76 mm)，姿勢 0.15° である [47]．パルス直流磁界を用いる米国 Ascension

*2 微小環状電流と磁気双極子の混用は物理学的には不適切である [35, Ch. 9]．本論文では慣例にしたがうが，磁気ダイポールはつねに微小環状電流を指示するものとする．

Technology 社の 3D Guidance trakSTAR は，アップデートレート 480 Hz で同時に 6 点まで計測できる仕様となっている．基本確度は RMS 値で位置座標 1.4 mm，姿勢 0.5° である [48]．いずれも基本システムの価格は 1 万ドル未満である．

1.3.2　正方形コイル方式

立方体の形状に配置された正方形コイルが物体の動きの検知に利用された古い例としては，1961 年に Philco 社の Comeau と Bryan が開発したヘッドサイトテレビジョン装置 [49] がある．この装置には，6 個の正方形コイルが立方体状に組まれ，回転軸が互いに直交し回転速度の異なる 3 つの回転磁界を発生させて，立方体の中心部で方位の変化を検知するしくみが使われていた．実際に検知に必要とされるのは立方体の中心点における磁界のみで，対向する 2 つのコイルにより中心点の近傍に発生する磁界の，局所的な一様性が利用されている．

1997 年，米国 Ascension Technology 社の Blood は，2 つ以上の多角形コイルを適当に配置し，それぞれが発生する磁界をコイルに比較的近い領域で計測することにより，位置や姿勢を推定する原理を提示し米国で特許 [50] を取得した．その中で，ダイポール磁界方式の欠点である，磁界源からの距離の増加による磁界の急激な減衰の問題を解決することが，発明の目的のひとつとして挙げられている．

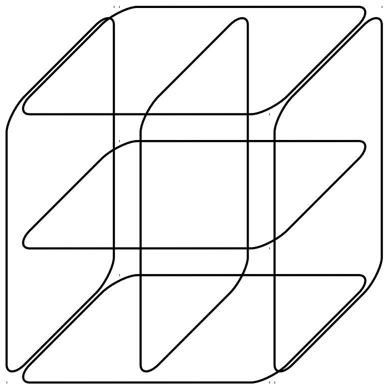
計測点がコイルに近ければ，コイルは磁界源として点と見なせず，その発生磁界はダイポール磁界のような簡潔な数式では表すことはできない．このことは磁界から位置や姿勢を求めるための後処理をより複雑にする可能性がある．しかし一方で，磁界分布はダイポール磁界ほど急激な空間変化をもたなくなるため，磁界の計測が容易になるのは確実である．すなわち，ダイナミックレンジはより小さく，感度や分解能はより低く，その結果としてより安価な磁界計測システムの適用が可能になる．

具体的な方式は，まず 1998 年に笹田・森本により，立方体フレーム上に配置された 6 個の正方形コイルで生成される磁界のもつ空間分布の一様性および線形性を利用した磁気式モーションキャプチャの方式として提案された [51, 52] *3．またその直後の 2002 年には，江村・熊谷らにより，異なる配置ではあるが同じく 6 個の正方形コイルを用いる類似の方式 [54–56] が提案されている．本論文ではこれらの方式を，それぞれ**笹田・森本方式**，ならびに**江村・熊谷方式**と呼ぶことにする．

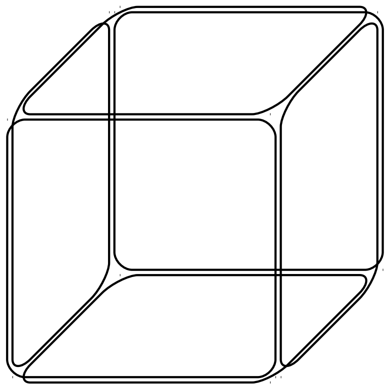
これらの方式におけるコイルの配置を模式図で Figure 1.1 に示す．

---

*3 1999 年 4 月に国内で特許が申請され，2009 年 4 月に登録された [53]．



(a) Sasada and Morimoto's [51, 52].



(b) Emura and Kumagai's [54].

Figure 1.1　Schematic views for arrangements of six square coils.

それぞれの方式で用いられる磁界分布，および姿勢および位置の推定の原理について，概要のみをつぎに記す．

笹田・森本方式

空間にある大きさの立方体フレームを想定し，一辺の長さを 2Λ とする．全体座標系の原点 O をその中央におき，また辺に平行になるように座標軸 X_1, X_2, X_3 を配置する．笹田・森本は，一辺の長さが立方体フレームと同じ正方形コイルを 3 個 1 組として，Figure 1.2 に示すように，ある 1 軸方向に沿って等間隔に配置し，それぞれに 1 : 0.62 : 1 の比率で同じ方向に電流を流すことにより，立方体の中央の広い範囲にほぼ一様な磁界が発生することを，計算と実測により示した．この一様磁界源を直交する X_1, X_3 軸に沿って配置し，時分割で X_1, X_3 方向の一様磁界 $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{U1}} = \check{H}_{0,1}\,\mathbf{e}_1$, $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{U3}} = \check{H}_{0,3}\,\mathbf{e}_3$ を発生させ，直交 3 軸磁界センサで計測する．これらの一様磁界は単に空間の方向を示すために用いられ，磁界の大きさ $\check{H}_{0,1}, \check{H}_{0,3}$ は本質的ではない．したがって，一様磁界 $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{U1}}, \check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{U3}}$ はそれぞれ標準基底ベクトル $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ と同一視することができる．

直交 3 軸磁界センサによる磁界ベクトルの計測値は，磁界センサのもつ局所座標系の直交する 3 軸に沿った成分に分解された，3 つの数値の組として出力される．一般に，局所座標系における標準基底ベクトル $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ と，全体座標系の標準基底ベクトル $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ とは，3×3 直交行列 t を用いてつぎの関係で結ばれている．この t がすなわち，磁界セ

ンサが全体座標系に対してもつ姿勢を表している．

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1'\\ \mathbf{e}_2'\\ \mathbf{e}_3'\end{bmatrix} = \mathsf{t}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{bmatrix}, \qquad \mathsf{t} = \begin{bmatrix}t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{bmatrix} = \mathsf{t}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1'\\ \mathbf{e}_2'\\ \mathbf{e}_3'\end{bmatrix}, \qquad \mathsf{t}^{-1} = \mathsf{t}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}t_{11} & t_{21} & t_{31}\\ t_{12} & t_{22} & t_{32}\\ t_{13} & t_{23} & t_{33}\end{bmatrix} \tag{1.2}$$

磁界センサの局所座標系で観測される $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ は，式 (1.2) の関係により，

$$\mathbf{e}_1 = t_{11}\mathbf{e}_1' + t_{21}\mathbf{e}_2' + t_{31}\mathbf{e}_3', \quad \mathbf{e}_3 = t_{13}\mathbf{e}_1' + t_{23}\mathbf{e}_2' + t_{33}\mathbf{e}_3' \tag{1.3}$$

であるから，センサの出力からはそれぞれ (t_{11}, t_{21}, t_{31}) および (t_{13}, t_{23}, t_{33}) が得られる．ここで X_2 方向の標準基底ベクトル $\mathbf{e}_2$ については，関係式

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1\\ &= (t_{23}t_{31} - t_{33}t_{21})\,\mathbf{e}_1' + (t_{33}t_{11} - t_{13}t_{31})\,\mathbf{e}_2' + (t_{13}t_{21} - t_{23}t_{11})\,\mathbf{e}_3'\end{aligned} \tag{1.4}$$

が成り立つから，$\mathbf{e}_2$ に対応する磁界を実際に測定することなく，

$$t_{12} = t_{23}t_{31} - t_{33}t_{21}, \quad t_{22} = t_{33}t_{11} - t_{13}t_{31}, \quad t_{32} = t_{13}t_{21} - t_{23}t_{11} \tag{1.5}$$

の関係を用いて t のすべての要素が決定される．このように，2 つの一様磁界を計測することにより，ただちに磁界センサの姿勢を推定することができる．

ここで，立方体の内部の点を座標 (X_1, X_2, X_3) [m] で表す．いま，X_3 軸に沿ったコイルのうち両端の 2 つに互いに逆方向に同じ大きさの電流を流すと，発生する磁界 $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{G3}}$ は，原点の周囲で近似的に

$$\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{G3}} \approx \gamma_1 X_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 X_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 X_3 \mathbf{e}_3 \tag{1.6}$$

の関係をみたす．ここで $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はコイルの寸法と電流に依存する定数で，あらかじめ計算あるいは実測により定められる．かれらは，立方体フレームの一辺の長さを $2\Lambda = 1\,\mathrm{m}$ とした装置を試作し，原点 O を中心とする $-0.2\,\mathrm{m} \le X_i \le 0.2\,\mathrm{m}$ $(i = 1, 2, 3)$ すなわち $|X_i| \le 0.4\Lambda$ $(i = 1, 2, 3)$ の立方体領域でこの近似が実際によく成り立ち，$\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{G3}}$ を線形勾配磁界として利用できることを示した．

点 (X_1, X_2, X_3) に姿勢 t で線形勾配磁界 $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{G3}}$ の中に置かれた磁界センサの出力を

$\left(H_1^G, H_2^G, H_3^G\right)$ で表せば

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} H_1^G & H_2^G & H_3^G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} &\approx \Big\{ \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \Big\} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \\ &= \Big\{ \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \Big\} \mathsf{t}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.7}$$

の関係が成り立つから，一様磁界の計測により得られた姿勢 t を用いて，座標 X_1, X_2, X_3 は

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \approx \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}, \frac{1}{\gamma_3} \right) \Big\{ \begin{bmatrix} H_1^G & H_2^G & H_3^G \end{bmatrix} \mathsf{t} \Big\} \tag{1.8}$$

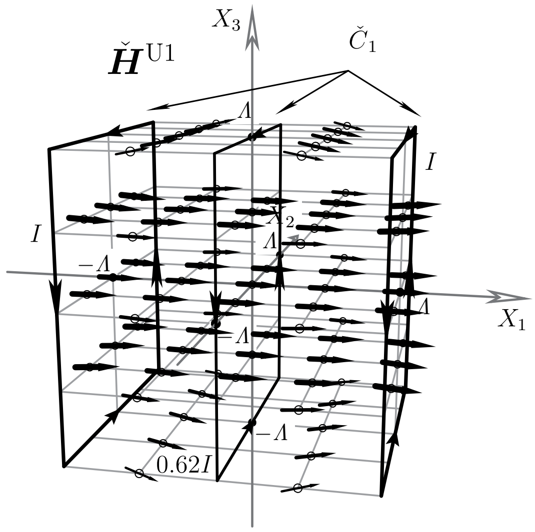
のように簡単な計算で推定することができる．

以上のように，笹田・森本方式では，2 つの一様磁界と 1 つの線形勾配磁界を参照磁界として直交 3 軸磁界センサで計測し，簡単な線形演算を実行することにより，磁界センサの姿勢，位置の順番で高速に推定することが原理的に可能である．かれらは単一周波数の交流磁界を時分割で切り替え，直交 3 軸コイルで検出する $2\Lambda = 1\,\mathrm{m}$ の試作装置において，磁界センサを 2 通りの位置および姿勢に設定し実測した結果から，立方体領域 $-0.2\,\mathrm{m} \le X_i \le 0.2\,\mathrm{m}$ $(i = 1, 2, 3)$ における 1 つの座標の推定誤差を $10\,\mathrm{mm}$ 以下程度と評価している [51].

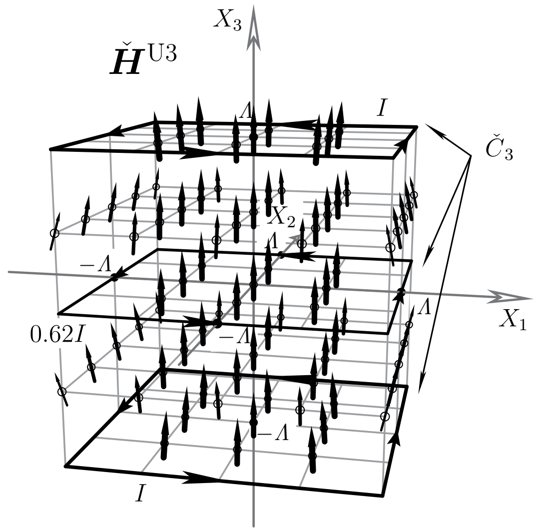
江村・熊谷方式

江村・熊谷方式では，一辺の長さが 2Λ の立方体フレームの 6 面のそれぞれに，四辺に沿って正方形コイルが 1 つずつ計 6 個配置されている．$X_i\,(i = 1, 2, 3)$ 軸に沿って垂直に対向する 2 個 1 組のコイルに，同じ方向に電流を流して発生する磁界を X_i 軸方向の協調磁界と呼ぶ．また，同じ 2 つのコイルに互いに逆方向に電流を流して発生する磁界を X_i 軸方向の差動磁界と呼ぶ．原点 O の付近では，X_i 軸方向の協調磁界は同じ X_i 軸方向の一様磁界に近く，X_i 軸方向の差動磁界の X_i 軸方向成分は X_i 座標にほぼ比例する．かれらはこの一様性および線形性が，$|X_i| \le 0.5\Lambda$ $(i = 1, 2, 3)$ の領域でおおむね成立するものとみなし，X_1, X_2, X_3 軸方向のそれぞれに協調磁界と差動磁界を発生させて，この 6 つの参照磁界を直交 3 軸磁界センサで計測することにより，磁界センサの姿勢および位置を推定する．

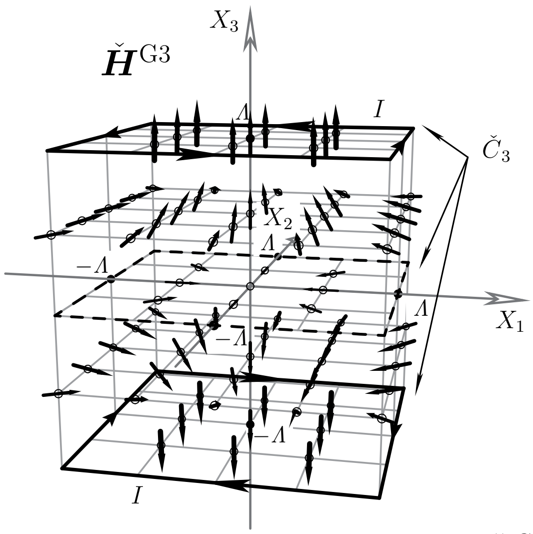
ここでの協調磁界が実際に一様とみなせる範囲は，笹田・森本方式で用いられた一様磁界より狭く，推定される姿勢および位置の精度は原点 O から離れるにしたがい低下



(a) The uniform magnetic field $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{U1}}$.



(b) The uniform magnetic field $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{U3}}$.



(c) The linear gradient magnetic field $\check{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{G3}}$.

Figure 1.2　The generated magnetic fields introduced by Sasada and Morimoto [51, 52].

する．そこで，磁界を位置から表の補間により計算できるようにしておき，姿勢と位置を反復して補正する方法により精度を確保している．かれらは交流磁界を周波数領域で多重化し，直交 3 軸コイルで検出する $2\Lambda = 0.5\,\mathrm{m}$ の試作装置について，立方体領域 $-0.25\,\mathrm{m} \le X_i \le 0.25\,\mathrm{m}$ $(i = 1, 2, 3)$ における 1 つの座標の推定誤差を $3\,\mathrm{mm}$ 以下と評価している [54].

熊谷らその後，一辺 $2\,\mathrm{m}$ の正方形コイルや，直方体フレームで長方形コイルを用いた計

測に成功している [55,56].

1.4　研究の目的および課題

磁気式モーションキャプチャは，位置と姿勢の実時間計測が可能で，死角がなく，低価格であるといった，光学式にない優れた特長をもっている．現状では実用化された磁気式システムの大半はダイポール磁界を用いているが，正方形コイル方式では磁界計測系の性能への要求がダイポール磁界ほど厳しくないため，磁気式の特長はそのままでさらに安価なシステムを実現できる可能性が高い．

正方形コイルを用いる方式として提案されている笹田・森本方式ならびに江村・熊谷方式のうち，本研究ではつぎのような，基本原理における笹田・森本方式の優位性に着目した．

江村・熊谷方式では直交 3 軸方向それぞれの協調磁界および差動磁界，すなわち計 6 つの参照磁界を計測する．協調磁界および差動磁界はそれぞれ機能の上では，笹田・森本方式の一様磁界および線形勾配磁界に対応している．しかし，一方の笹田・森本方式において計測される参照磁界は，2 つの一様磁界ならびに 1 つの線形勾配磁界の計 3 つだけと少ない．参照磁界の数が少なければ，それだけシステムの構成は簡単になる．

笹田・森本方式の原理の要点はつぎのようにまとめることができる．

(1) 座標軸に沿った 3 つの基底ベクトルが直交することから，2 軸方向の一様磁界だけを計測することにより，姿勢を推定できる．
(2) 1 軸に沿った線形勾配磁界の 3 軸成分が各軸方向の座標値に比例することから，姿勢がすでにわかっているならば，この 1 つの線形勾配磁界を計測することにより，位置を推定できる．

笹田・森本方式の問題点は正方形コイルの配置にある．すなわち，Figure 1.1 に示したように，立方体フレームの 6 面のすべてに，コイルの巻線が面の中央を断つように置かれており，これがフレームの内部にある計測領域への人体や物体の出入りを妨げ，利便性を大きく損なっている．

そこで本研究では，参照磁界の数が少ない笹田・森本方式の特長は維持しつつ，利便性を向上させるために中央に位置する 2 つの正方形コイルを取り除き，4 個の正方形コイルによる磁気式モーションキャプチャの原理を構築することを目的とした．

この目的を達成するため，本論文で提案する方式では，Figure 1.3 の模式図に示すように，正方形コイルを立方体フレームの 4 面を筒状に取り囲むように配置し，笹田・森本方

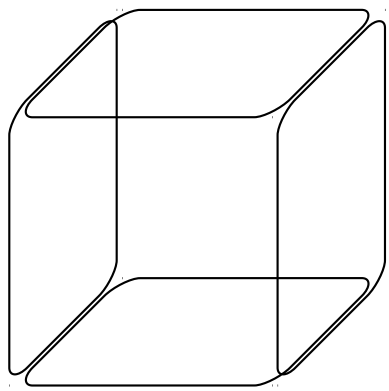


Figure 1.3　A schematic view for the arrangement of four square coils being proposed by the author.

式で用いられる 3 つの参照磁界と同様の方法で発生させた参照磁界を用いることを原理の基本とする．

この方式がもし実現できれば，立方体フレームの各面にコイル導体がなく利便性が確保されるのに加え，参照磁界を発生するためのコイルの数が 4 個に減り，笹田・森本方式よりシステムの構成をさらに簡素化することができる．したがって，低価格の磁界計測系を用いて，従来より簡単なシステム構成の安価なモーションキャプチャシステムの実現が可能になると考えられる．ただし，この方式が実用とされるためには，位置および姿勢を十分に短時間で推定しうるアルゴリズムが存在し，なおかつ従来の方式と同じ程度に広い計測領域を得られることが必要であろう．

コイルの数を減らしたことにより，笹田・森本方式のように，磁界の一様性や線形性を前提としたきわめて単純な方法で，姿勢，位置の順に推定することは不可能となる．しかし，座標系に依存しないスカラー，すなわち磁界ベクトルの大きさやスカラー積の値が位置の関数であることを利用して，磁界センサの局所座標系における磁界ベクトルの測定値からそれらのスカラーの値を評価し，磁界センサの位置を逆算する方法が，従来よりすでに用いられている [40, 42, 45, 46]．したがって，提案方式についても同様にして位置の推定方法を構築することは可能であると考えられる．あとは，位置を推定するアルゴリズムの複雑化とそれによる低速化の不利益をいかに小さくおさえるかが，提案方式の実用性を決定づける鍵となる．

1.5　本論文の構成

本論文の構成はつぎのとおりである．

第 1 章では序論として，まず，モーションキャプチャ技術の現状と応用領域や用途を概説し，用途ごとに要求される特性の違いを述べた．また，モーションキャプチャの諸方式のうち，光学式，機械式および磁気式について，それぞれの方式の原理および特徴を述べた．つぎに，磁気式モーションキャプチャについて，まず，現在もっともよく用いられている磁気ダイポール方式の概要を述べたのち，本研究の対象である正方形コイル方式について，その背景および，すでに提案されている笹田・森本方式ならびに江村・熊谷方式の原理，特徴および問題点について述べた．以上の内容をふまえて，最後に本研究の目的および解決すべき課題を明確にした．

第 2 章では，本論文で提案する，4 個の正方形コイルおよび直交 3 軸磁界センサを用いた磁気式モーションキャプチャの原理を述べ，磁界センサの位置を推定する問題を，座標系に依存しないスカラーを用いて非線形方程式系および逆関数により定式化する．

第 3 章では，非線形方程式系による定式化について，磁界の測定誤差の存在を考慮して非線形最小二乗問題として解釈し，その代表的な数値解法であるガウス–ニュートン法を用いて位置を推定するアルゴリズムを構築し，位置の推定が可能であることを示す．

第 4 章では，位置の推定をさらに高速におこなうため，逆関数による定式化について，テイラー多項式とベクトル ϵ アルゴリズムの組み合わせによる，陰的な反復を含まないアルゴリズムを構築し，高速かつ安定に位置の推定が可能であることを示す．

第 5 章では，まず，実際のシステムの設計・製作において生じる形状・寸法の原理からのずれについて，位置の推定値への影響を軽減する簡易かつ有効な補正の方法を示す．つぎに，3 軸ホールセンサを用いたシステムを実際に試作し，第 4 章で示したアルゴリズムによる位置の推定を実験で確認するとともに，形状・寸法のずれの補正についても実際に適用し，その有効性を示す．

第 6 章では結論として，本研究により得られた結果をまとめて記す．

第 2 章

位置計測の基本原理

2.1 はじめに

1.3.2 項に述べた笹田・森本方式では，まず磁界センサの姿勢を推定し，つぎに位置を推定している．立方体の面の中央を横切る 2 つのコイルは，広い範囲で磁界の一様性を確保し，位置が未知の状態で姿勢の推定を可能にするためのものであった．かりにこれらの 2 つのコイルを取り除くとすれば，磁界の一様性は損なわれ，同じ方法で姿勢を推定できるのは，立方体の中心付近のごく狭い領域に限られる．

ダイポール磁界方式ではすでに，磁界ベクトルを用いて定義された複数のスカラーを用いて，姿勢が未知の状態で位置を推定する方法 [40,42,45,46] が提示されている．この方法は，スカラーの値が座標系に依存せず，磁界センサの姿勢に無関係に評価できることを利用したもので，その原理の応用はダイポール磁界方式のみに限定されない．

本章では，2 組の正方形コイル対による参照磁界の計測により得られるスカラーから位置を推定するための基本原理を述べる．

原理の大枠はつぎのとおりである．立方体の面に沿って配置された 4 個の正方形コイルを用いて発生させる 2 つの準一様磁界と 1 つの勾配磁界を参照磁界として定義する．これらの参照磁界を時分割で順次発生させ，直交 3 軸磁界センサを用いて磁界ベクトルを測定する．これらの磁界ベクトルを用いて 3 つ以上のスカラーを定義し，それらの値から位置を逆算する問題を定式化する．

定式化された問題から実際に位置を推定するための具体的な方法については，あとの第 3 章および第 4 章で述べる．

2.2　正方形コイル対による参照磁界

3 次元ユークリッド空間における計測空間の全体座標系として，右手系の直交座標系 (X_1, X_2, X_3) を考える．原点を中心とする一辺の長さ $2\varLambda$ の立方体領域 $\varOmega = \{(X_1, X_2, X_3) \mid |X_i| \leq \varLambda \ (i = 1, 2, 3)\}$ の向かい合う 2 つの端面 $X_3 = \pm\varLambda$ に沿って，同じ形状と巻数をもつ一対の正方形コイル C_3 を Figure 2.1 に示すように配置する．コイルの一辺の長さは $2\varLambda$ で，コイルどうしの間隔も同じ $2\varLambda$ である．コイルの巻数は N 回とする．

C_3 の 2 つのコイルに同じ方向，同じ大きさの電流 I を，Figure 2.1(a) に示すように流し，このとき発生する磁界のベクトル場を $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}$ で表す．$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}$ は $\varOmega$ の内部でおおむね X_3 軸方向に大きな成分をもつが，原点では X_3 軸方向に大きさ

$$H_0 = \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\,\frac{NI}{\varLambda} \tag{2.1}$$

をもつ磁界である．

全体座標系の 3 つの標準基底ベクトルで構成された正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を用いて，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}$ を成分 $\{H_1^{\mathrm{U3}}, H_2^{\mathrm{U3}}, H_3^{\mathrm{U3}}\}$ で，

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}} = H_1^{\mathrm{U3}}\,\mathbf{e}_1 + H_2^{\mathrm{U3}}\,\mathbf{e}_2 + H_3^{\mathrm{U3}}\,\mathbf{e}_3 \tag{2.2}$$

のように表すとき，それぞれの成分の，原点における X_1, X_2, X_3 についてのテイラー展開を 2 次の項までで示すと，

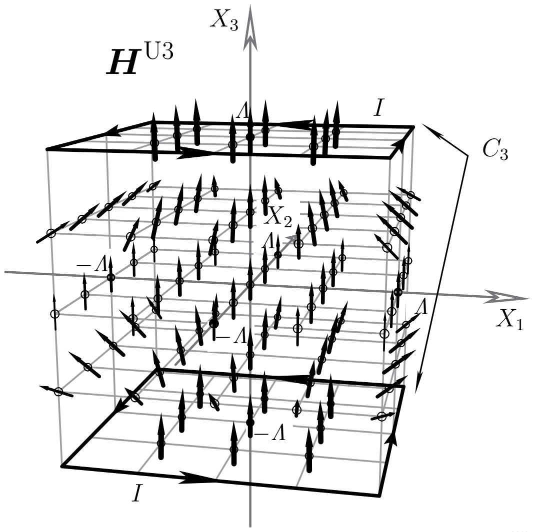
$$\left.\begin{aligned}
H_1^{\mathrm{U3}} &= H_0\left(-\frac{5}{6\varLambda^2}X_3X_1 + \cdots\right)\\
H_2^{\mathrm{U3}} &= H_0\left(-\frac{5}{6\varLambda^2}X_2X_3 + \cdots\right)\\
H_3^{\mathrm{U3}} &= H_0\left(1 - \frac{5}{12\varLambda^2}X_1^2 - \frac{5}{12\varLambda^2}X_2^2 + \frac{5}{6\varLambda^2}X_3^2 + \cdots\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

となる．

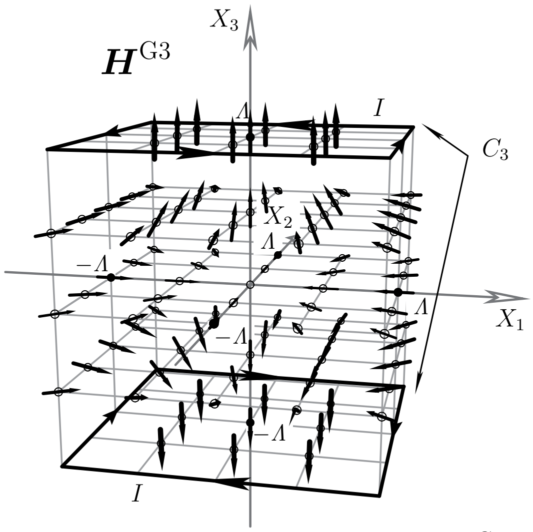
式 (2.2)，(2.3) より $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}$ は原点付近では近似的に，

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}} \approx H_0\,\mathbf{e}_3 \tag{2.4}$$

で表される，X_3 軸方向に一様な磁界となる．これを本論文では**準一様磁界**と呼ぶことにする．



(a) The quasi-uniform magnetic field $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}$.



(b) The gradient magnetic field $\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$.

Figure 2.1　The reference magnetic fields generated by a square coil pair C_3.

つぎに，C_3 の 2 つのコイルに，Figure 2.1(b) のように電流 I を互いに逆方向に流して得られる磁界 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ を，成分 $\{H_1^{\mathrm{G3}}, H_2^{\mathrm{G3}}, H_3^{\mathrm{G3}}\}$ で

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}} = H_1^{\mathrm{G3}}\,\mathbf{e}_1 + H_2^{\mathrm{G3}}\,\mathbf{e}_2 + H_3^{\mathrm{G3}}\,\mathbf{e}_3 \tag{2.5}$$

と表すとき，それぞれの成分を原点で X_1, X_2, X_3 についてテイラー展開し 3 次の項まで

で示すと，

$$\left.\begin{aligned} H_1^{\mathrm{G3}} &= -\frac{2}{3\Lambda}\,H_0X_1\,\left(1+\frac{5}{72\Lambda^2}X_1^2-\frac{5}{12\Lambda^2}X_2^2+\frac{5}{24\Lambda^2}X_3^2+\cdots\right)\\ H_2^{\mathrm{G3}} &= -\frac{2}{3\Lambda}\,H_0X_2\,\left(1-\frac{5}{12\Lambda^2}X_1^2+\frac{5}{72\Lambda^2}X_2^2+\frac{5}{24\Lambda^2}X_3^2+\cdots\right)\\ H_3^{\mathrm{G3}} &= \frac{4}{3\Lambda}\,H_0X_3\,\left(1-\frac{5}{48\Lambda^2}X_1^2-\frac{5}{48\Lambda^2}X_2^2+\frac{5}{72\Lambda^2}X_3^2+\cdots\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

となる．式 (2.5)，(2.6) より $\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ は原点付近では近似的に，

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}} \approx -\frac{2}{3}H_0\left(\frac{X_1}{\Lambda}\,\mathbf{e}_1+\frac{X_2}{\Lambda}\,\mathbf{e}_2-2\frac{X_3}{\Lambda}\,\mathbf{e}_3\right) \tag{2.7}$$

と表され，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ の成分ごとに $H_i^{\mathrm{G3}} \propto X_i$ の関係が成り立つ線形勾配磁界となっている．これを本論文では**勾配磁界**[*1]と呼ぶことにする．

本方式ではさらに，Ω の端面 $X_1 = \pm\Lambda$ にも正方形コイル対 C_1 を置き，Figure 2.2 に示すように，X_1 方向の準一様磁界 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}$ を発生させる．$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}$ は $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}$ を X_2 軸のまわりに 90° 回転させた磁界で，成分を用いて，

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}} = H_1^{\mathrm{U1}}\,\mathbf{e}_1 + H_2^{\mathrm{U1}}\,\mathbf{e}_2 + H_3^{\mathrm{U1}}\,\mathbf{e}_3 \tag{2.8}$$

と表すとき，それぞれの成分の原点におけるテイラー展開を 3 次の項まででで示すと，

$$H_1^{\mathrm{U1}} = H_0\left(1+\frac{5}{6\Lambda^2}X_1^2-\frac{5}{12\Lambda^2}X_2^2-\frac{5}{12\Lambda^2}X_3^2+\cdots\right) \tag{2.9}$$

$$H_2^{\mathrm{U1}} = H_0\left(-\frac{5}{6\Lambda^2}X_1X_2+\cdots\right) \tag{2.10}$$

$$H_3^{\mathrm{U1}} = H_0\left(-\frac{5}{6\Lambda^2}X_3X_1+\cdots\right) \tag{2.11}$$

となり，原点付近では近似的に

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}} \approx H_0\,\mathbf{e}_1 \tag{2.12}$$

と表される．

[*1] 1.3.2 項で述べた笹田・森本方式の「線形勾配磁界」とまったく同じものであるが，本論文の方式は計測領域全体での線形性を前提とするものではないため，誤解をさけるために「線形」をはずした．

2.3　位置関数の定義

記述を簡単にし見通しをよくするため，長さと磁界の大きさについて無次元化をおこなう．長さについては $\mathit{\Lambda}$ を基準量として，無次元化された座標 (x_1, x_2, x_3) を

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{X_1}{\mathit{\Lambda}}, \frac{X_2}{\mathit{\Lambda}}, \frac{X_3}{\mathit{\Lambda}}\right) \tag{2.13}$$

で定義する．直交座標系 (x_1, x_2, x_3) において，立方体領域 $\mathit{\Omega}$ は，$\mathit{\Omega} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |X_i| \leq 1 \ (i = 1, 2, 3)\}$ で表される．磁界の大きさは H_0 を基準量として，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ を無次元化したベクトル場を，

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} = \frac{\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}}{H_0}, \quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} = \frac{\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}}{H_0}, \quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} = \frac{\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}}{H_0} \tag{2.14}$$

で定義する．原点付近で成り立つ式 (2.4)，(2.7)，(2.12) を無次元ベクトルについて表すと

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} \approx \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \approx \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} \approx -\frac{2}{3}\,(x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 - 2x_3\,\mathbf{e}_3) \tag{2.15}$$

となる．

式 (2.3) および式 (2.6) を無次元化することにより，ベクトル $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ は全体座標系の無次元座標 x_1, x_2, x_3 の関数となる．ただし，成分表示

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} = h_1^{\mathrm{U3}}\,\mathbf{e}_1 + h_2^{\mathrm{U3}}\,\mathbf{e}_2 + h_3^{\mathrm{U3}}\,\mathbf{e}_3 \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} = h_1^{\mathrm{G3}}\,\mathbf{e}_1 + h_2^{\mathrm{G3}}\,\mathbf{e}_2 + h_3^{\mathrm{G3}}\,\mathbf{e}_3 \tag{2.17}$$

における各成分の大きさは正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ の選び方に依存している．

全体座標系において，位置 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ に置かれた直交 3 軸磁界センサで，ベクトル $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ を観測することを考える．直交 3 軸磁界センサに付随する右手系の局所座標系について，その標準基底を $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ で表す．$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ を局所座標系における成分で

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} = h_1^{\mathrm{U3}\prime}\,\mathbf{e}'_1 + h_2^{\mathrm{U3}\prime}\,\mathbf{e}'_2 + h_3^{\mathrm{U3}\prime}\,\mathbf{e}'_3 \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} = h_1^{\mathrm{G3}\prime}\,\mathbf{e}'_1 + h_2^{\mathrm{G3}\prime}\,\mathbf{e}'_2 + h_3^{\mathrm{G3}\prime}\,\mathbf{e}'_3 \tag{2.19}$$

と表すとき，磁界センサはそれぞれに対応して $\left(h_1^{\mathrm{U3}\prime}, h_2^{\mathrm{U3}\prime}, h_3^{\mathrm{U3}\prime}\right), \left(h_1^{\mathrm{G3}\prime}, h_2^{\mathrm{G3}\prime}, h_3^{\mathrm{G3}\prime}\right)$ を出力する．$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ は直交 3 軸磁界センサの姿勢を表現しており，したがって計測対象の未知量として取り扱われる．

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のスカラー積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は，ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|$ と，2 つのベクトルがなす角 θ を用いて，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos\theta \tag{2.20}$$

で定義される．この $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|$ および θ はスカラーで座標系には依存せず，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ もまたスカラーである [57, p. 26–28].

式 (2.17) および (2.19) より，スカラー積 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ は，式 (2.17) により，全体座標系の成分を用いて

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} = h_1^{\mathrm{U3}} h_1^{\mathrm{G3}} + h_2^{\mathrm{U3}} h_2^{\mathrm{G3}} + h_3^{\mathrm{U3}} h_3^{\mathrm{G3}} \tag{2.21}$$

で表され，また (2.19) により，局所座標系の成分を用いて

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} = h_1^{\mathrm{U3}\prime} h_1^{\mathrm{G3}\prime} + h_2^{\mathrm{U3}\prime} h_2^{\mathrm{G3}\prime} + h_3^{\mathrm{U3}\prime} h_3^{\mathrm{G3}\prime} \tag{2.22}$$

で表される．

$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ は原点付近で，式 (2.15) により

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} \approx \frac{4}{3}\,x_3 \tag{2.23}$$

のように x_3 に比例する．$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ は式 (2.22) により，直交 3 軸磁界センサの姿勢に関係なく，センサの出力を用いて計算することができる．そこで，スカラー p_3 を

$$p_3 = \frac{3}{4}\,\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} \tag{2.24}$$

で定義すれば，原点付近では $p_3 \approx x_3$ が成り立つ．同様に，$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ は原点付近で，

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} \approx -\frac{2}{3}\,x_1 \tag{2.25}$$

となるから，スカラー p_1 を，原点付近で $p_1 \approx x_1$ となるように，

$$p_1 = -\frac{3}{2}\,\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} \tag{2.26}$$

で定義する．

ここで，ベクトル積 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}$ に注目すれば，原点付近で

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} \approx \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \tag{2.27}$$

と表され，x_2 軸方向の一様磁界に近いベクトル場となる．実際，$H_0\,(\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}})$ は，Figure 2.3 に示すように，Ω の内部で X_2 軸方向の準一様磁界に似た分布をもつ．$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}$ と $\boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ とのスカラー積は，原点付近で

$$(\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}) \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} \approx -\frac{2}{3}\,x_2 \tag{2.28}$$

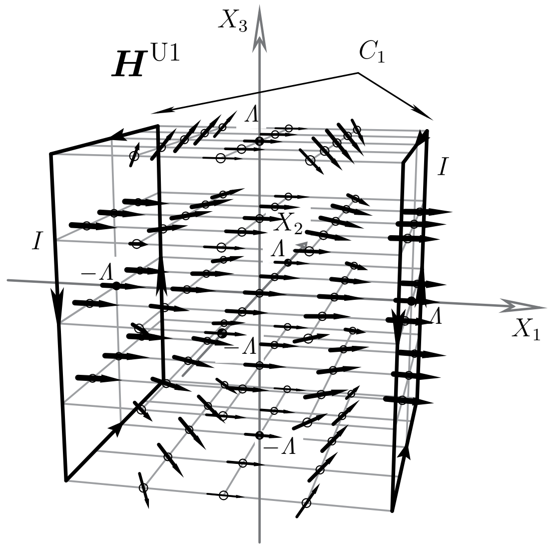


Figure 2.2　The quasi-uniform magnetic field $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}$ generated by a square coil pair C_1.

となるから，スカラー p_2 を，原点付近で $p_2 \approx x_2$ となるように，

$$p_2 = -\frac{3}{2}\,(\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}) \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} \tag{2.29}$$

で定義する．

本論文では p_1, p_2, p_3 のような，位置のみの関数となるスカラーを**位置関数**と呼ぶことにする．ここであらためて p_1, p_2, p_3 の，原点におけるテイラー展開を 3 次の項まで示すと

$$p_1 = x_1 \left(1 + \frac{65}{72}x_1^2 - \frac{5}{3}x_2^2 + \frac{35}{24}x_3^2 + \dots\right) \tag{2.30}$$

$$p_2 = x_2 \left(1 + \frac{5}{6}x_1^2 - \frac{55}{72}x_2^2 - \frac{25}{24}x_3^2 + \dots\right) \tag{2.31}$$

$$p_3 = x_3 \left(1 - \frac{5}{48}x_1^2 - \frac{5}{48}x_2^2 + \frac{65}{72}x_3^2 + \dots\right) \tag{2.32}$$

となり，位置関数 p_1, p_2, p_3 は座標 x_1, x_2, x_3 についての非線形な関数である．

2.4　位置推定問題の定式化

式 (2.26)，(2.29)，(2.24) により定義された位置関数 p_1, p_2, p_3 は座標系によらないスカラーである．したがって，局所座標系で直交 3 軸磁界センサにより観測された参照磁界

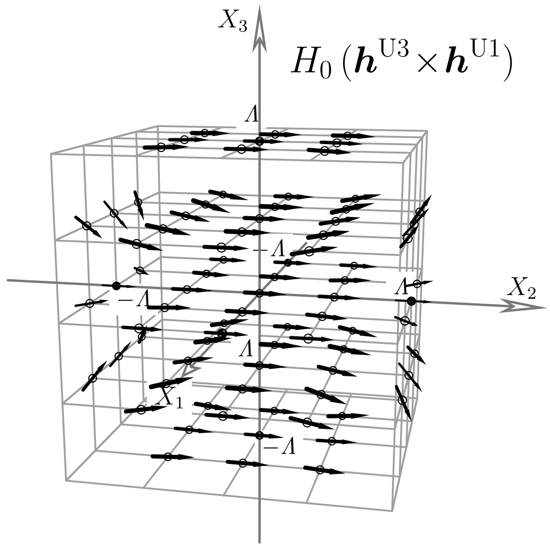


Figure 2.3　The vector field $H_0\,(\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}\times\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}})$ simulating a quasi-uniform magnetic field along the X_2-axis.

ベクトル $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ の成分を用いて，位置関数の値を評価することができる．いま，ある計測領域 Ω_0 において，位置 $\boldsymbol{x} \in \Omega_0$ とそれに対応する位置関数の組 (p_1, p_2, p_3) との関係が一対一対応であるならば，つぎのような流れで位置 $\boldsymbol{x}$ を一意に決定することが理論的には可能である．

(1) 準一様磁界 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}$ および勾配磁界 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ を時分割で順次発生させ，直交 3 軸磁界センサによりベクトル $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ を測定する．ただし，測定のあいだ，センサの位置および姿勢は一定とみなせるものとする．
(2) $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ の実測値を式 (2.26),(2.29),(2.24) の右辺に代入し，位置関数 p_1, p_2, p_3 を計算する．
(3) p_1, p_2, p_3 から何らかの方法で $\boldsymbol{x}$ を逆算する．

位置関数の組 (p_1, p_2, p_3) をまとめてベクトル $\boldsymbol{p} = \big(p_1, p_2, p_3\big)$ で表す．また $\boldsymbol{p}$ が位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の関数であることを明示するときには，ベクトル値関数として $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \big(p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), p_3(\boldsymbol{x})\big)$ のように表す．磁界センサで測定された $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ から計算される $\boldsymbol{p}$ は，いわば位置関数の測定値であり，これを $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ で表すとき，非線形方程式系

$$\boldsymbol{p}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{\boldsymbol{p}} \tag{2.33}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega_0$ を，センサの位置 $\boldsymbol{x}$ の推定値とすることができる．

あるいはつぎのように表現することもできる．計測領域で $\boldsymbol{x} \in \Omega_0$ について定義された非線形の位置関数 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ の逆関数を $\boldsymbol{q}\big(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\big)$ で表す．このとき，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}\big(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\big), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega_0 \tag{2.34}$$

の関係が成り立つので，$\boldsymbol{x}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}$ は，$\hat{\boldsymbol{p}}$ に対応する逆関数の値として，$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{p}})$ と表すことができる．

なお，位置が推定されれば，その位置における参照磁界の全体座標系における成分が計算できるため，局所座標系における成分との対応関係を用いて，姿勢を推定することができる．この一般的な関係にもとづいて構成されたさまざまな解法 [45,58] が利用できるため，本論文では姿勢の推定方法についてこれ以上は取り扱わない．

2.5　まとめ

本章では，4 個の正方形コイルを用いた位置測定の原理，および位置推定問題の定式化について，概要を述べた．

本方式について，つぎのように原理を構築し，問題を定式化した．参照磁界として，2 つの準一様磁界と 1 つの勾配磁界を定義した．座標系によらず位置のみにより値の決まる位置関数を，参照磁界ベクトルどうしのスカラー積を用いて定義した．参照磁界をそれぞれ時分割で発生させ，磁界センサで測定された磁界ベクトルから計算される位置関数の値によりセンサの位置を推定する問題を，第 1 の定式化として，センサの位置を未知数とする非線形方程式系により，また第 2 の定式化として，位置を非線形の位置関数の逆関数ととらえることにより表現した．

笹田・森本方式では姿勢，位置の順序で簡単な線形演算により推定することができたが，本方式では 2 個の正方形コイルを取り除いたことにより，利便性の向上が見込まれる一方で，位置の推定の枠組みは非線形の問題へと複雑化した．

実際のシステムを構築するさいには，直交 3 軸磁界センサより出力される，誤差を含む測定値に対して，安定に位置の推定ができるよう，適切な計測領域の設定および推定アルゴリズムの構築をおこなう必要がある．本章で示した定式化にもとづき，位置を推定するための具体的な方法については，非線形方程式系を第 3 章で，位置関数の逆関数を第 4 章で取り扱う．

第 3 章

ガウス–ニュートン法による位置推定

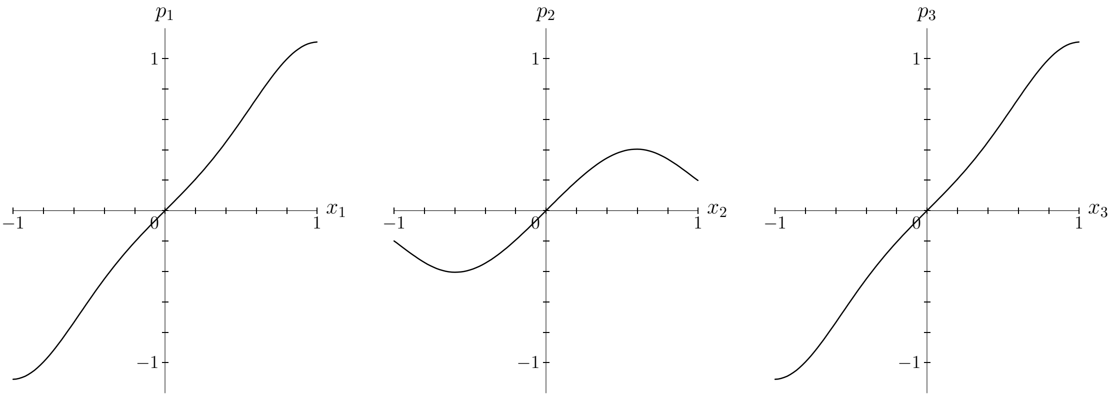
3.1 はじめに

本章では，2.4 節で示した，位置の推定問題の非線形方程式系による定式化について，解法を提示する．磁界の測定における誤差の発生を考慮して，非線形方程式系を最小二乗問題と解釈し，その数値解をガウス–ニュートン法を用いて計算することにより，位置の推定をおこなう．

3.2 非線形最小二乗問題

磁界センサが立方体領域 Ω の内部のある位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に，任意の姿勢で置かれているとする．局所座標系で観測した参照磁界ベクトル $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ の実測値から，位置関数ベクトル $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = (p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), p_3(\boldsymbol{x}))$ の値を式 (2.26)，(2.29)，(2.24) により計算する．これを位置関数ベクトルの実測値とみなして $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ で表すとき，位置 $\boldsymbol{x}$ は非線形方程式系 (2.33) の解である．$\hat{p}$ が誤差を含まなければ，$\hat{p}$ は Ω_{M} を定義域とする $\boldsymbol{x}$ の関数 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ の値域に含まれるはずである．すなわち，方程式系 (2.33) の解は必ず存在し，ニュートン–ラプソン法などの数値解法を用いて，$\boldsymbol{x}$ の数値解を求めることができる．

位置を正しく推定するためには，非線形方程式系の解をつねに一意に決定できるよう，$\boldsymbol{x} \in \Omega_{\mathrm{M}} \subseteq \Omega$ なる計測領域 Ω_{M} を適切に設定しなければならない．かりに計測領域を立方体フレームの内部全体，すなわち $\Omega_{\mathrm{M}} = \Omega$ とした場合，x_1, x_2, x_3 軸上でそれぞれ



(a)　p_1 on the x_1-axis　(b)　p_2 on the x_2-axis　(c)　p_3 on the x_3-axis

Figure 3.1　Values of the positional functions along each axis.

p_1, p_2, p_3 は Figure 3.1 のような値をとる．x_1 と p_1，および x_3 と p_3 の関係は，いずれも単調増加関数である．一方，x_2 軸上における p_2 は単調ではなく，$x_2 = \pm 0.6$ 付近に極値点をもっている．x_2 軸上で p_1 および p_3 はつねに 0 であるため，x_2 軸上では 1 つの極値点をはさむ 2 つの点で，同じ値 $\boldsymbol{p} = (0, p_2, 0)$ をとる場合が生じる．このとき解の一意性は失われ，$\hat{p}$ から $\boldsymbol{x}$ を一意には推定することができない．

計測領域 Ω_M が適切に設定されていても，磁界を観測するときに測定誤差が生ずるため，$\hat{\boldsymbol{p}}$ は誤差を含んでいる．誤差の混入した $\hat{\boldsymbol{p}}$ がもし $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ の値域に含まれなければ，方程式系 (2.33) を満足する解は 1 つも存在しない．そのような場合でも，方程式系を最小二乗問題としてとらえ，数値解法を用いて方程式系を近似的に満足する最小二乗解を得ることは可能である．最小二乗問題の数値解法としては，方法の単純さと実装の容易さによりしばしばガウス–ニュートン法が選択肢される [59, p. 97] [60, p. 95–96] [61]．

方程式系 (2.33) の数値解を求める計算手順をつぎに示す．説明を一般化するため，位置関数は n 個あると仮定する．ただし，求める未知数が x_1, x_2, x_3 の 3 個であるから，$n \geq 3$ であることが必要である．ここではつぎのように，位置 $\boldsymbol{x}$ を 3×1 行列 x で，位置関数ベクトルの真値 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ および測定値 $\hat{\boldsymbol{p}}$ を $n \times 1$ 行列 $\mathsf{p}(\mathsf{x})$ および $\hat{\mathsf{p}}$ で表すことにする．

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{p}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} p_1(\mathsf{x}) \\ p_2(\mathsf{x}) \\ \vdots \\ p_n(\mathsf{x}) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathsf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_n \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

方程式系 (2.33) の残差ベクトルを $n \times 1$ 行列 $\mathsf{r}(\mathsf{x}) = [r_1(\mathsf{x})\ \ r_2(\mathsf{x})\ \ \ldots\ \ r_n(\mathsf{x})]^{\mathsf{t}}$ で表し，

$$\mathsf{r}(\mathsf{x}) = \mathsf{p}(\mathsf{x}) - \hat{\mathsf{p}} \tag{3.2}$$

で定義すれば，解かれるべき方程式は $\mathsf{r}(\mathsf{x}) = \mathsf{0}$ となる．

通常の非線形方程式系に対するニュートン–ラプソン法では，適当な初期解 x_0 から出発して，

$$\mathsf{x}_{k+1} = \mathsf{x}_k + \mathsf{d}_k \tag{3.3}$$

により近似解を更新し，収束解を得る．ここに，d_k は線形方程式系

$$\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)\,\mathsf{d}_k = -\mathsf{r}(\mathsf{x}_k) \tag{3.4}$$

の解で，$\mathsf{j}(\mathsf{x})$ は $\mathsf{r}(\mathsf{x})$ のヤコビ行列で，

$$\mathsf{j}(\mathsf{x}) = \nabla\,\mathsf{r}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_n}{\partial x_1} & \frac{\partial r_n}{\partial x_2} & \frac{\partial r_n}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

である．

残差 2 乗和 $\left\|\mathsf{r}(\mathsf{x})\right\|^2 = \mathsf{r}(\mathsf{x})^{\mathsf{t}}\,\mathsf{r}(\mathsf{x})$ を最小化するガウス–ニュートン法では，d_k を式 (3.4) の最小二乗解にとり，

$$\mathsf{x}_{k+1} = \mathsf{x}_k + \alpha_k \mathsf{d}_k \tag{3.6}$$

により解を更新する [60, p. 95–96]．すなわち d_k は，式 (3.4) の両辺に $\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)^{\mathsf{t}}$ をかけた正規方程式

$$\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)^{\mathsf{t}}\,\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)\,\mathsf{d}_k = -\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)^{\mathsf{t}}\,\mathsf{r}(\mathsf{x}_k) \tag{3.7}$$

の解である．式 (3.6) において α_k は，ステップ幅を調整するための正の係数で，調整しない場合には $\alpha_k = 1$ とする．α_k の調整には通常，直線探索が用いられ，反復ごとに $\left\|\mathsf{r}(\mathsf{x})\right\|^2$ が確実に減少するように値が決められる．

位置関数の個数 n にかかわらず，$\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)$ の階数が 3 であれば，そのときに限り $\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)^{\mathsf{t}}\,\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)$ の逆行列は存在し，式 (3.7) はただ 1 つの解をもつ [62, p. 126]．反復の過程で，$\mathsf{j}(\mathsf{x}_k)$ に数値的な階数の低減が生じると，式 (3.7) の計算は数値的に不安定となり破綻する．その場合，位置関数の個数 n を増やし，方程式系 (2.33) にあらたな方程式を追加すれば，階数の低減はある程度抑制されると考えられる．その具体例については 3.3 節で述べる．

3.3　位置推定のシミュレーション

ここで，ガウス–ニュートン法による位置推定のアルゴリズムについて，計算機シミュレーションにより有効性を確認する．具体的には，磁界センサを立方体領域 Ω の内部の適当な位置 $\boldsymbol{x}$ に置いたと仮定して，磁界ベクトルの観測を計算機上で模擬的に再現し，Ω の中心を初期解とするガウス–ニュートン法により推定された位置 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が，真の位置 $\boldsymbol{x}$ に一致するかどうかを試験する．

実際の計測システムにおける誤差の要因として，まず磁界を測定で必ず生じる測定誤差があげられる．また場合によっては，計算時間の短縮のために精度を犠牲にして，簡略化された近似式などを用いることなども考えられる．しかし，ひとまずここでは，シミュレーションの目的を原理の有効性の確認のみに絞るために，計測および計算の過程でできるだけ誤差の生じない状況を想定し，つぎのように仮定した．

(1) 磁界ベクトルの観測において，測定誤差は生じない．
(2) 磁界センサの姿勢を表す局所座標系は全体座標系に平行である．すなわち $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ である．

これにしたがい，位置関数の実測値 $\hat{\boldsymbol{p}}$ としては，全体座標系における磁界ベクトルの成分から計算した $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ をそのまま用いた．また，ガウス–ニュートン法の反復計算に必要な，磁界ベクトルや位置関数，およびヤコビ行列は計算精度を重視して，磁気ベクトルポテンシャルの厳密な解析式に自動微分 [63] を適用し，すべて倍精度で計算した*1.

適当な位置 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に置かれた磁界センサを想定し，アルゴリズムにしたがって，$\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0)$ としてガウス–ニュートン法で反復計算を実行した．直線探索によるステップ幅の調整はおこなわず，$\alpha_k = 1$ とした．ただし，できるだけ多くの場合に適切な収束解が得られるよう，反復解 $\boldsymbol{x}_k$ が Ω の外部に出る場合には例外として，Ω の表面で止まるように α_k を調節し，つねに $\boldsymbol{x}_k \in \Omega$ が成り立つようにした．すべての座標 x_1, x_2, x_3 の修正量が 10^{-4} を下回った時点で収束とみなし，また，反復回数には上限を設け，30 回で収束しなければそこで打ち切った．

解が収束し，かつ許容誤差の範囲内で真の位置に一致した場合には，位置の推定が成功したと判定した．ここで許容誤差は，座標 x_1, x_2, x_3 の真の値からのずれがすべて 10^{-4}

*1 自動微分では，関数値の解析的な計算手順が実行される過程で，導関数の計算手順が自動的に生成され計算がおこなわれる．差分近似による数値微分とは異なり，その計算過程に近似は含まれていない．

以下とした．反復回数の上限までで解が収束しなかった場合や，真の位置とは異なる解に収束した場合のほかに，ヤコビ行列が数値的に特異とみなされり，演算の過程でオーバーフローが発生するなどして，計算が続行できなくなった場合はすべて，推定に失敗したと判定した．

Figure 3.2 は，式 (2.26),(2.29),(2.24) により定義された位置関数 $p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), p_3(\boldsymbol{x})$ を用いた場合について，$x_3 = 0.2k$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$ のそれぞれの平面上で，ランダムに発生した 2000 個の位置について，アルゴリズムにしたがって推定する計算機シミュレーションを実行した結果を示している．対称性を考慮して，計算は $x_1, x_2 \geq 0$ の 1/4 領域のみで実行した．

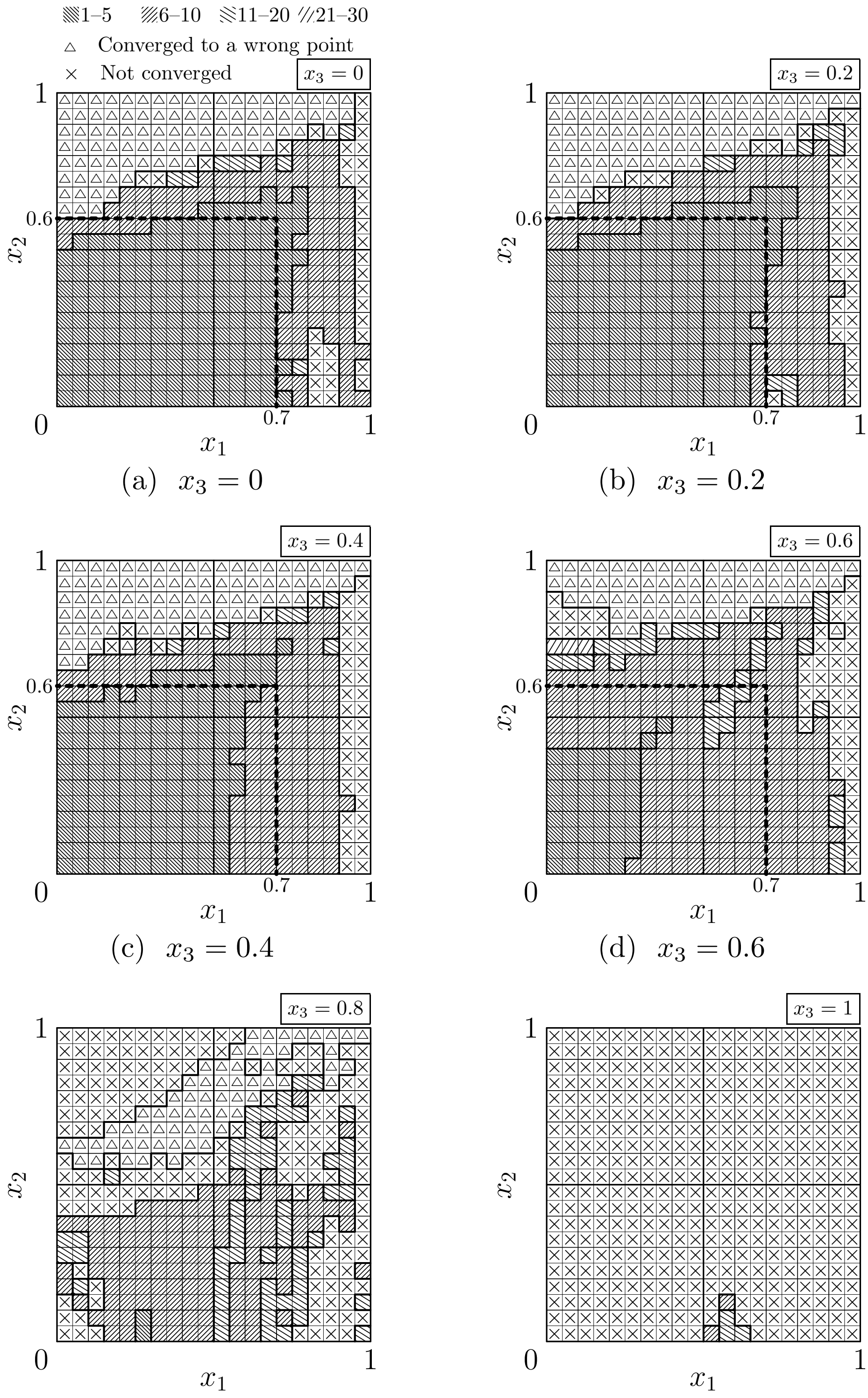
図では，領域を一辺の長さが 0.05 の正方形のブロックに区切り，ある 1 つのブロックに含まれるすべての計算点において，許容誤差の範囲内で真の位置に収束した場合には，そのブロックにハッチング模様を記してある．ハッチングの濃淡は，収束に要した反復回数の最大値に対応しており，濃いブロックほど少ない反復回数で推定できたことを示している．また，真の位置とは異なる解に収束した点を含むブロックには三角 (△) を記し，その他の，収束に失敗した点を含むブロックにはバツ (×) を記した．

真の位置への収束に成功している領域の大部分は，反復 10 回以内で収束している．その一方で，反復回数が 20 回を超えて 30 回までに収束解が得られる領域はわずかである．バツ (×) の領域では，ヤコビ行列が特異に近いか，あるいは位置関数の強い非線形性のために，収束が悪化していると考えられるが，この領域ではさらに反復回数を増やしたとしても，容易に収束解が得られるとは考えにくい．

3.2 節では x_2 軸上の例を示したが，このように真の位置と同じ位置関数の値をもつ別の位置が存在すると，位置を一意に決定することができない．このような場合，ガウス–ニュートン法の収束解は初期解 $\boldsymbol{x}_0$ に依存することになるため，三角 (△) で示されるような，真の位置とは異なる解に収束する領域を生ずる．x_2 軸上における p_2 の非単調性を反映して，x_2 軸付近で収束解が真の位置に一致したのは $|x_2| \leq 0.6$ の領域においてのみである．

位置が正しく推定された領域の形状は複雑であるが，実用的な計測領域 Ω は，単純な形状でかつ，ひとつながりの領域とすべきである．ここではおおまかに，反復 20 回以内で位置の推定が可能な，原点を中心とする直方体領域を，実用上計測可能な領域とみなすことにする．これにしたがえば，Figure 3.2 に破線で示したように，おおよそ $|x_1| \leq 0.7, |x_2| \leq 0.6, |x_3| \leq 0.6$ の直方体領域で位置の推定が可能である．

つぎに，位置関数の個数を増やしたときに，計測可能な領域が広がるかどうかを検証し



(a) $x_3 = 0$ (b) $x_3 = 0.2$ (c) $x_3 = 0.4$ (d) $x_3 = 0.6$ (e) $x_3 = 0.8$ (f) $x_3 = 1$

Figure 3.2 The region in which the position can be determined by the algorithm from the *three* scalar functions p_1, p_2, p_3.

た．ここでは，あらたなスカラー p_4, p_5, p_6 を

$$p_4 = \left|\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}\right|^2 = \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} \tag{3.8}$$

$$p_5 = \left|\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}\right|^2 = \left(\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}\right) \cdot \left(\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \times \boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}\right) \tag{3.9}$$

$$p_6 = \left|\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}\right|^2 = \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \cdot \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} \tag{3.10}$$

で定義し，これらを位置関数として追加する．これらの原点におけるテイラー展開を 2 次の項まで示すと

$$p_4 = 1 + \frac{5}{3}x_1^2 - \frac{5}{6}x_2^2 - \frac{5}{6}x_3^2 + \ldots \tag{3.11}$$

$$p_5 = 1 + \frac{5}{6}x_1^2 - \frac{5}{3}x_2^2 + \frac{5}{6}x_3^2 + \ldots \tag{3.12}$$

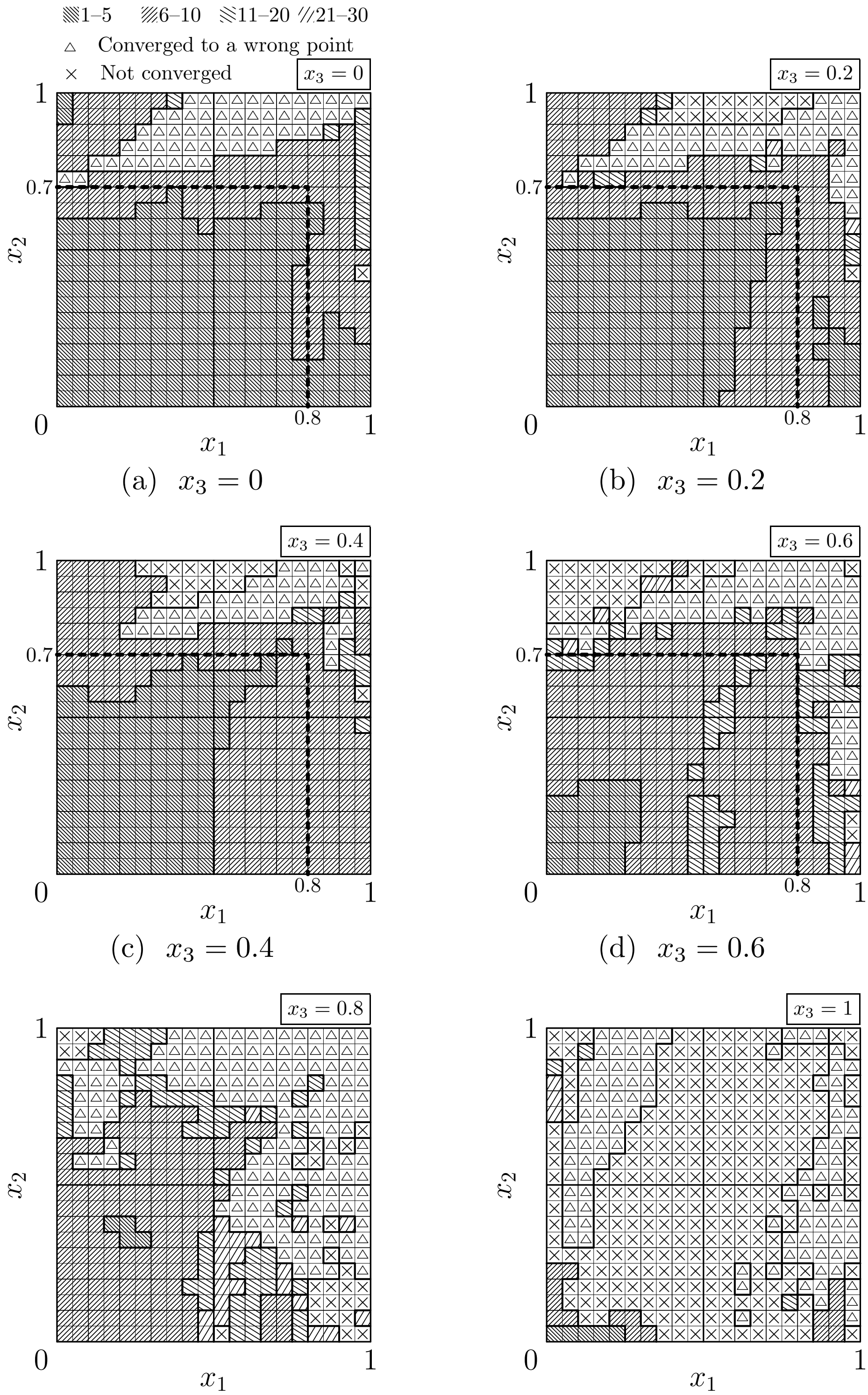
$$p_6 = 1 - \frac{5}{6}x_1^2 - \frac{5}{6}x_2^2 + \frac{5}{3}x_3^2 + \ldots \tag{3.13}$$

となる．6 つの位置関数 $p_1(\boldsymbol{x}), \ldots, p_6(\boldsymbol{x})$ を用いて同様のシミュレーションを実行した結果を Figure 3.3 に示す．Figure 3.2 において三角 (△) およびバツ (×) の記された領域は，Figure 3.3 ではいずれも縮小しており，より広い領域で位置の一意性が確保され，あるいはまた，ヤコビ行列の階数の低下が抑制されたと考えられる．計測可能な領域は，Figure 3.3 に破線で示したように，おおよそ $|x_1| \leq 0.8, |x_2| \leq 0.7, |x_3| \leq 0.6$ と見積もられる．すなわち，3 つの位置関数 p_4, p_5, p_6 を追加したことにより，計測領域は x_1, x_2 方向に広げられている．

3.4　磁界の測定誤差の影響の評価

ガウス–ニュートン法における収束時の反復計算の打ち切りにより，推定された位置には大きさの不確かな誤差が生ずるが，磁界の測定値に含まれる誤差が原因となって，位置の誤差はさらに大きくなる．

ここでは，モンテカルロ法による計算機シミュレーションで位置の推定誤差を見積もった．具体的には，ある位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ における磁界ベクトル $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ の計算値の x_1, x_2, x_3 成分それぞれに対してすべて独立に，測定誤差を模擬する平均値 0，標準偏差 0.01 の正規乱数を加えたのちに，位置 $\boldsymbol{x}$ を推定し，その推定値を $\tilde{\boldsymbol{x}}^+$ で表す．同一の位置における 2000 回の試行について，真の位置 $\boldsymbol{x}$ からの距離 $|\tilde{\boldsymbol{x}}^+ - \boldsymbol{x}|$ の二乗平均平方根 (RMS) を計算し，その位置における推定誤差の見積もりとした．



(a) $x_3 = 0$　(b) $x_3 = 0.2$　(c) $x_3 = 0.4$　(d) $x_3 = 0.6$　(e) $x_3 = 0.8$　(f) $x_3 = 1$

Figure 3.3　The region in which the position can be determined by the algorithm from the *six* positional functions $p_1, \ldots, p_6$.

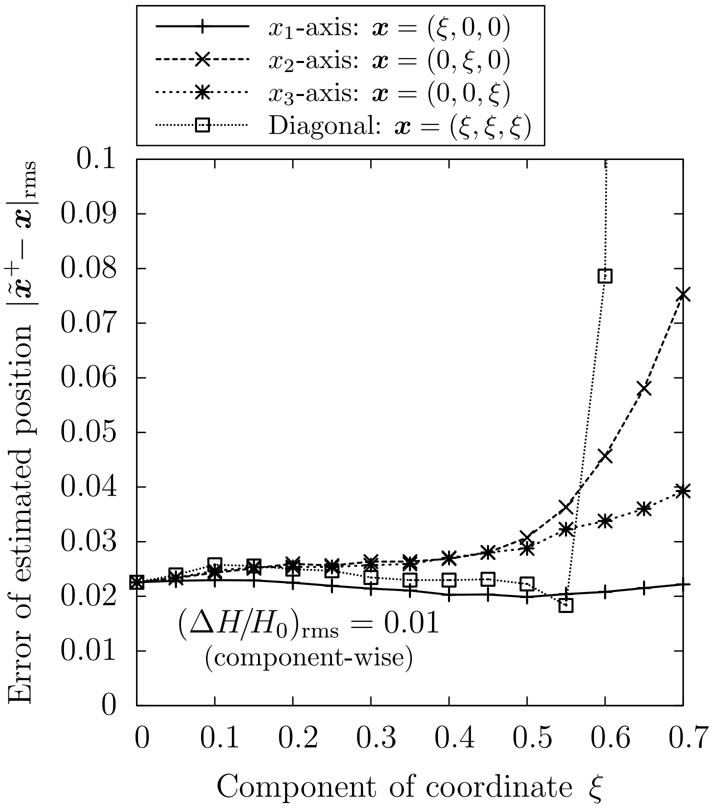


Figure 3.4　Errors of estimated positions caused by measurement errors of the magnetic fields when using the Gauss–Newton method with the six positional functions $p_1, \ldots, p_6$.

6 つの位置関数 $p_1, p_2, \ldots, p_6$ を用いた場合について，x_1, x_2, x_3 軸上および Ω の対角線上の位置に $\boldsymbol{x}$ をとり，シミュレーションを実行した結果を Figure 3.4 に示す．$\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leq 0.5$ の領域におけるばらつきは，およそ 0.02 から 0.03 までの間で大きな変動はなく，$\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = 0.6$ の領域でも，ばらつきは最大で原点の 4 倍程度に収まっている．

1.3.2 項で触れたように，笹田・森本のシステム [51] では $\Lambda = 0.5\,\mathrm{m}$ で，計測領域は $|X_i| \leq 0.2\,\mathrm{m}$ $(i = 1, 2, 3)$，実測により見積もられた位置の推定誤差は，1 つの座標について 10 mm 以下程度であった．これを本節での評価方法に換算すると，$\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leq 0.4$ の領域で誤差はおよそ 0.02 となる．したがって，本方法において，磁界ベクトルの成分の測定誤差を $0.01H_0$ 程度に抑えることができれば，$\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leq 0.5$ の領域で笹田・森本のシステムとほぼ同じ程度の精度が実現できると考えられる．

3.5 まとめ

本章では，2.4 節において非線形方程式系により定式化された位置の推定問題を，磁界の測定誤差の影響を考慮して最小二乗問題として解釈し，ガウス–ニュートン法を用いた数値計算により位置を推定するアルゴリズムを提示した．また，有効性を確認するために計算機シミュレーションをおこない，つぎのことを明らかにした．

磁界の計測誤差がないときには，3 つの位置関数を用いて，立方体フレームの中心部に，一辺の長さが立方体フレームの少なくとも 0.6 倍の立方体領域を含む計測領域を確保でき，位置関数の数を 6 つに増やすと，さらに広い計測領域が得られた．

磁界の測定誤差の影響を考慮した場合，6 つの位置関数を用いて，立方体フレームの一辺の長さを 0.6 倍した立方体領域において，安定に位置の推定が可能であった．

本アルゴリズムにより，笹田・森本方式に比べて広い計測領域が得られたが，位置の推定に必要な計算量は大幅に増えた．実用的なモーションキャプチャシステムを実現するためには，この計算量を大幅に削減しなければならない．

第 4 章

ベクトル ϵ アルゴリズムによる高速位置推定

4.1 はじめに

正方形コイルにより発生される磁界の正確な計算は，ダイポール磁界の場合に比べると複雑で計算量が多い．ニュートン法系統の陰的な反復解法では，反復ごとに関数値と偏導関数値の計算を必要とし，これらの計算量が大きい問題への適用は計算時間の点で不利となり，高速化が難しく実用的ではない．

正方形コイルを用いる方式では，計測領域はコイルに囲まれた領域の内部に限定されている．人体の計測に用いるとすれば，歩行運動のような移動量の大きい動きよりはむしろ，たとえば手指や顎のこまやかな動きのような，局所的な運動の計測に適している．したがって，計測領域の中心付近の限られた領域で原理的に高い確度をもつような位置および姿勢の推定方法を構築することは，方式の特長を生かすことにもつながる．

本章では，計測領域の原点における線形性を厳密に保ちながら，逆関数のテイラー展開で高次の補正項を追加することにより，広い領域で線形化する手法を検討する．すなわち，位置の座標を位置関数の逆関数ととらえて計測領域の原点でテイラー展開し，位置座標を位置関数で陽に表されたテイラー多項式により近似する．しかし，これだけでは収束半径の存在により十分な収束領域が確保できないため，さらに，ベクトル ϵ アルゴリズム [64] を適用することにより収束領域を拡大する．これらの手法を用いて広い領域で安定に位置を推定できることを，計算機シミュレーションの結果により示す．

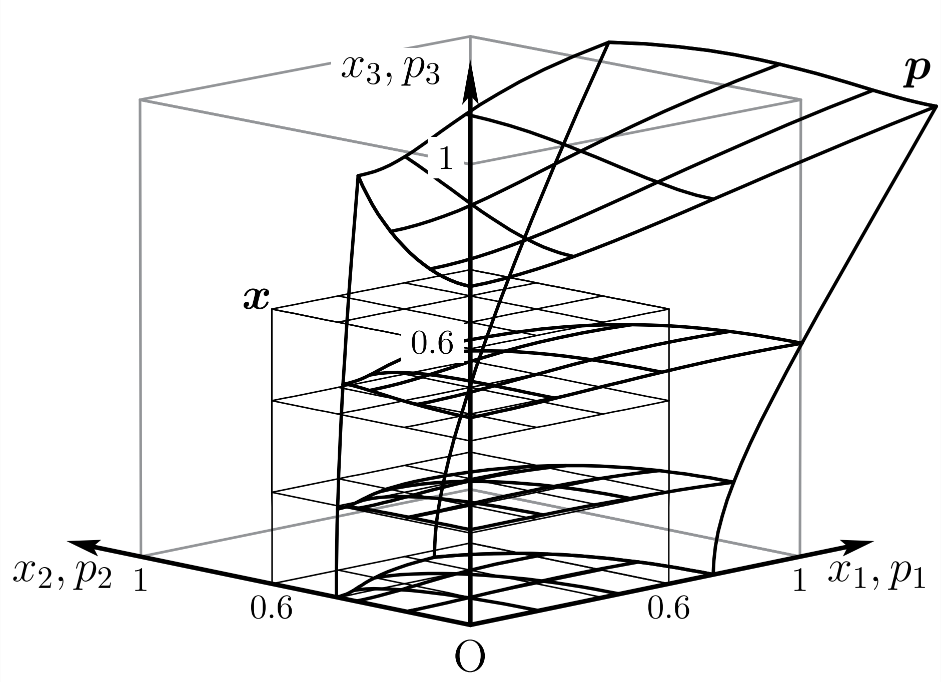


Figure 4.1　A profile of the mappings from $\boldsymbol{x}$ to the positional function $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$.

4.2　逆関数のテイラー展開

$0 \leq x_\nu \leq 0.6$ $(\nu = 1, 2, 3)$ の立方体領域が，位置関数 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ により写像されるようすを Figure 4.1 に示す．$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ による写像はこのように強いゆがみをもち，またその逆関数 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$ で陽に表されないため，適切な定義域を設定して補間法や直交関数展開を適用するのは容易ではないと考えられる．

座標 x_1, x_2, x_3 を p_1, p_2, p_3 で陽に表された近似式で計算するため，ここではテイラー展開の適用を検討する．テイラー展開に必要なのは展開点における関数値および高階の偏導関数値のみであり，関数の大域的なふるまいを直接には知る必要はない．ただし $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p})$ の関数形は不明であるため，その展開係数は，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ のテイラー展開を用いて，つぎのような方法で計算する[*1]．

参照磁界の対称性により，$p_\nu = p_\nu(\boldsymbol{x})$ $(\nu = 1, 2, 3)$ は x_ν の奇関数で，かつ x_μ $(\mu = 1, 2, 3,\ \mu \neq \nu)$ の偶関数である．これより，$x_\nu = q_\nu(\boldsymbol{p})$ は p_ν の奇関数でかつ p_μ $(\mu \neq \nu)$ の

[*1] 本研究では数式処理ソフトウエア Maxima を用い，付録 A に収録したプログラムを使用して計算した．

偶関数となる．ゆえに関数 $q_1(\boldsymbol{p}), q_2(\boldsymbol{p}), q_3(\boldsymbol{p})$ を全体座標系の原点においてテイラー展開すると，i, j, k を非負の整数として，

$$q_\nu(\boldsymbol{p}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(p_\nu \sum_{i+j+k=l} c_{i,j,k}^{(\nu)} \, {p_1}^{2i} {p_2}^{2j} {p_3}^{2k} \right) \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{4.1}$$

の形に表される．係数 $c_{i,j,k}^{(\nu)}$ は，テイラー展開定理の逆 [65, p. 93] を利用して計算することができる．すなわち，$p_\nu = p_\nu(\boldsymbol{x})$ $(\nu = 1, 2, 3)$ を x_1, x_2, x_3 について原点で n 次までテイラー展開し，それらを式 (4.1) に代入して n 次の項までで打ち切った式が，x_ν に一致するように係数 $c_{i,j,k}^{(\nu)}$ を定める．2.3 節の定義により，位置関数 p_1, p_2, p_3 は，原点近傍でテイラー展開の最低次の項により

$$p_1 \approx x_1,\ p_2 \approx x_2,\ p_3 \approx x_3 \tag{4.2}$$

と近似され，座標 x_1, x_2, x_3 と同一視することができるから，まず $c_{0,0,0}^{(\nu)} = 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$ となる．$n/2$ 以下の最大の整数を l で表すと，$c_{i,j,k}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ の総数は $(l+1)(l+2)(l+3)/2$ 個となる．こうして得られる，$q_1(\boldsymbol{p}), q_2(\boldsymbol{p}), q_3(\boldsymbol{p})$ を近似するテイラー多項式は，p_1, p_2, p_3 のなめらかな連続関数であり，p_1, p_2, p_3 が誤差を含むときにも，座標の推定値は真値の近傍にとどまると考えられる．

補間法や直交関数展開では一般に，定義域の設定や標本点の配置が近似精度に大きな影響を与えるため，それらを適切に決定するためには，定義域の全体について近似誤差のふるまいを見ながら試行錯誤をくりかえす必要がある．テイラー展開では，あらかじめ十分に高い次数まで展開係数を計算しておけば，打ち切り次数を変えても計算をやりなおす必要はなく，また大きな近似誤差は展開点から離れたところで生じるため，次数の決定は比較的容易である．ただし，テイラー展開の係数は数値計算には不向きであり，数式処理ソフトウエアを用いた無限精度の計算には長い時間を要することがある．

座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ における $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ の真値から，テイラー多項式を用いて計算された座標を $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ で表すとき，5 次のテイラー多項式を用いた位置推定における $\boldsymbol{x}$ と $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の関係を Figure 4.2 に示す．Figure 4.1 と比較すると，テイラー展開の性質を反映して，展開の中心である原点の近くでゆがみは小さいが，原点からある程度離れると急激に発散し，ゆがみは非常に大きくなっている．

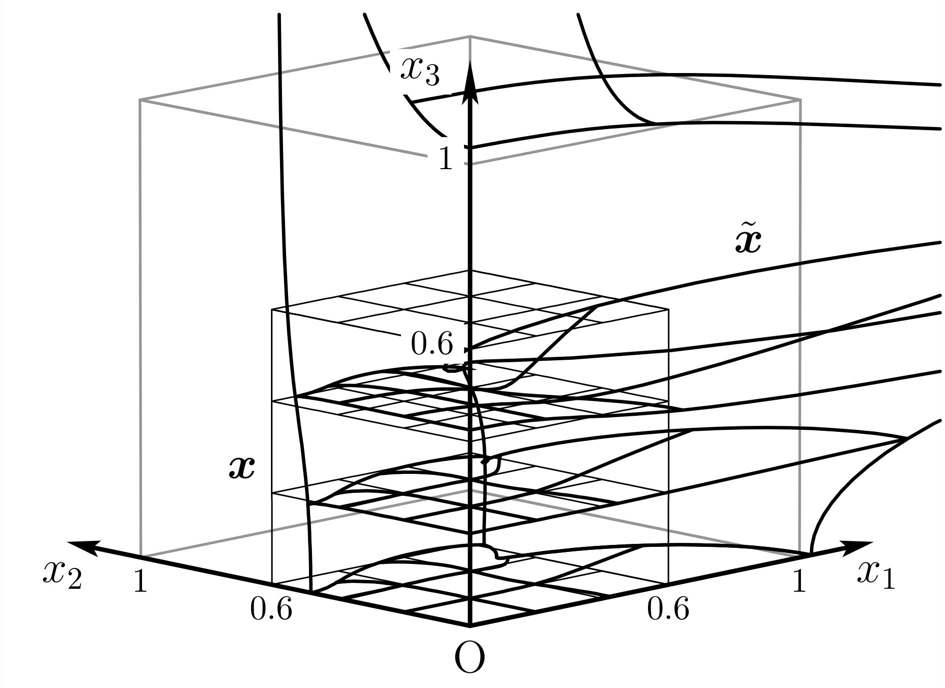


Figure 4.2　A profile of the mapping of a cubic space by the 5th degree Taylor polynomials which approximate the inverse function $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p})$.

4.3　有界な位置関数の定義

ベクトル $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ はコイルの近傍で発散するため，Figure 4.1 にも表れているように，コイルに近づくと位置関数 p_1, p_2, p_3 の絶対値が非常に大きくなることがある．そのため，広い収束領域を得るには，式 (4.1) で表されるテイラー展開が p_1, p_2, p_3 に対して大きな収束半径をもつ必要がある．

そこで，あらたにベクトル $\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U1}}, \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U3}}, \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{G3}}$ を

$$\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U1}} = \frac{\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}}{|\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}|}, \quad \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U3}} = \frac{\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}}{|\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}|}, \quad \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{G3}} = \frac{\boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}}{\sqrt{1+|\boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}|^2}} \tag{4.3}$$

のように定義する．このとき，$|\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}| < \infty, |\boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}| < \infty, |\boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}| < \infty$ に対して $|\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U1}}| = 1, |\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U3}}| = 1, |\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{G3}}| < 1$ となる．これらの有界なベクトルを用いて，有界な位置関数 $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ を式 (2.26)，(2.29)，(2.24) にならい

$$\bar{p}_1 = -\frac{3}{2}\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U1}} \cdot \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{G3}}, \quad \bar{p}_2 = -\frac{3}{2}(\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U3}} \times \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U1}}) \cdot \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{G3}}, \quad \bar{p}_3 = \frac{3}{4}\bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{U3}} \cdot \bar{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{G3}} \tag{4.4}$$

で定義する．これらの原点におけるテイラー展開は

$$\bar{p}_1 = x_1\left(1 - \frac{11}{72}x_1^2 - \frac{53}{36}x_2^2 + \frac{71}{72}x_3^2 + \dots\right) \tag{4.5}$$

$$\bar{p}_2 = x_2\left(1 + \frac{7}{36}x_1^2 - \frac{11}{72}x_2^2 - \frac{169}{72}x_3^2 + \dots\right) \tag{4.6}$$

$$\bar{p}_3 = x_3\left(1 + \frac{13}{144}x_1^2 + \frac{13}{144}x_2^2 - \frac{59}{72}x_3^2 + \dots\right) \tag{4.7}$$

となり，p_1, p_2, p_3 についてと同様に，原点付近では $\bar{p}_1 \approx x_1, \bar{p}_2 \approx x_2, \bar{p}_3 \approx x_3$ の関係が成り立っている．

$\boldsymbol{x}$ と $\bar{\boldsymbol{p}} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ の関係を Figure 4.3 に示す．また，4.2 節における $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3)$ を $\bar{\boldsymbol{p}}=(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ に置き換え，位置を与える逆関数を $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{q}}(\bar{\boldsymbol{p}})$ で表すとき，$\bar{\boldsymbol{q}}(\bar{\boldsymbol{p}})$ を近似する 5 次のテイラー多項式について，位置推定における $\boldsymbol{x}$ と $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の関係を Figure 4.4(a) に示す．Figure 4.2 と比較すると，有界な位置関数を用いることにより，ゆがみが小さくなり収束性が改善されている．さらに次数を上げた 17 次のテイラー多項式では，正負の係数が交代級数的に現れ，高次の項ほど絶対値の大きな係数が多くなる．そのため，Figure 4.4(b) に示すように，原点の周辺ではゆがみは非常に小さくなるものの，収束半径の存在により原点から離れると発散的になり，ゆがみがむしろ大きくなる領域が現れる．このように，テイラー多項式の次数の増加は，必ずしも推定誤差の減少にはつながらない．

4.4　ベクトル ϵ アルゴリズムの適用

テイラー多項式の収束性を改善し，また収束領域を広げるために，**ベクトル ϵ アルゴリズム**の適用を検討する．

以下ではとくに必要な場合を除き，位置関数を $\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}$ といった定義の違いにより区別せず，まとめて単に記号 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ で表すことにし，またこの定義に依存するほかの記号についても同様とする．

式 (4.1) はつぎのように整理することができる*2．

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}) = \sum_{l=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_l(\boldsymbol{p}) \tag{4.8}$$

*2 本節で用いられる $\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{S}$ などイタリック体の大文字については，本論文の表記法の例外として，物理的次元を考えないものとする．

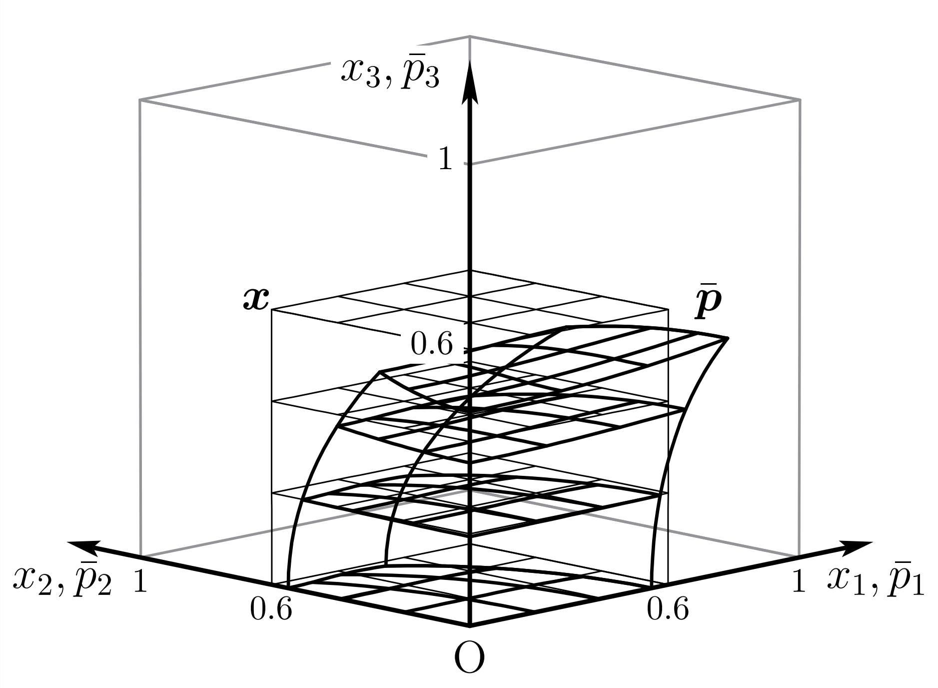


Figure 4.3　A profile of the mappings from $\boldsymbol{x}$ to the bounded positional function $\bar{\boldsymbol{p}} = \bar{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$.

ここに,

$$\boldsymbol{\Pi}_l(\boldsymbol{p}) = \left(\Pi_l^{(1)}(\boldsymbol{p}), \Pi_l^{(2)}(\boldsymbol{p}), \Pi_l^{(3)}(\boldsymbol{p}) \right) \tag{4.9}$$

$$\Pi_l^{(\nu)}(\boldsymbol{p}) = p_\nu \sum_{i+j+k=l} c_{i,j,k}^{(\nu)} {p_1}^{2i} {p_2}^{2j} {p_3}^{2k} \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{4.10}$$

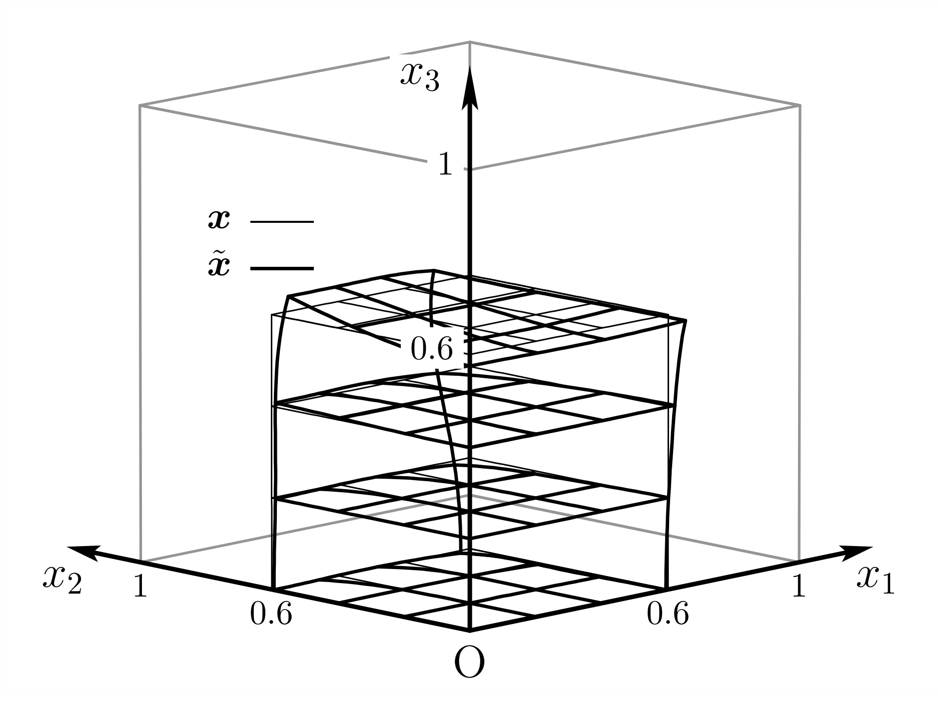
で, $\boldsymbol{\Pi}_l(\boldsymbol{p})$ の各成分は $2l+1$ 次の斉次多項式である.

つぎに, 式 (4.8) の右辺の, $0 \leq l \leq m$ における有限和を $\boldsymbol{S}_m$ で表し,

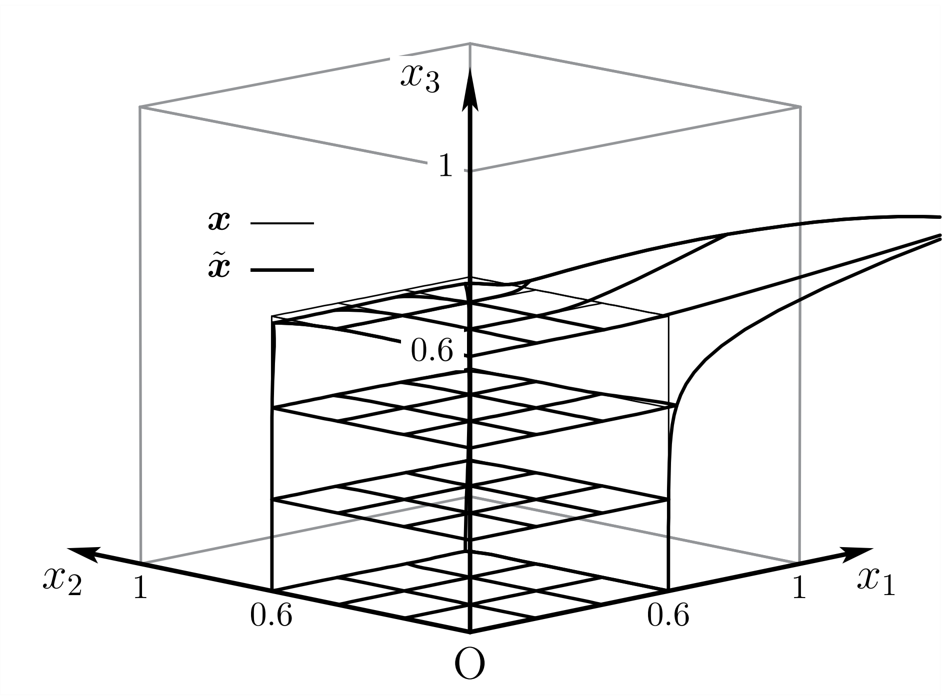
$$\boldsymbol{S}_m = \sum_{l=0}^{m} \boldsymbol{\Pi}_l(\boldsymbol{p}) \tag{4.11}$$

とする. $\boldsymbol{S}_m$ の各成分は $2m+1$ 次のテイラー多項式となる. 式 (4.8) において右辺をベクトル列 $\{\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \ldots\}$ の極限値と解釈すれば,

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}) = \lim_{m \to \infty} \boldsymbol{S}_m \tag{4.12}$$



(a) The 5th degree polynomials.



(b) The 17th degree polynomials.

Figure 4.4　A profile of the mapping of a cubic space by the Taylor polynomials which approximate the inverse function $\bar{\boldsymbol{q}}(\bar{\boldsymbol{p}})$.

と表される．

ϵ アルゴリズム [66] は，数列の収束を加速する手法としてよく知られているが，この種の加速をテイラー展開の発散する領域で適用するとき，しばしば解析接続によるのと同じような収束値[*3]が得られる [68, p. 1–5]．ベクトル ϵ アルゴリズム [64]（以下 VEA と記す）は，ϵ アルゴリズムをベクトル列に適用しうるように拡張したものである．

VEA の計算手順は，つぎのように簡単な漸化式で表される [64] [69, p. 466–467]．

$$\boldsymbol{\epsilon}_0^{(m)} = \boldsymbol{S}_m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{-1}^{(m)} = \boldsymbol{0}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \tag{4.14}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{k+1}^{(m)} = \boldsymbol{\epsilon}_{k-1}^{(m+1)} + \left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{(m+1)} - \boldsymbol{\epsilon}_k^{(m)}\right)^{-1} \tag{4.15}$$

ここで，式 (4.15) に現れる実ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の逆ベクトル $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ は，

$$\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2} \tag{4.16}$$

と定義されている．VEA により得られる偶数番目のベクトル列 $\{\boldsymbol{\epsilon}_{2k}^{(m)}\}_{m=0,1,\dots}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ は，k が大きいほど速く収束する．

適当な整数 K を定め，式 (4.8) の展開を $2K + 1$ 次の項までで打ち切ったテイラー多項式より，ベクトル列 $\{\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \dots \boldsymbol{S}_K\}$ が得られる．これに VEA を適用して得られる収束値の近似値は，$K/2$ 以下の最大の整数を K' として，$\boldsymbol{\epsilon}_{2K'}^{K-2K'}$ である．ただし，有限精度の数値計算では，VEA はしばしばこの $\boldsymbol{\epsilon}_{2K'}^{K-2K'}$ より前の段階で数値的に収束し，式 (4.15) の計算においてゼロ除算などの問題が生ずる．そのときには，正常に計算された最後の偶数番目のベクトル列の最後の項 $\boldsymbol{\epsilon}_{2K''}^{K-2K''}$（$K''$ は整数，$K'' < K'$）を収束値の近似値とすることができる．このようにして，テイラー多項式に VEA を適用すれば，わずかな計算量の追加により，より広い領域で収束値が得られると予想される．

Figure 4.4(b) で示した 17 次のテイラー多項式による位置推定に VEA を適用すると，Figure 4.5 に示すように位置の推定精度が向上し，また発散領域でも収束値が得られている．このように，収束のよくない高次のテイラー多項式でも，VEA と組み合わせることにより，位置の推定に有効に利用することができる．

ここでは有界な位置関数 $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ を用いた場合について，テイラー展開の係数 $c_{i,j,k}^{(\nu)}$ を，数式処理ソフトウエアにより無限精度で 33 次まであらかじめ算出しておき，与えられた $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ に対する 33 次のテイラー多項式の値を倍精度演算により数値計算した．こ

[*3] このような，発散級数を加速して得られる収束値のことを，Daniel Shanks は “anti-limit" と呼んだ．日本語では長田 [67] が直訳して「反極限」と書いたが，定着していない．

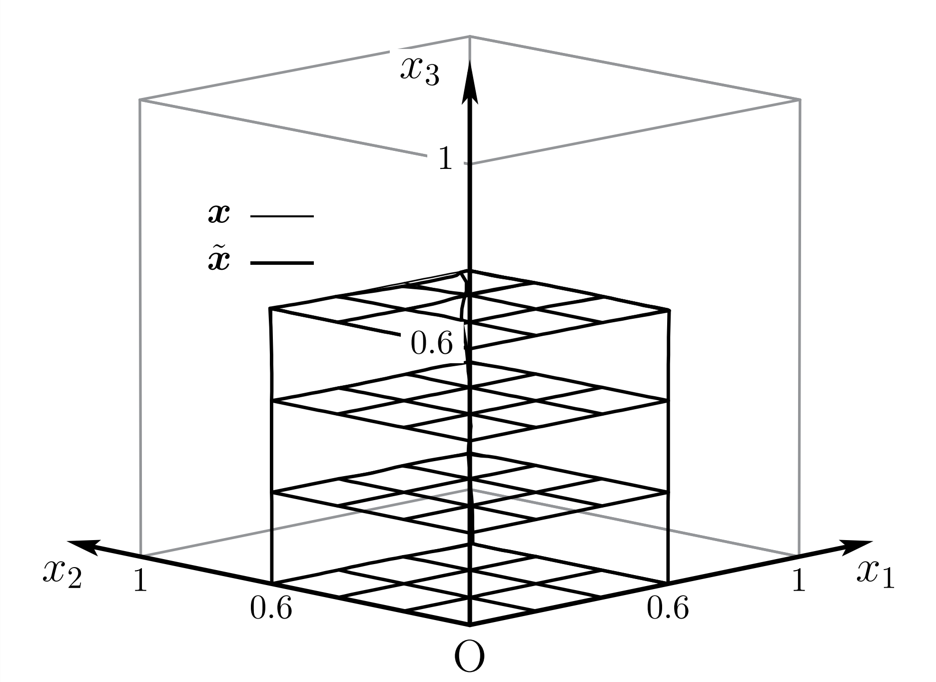


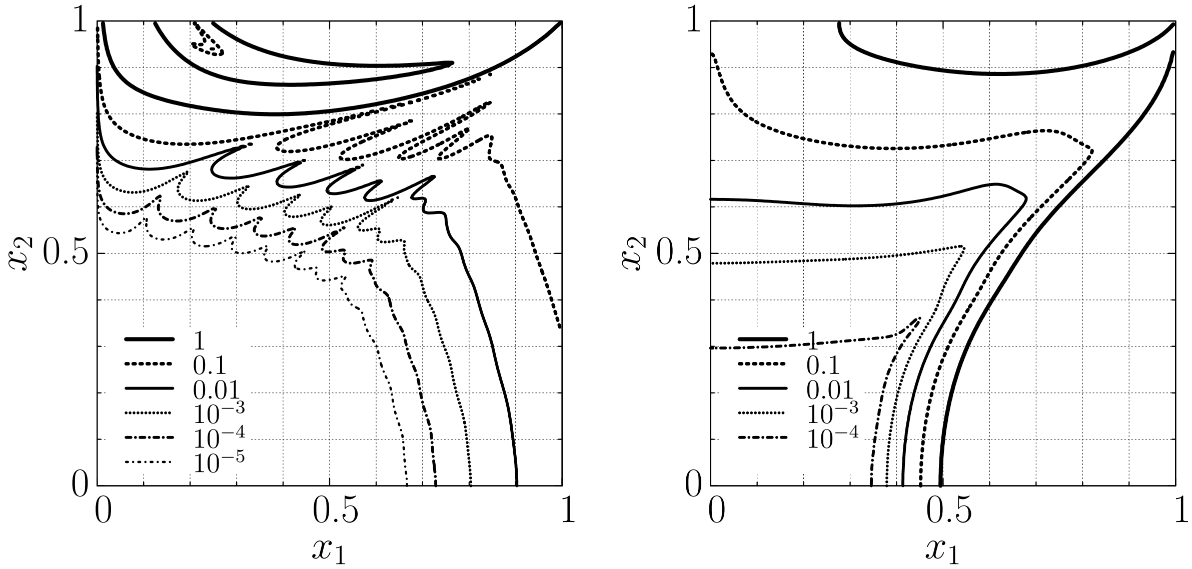
Figure 4.5　A profile of the mapping of a cubic space by the vector ϵ-algorithm (VEA) which is applied to the 17th degree Taylor polynomials approximating the inverse function $\bar{\boldsymbol{q}}(\bar{\boldsymbol{p}})$.

のとき，$c_{i,j,k}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ の総数は 2907 個である．Figure 4.6 は，座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ における $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ の真値から，テイラー多項式を用いて計算された座標 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ の誤差 δ の分布を，$x_3 = 0, 0.6$ の平面について等高線で表したものである．ここに，誤差 δ は座標の計算値と真値との間の距離 $\delta = |\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}|$ を表す．対称性により $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ の領域のみについて，誤差 δ の 10^{-5} から 1 までの等高線を 10 倍ごとに示している．

このテイラー多項式に，倍精度演算による VEA を適用して推定された座標 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ の誤差 δ の分布を，$x_3 = 0, 0.6$ について Figure 4.7 に示す．計算誤差 $\delta \leq 0.01$ の領域は，テイラー多項式のみの場合にくらべて，大きく広がっている．

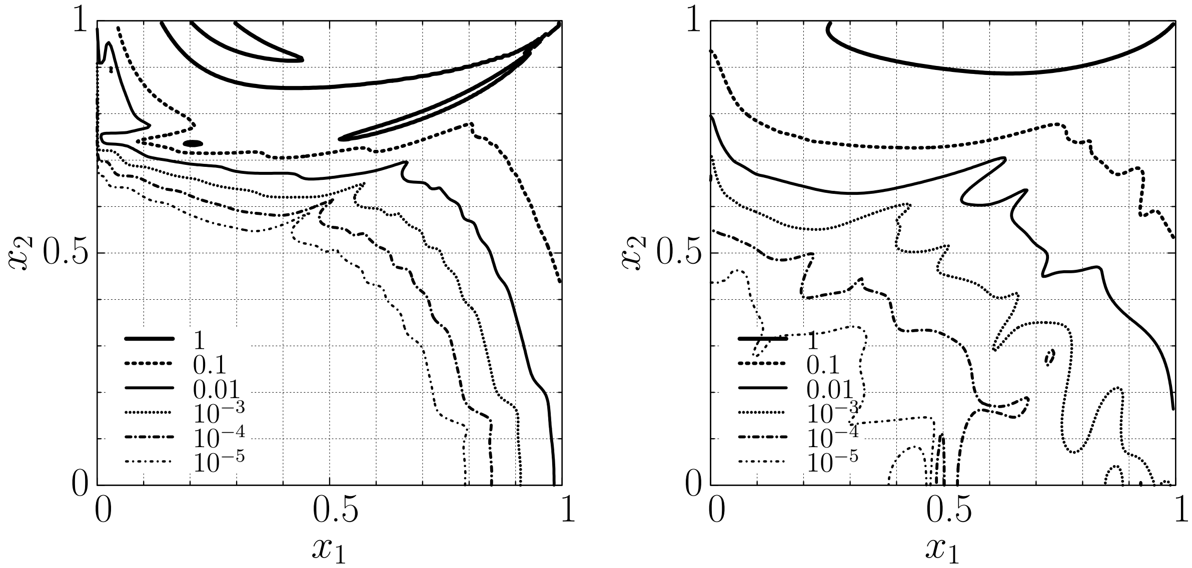
かりに計測領域の形状として立方体を想定すれば，誤差 $\delta \leq 0.01$ で測定できる領域は，およそ $|x_\nu| \leq 0.6$ $(\nu = 1, 2, 3)$ となる．また，テイラー多項式の次数を 25 次に下げると，項数は 1365 個となり計算量は 33 次の約半分になるが，$x_3 = 0, 0.5$ における誤差分布は Figure 4.8 のようになり，立方体にしておよそ $|x_\nu| \leq 0.5$ $(\nu = 1, 2, 3)$ の計測領域が得られる．

なお，ここでのテイラー多項式の数値計算は数式のとおりに実行し，計算誤差を減少さ



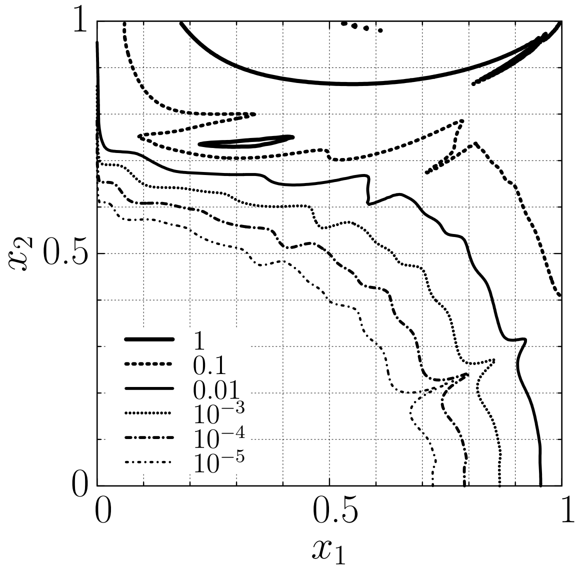
(a) $x_3 = 0$　　(b) $x_3 = 0.6$

Figure 4.6　Error contour maps of coordinates calculated by using the 33rd degree Taylor polynomials which approximate the inverse function $\bar{\boldsymbol{q}}(\bar{\boldsymbol{p}})$.

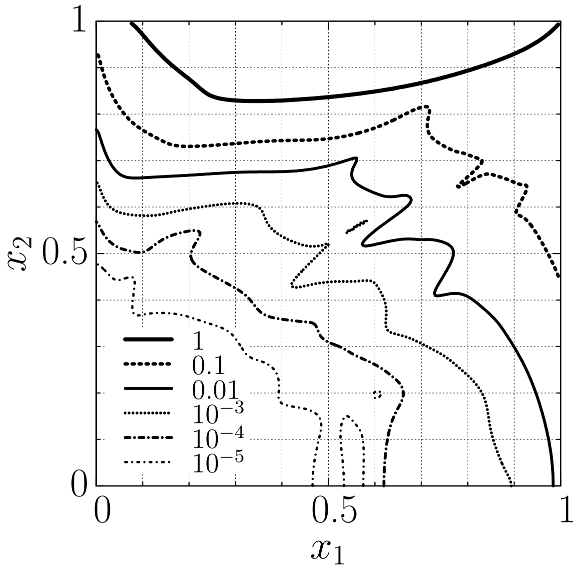


(a) $x_3 = 0$　　(b) $x_3 = 0.6$

Figure 4.7　Error contour maps of coordinates calculated by applying the VEA to the 33rd degree Taylor polynomials which approximate the inverse function $\bar{\boldsymbol{q}}(\bar{\boldsymbol{p}})$.



(a) $x_3 = 0$



(b) $x_3 = 0.5$

Figure 4.8　Error contour maps of coordinates calculated by applying the VEA to the 25th degree Taylor polynomials which approximate the inverse function $\bar{\boldsymbol{q}}(\bar{\boldsymbol{p}})$.

せるための式の変形や計算手順の変更などはしていない．したがって計算の過程では，テイラー多項式の交代級数的なふるまいにより，たとえ倍精度演算でも，無視できない計算誤差が混入する可能性が高い．しかし，VEA を適用した結果にそれらの誤差による深刻な影響は表れていない．

4.5　位置推定の安定性

テイラー多項式に VEA を適用して推定された位置には，Figure 4.7 に示されている近似誤差が系統誤差として含まれるが，磁界の測定値には雑音による誤差が含まれるため，偶然誤差としてばらつきが生ずることになる．実用的に位置の推定をおこなうには，このばらつきが極端に大きくならないこと，つまり測定誤差に対するいわば逆問題としての安定性 [70, p. 41] が必要である．

そこで，3.4 節と同様の方法で，モンテカルロ法により安定性を検証する．すなわち，ある位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ における磁界ベクトル $\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}}$ の計算値の x_1, x_2, x_3 成分それぞれに対してすべて独立に，測定誤差を模擬する平均値 0，標準偏差 0.01 の正規乱数を加えたのちに，位置 $\boldsymbol{x}$ を推定し，その推定値を $\tilde{\boldsymbol{x}}^{+}$ とする．ただし，近似誤差を除

いて磁界の測定誤差によるばらつきにのみに着目し，推定のばらつきを，磁界の測定誤差がないときの位置の推定値 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ からの距離 $|\tilde{\boldsymbol{x}}^{+} - \tilde{\boldsymbol{x}}|$ の二乗平均平方根 (RMS) で評価する．この値が小さければ，位置は安定に推定できると考えられる．個々の測定ではより大きなずれが観測されうるが，推定が安定で RMS 値が小さな値におさまっていれば，応答速度を犠牲にすることにはなるが，フィルタを用いてその影響を抑えることが容易にできる．なお，ガウス–ニュートン法のときよりも計算時間がかなり短くなったため，ここでは同一の位置における試行は 4000 回おこなった．

33 次のテイラー多項式と VEA の組み合わせについて，x_1, x_2, x_3 軸上および Ω の対角線上に位置 $\boldsymbol{x}$ をとり，シミュレーションを実行した結果を Figure 4.9 に示す．$\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leq 0.6$ の領域におけるばらつきは最大で原点のおよそ 2 倍である．これを 3.3 節および 3.4 節の，6 つの位置関数 $p_1, \ldots, p_6$ を用いたガウス–ニュートン法についての結果と比較すると，計測領域の大きさについてはほぼ同じ，計測領域における推定の安定性は同等もしくはそれ以上と評価できる．

4.6　位置推定の計算時間

本アルゴリズムを試験的にプログラミング言語 Python [71] で実装し[*4]，パーソナルコンピュータ (CPU: Intel Core 2 Duo, クロック周波数: 2.4 GHz) で実行して計算時間を測定した．

33 次のテイラー多項式の計算時間は 2.16 ms で，これにさらに VEA を適用した場合，位置の推定に必要な計算時間の合計は 2.60 ms であった．このように，計算時間の大部分はテイラー多項式の計算によるものである．

比較のために，ガウス–ニュートン法についても同様に実装した．磁気ベクトルポテンシャルの計算式にアルゴリズムの自動微分 [63] [*5] を適用することにより，反復計算に必要な位置関数 3 個およびそれらの偏導関数 9 個の値を数値計算した．この 12 個の値を 1 回計算するのに必要な計算時間は 56.73 ms であった．すなわち，テイラー多項式と VEA による位置推定が完了するまでの時間に対して，ガウス–ニュートン法では 1 回の反復だけにその 20 倍以上の計算時間が必要である．反復回数は位置に依存するが，おおむね 5 回から 20 回の反復が必要であるから，推定を終えるのにはおよそ 100 倍以上の時間を要することになる．

[*4] 配列演算などを高速に実行するために Numeric パッケージ [72] を使用した．
[*5] アルゴリズムの自動微分を使うために ScientificPython パッケージ [73] を使用した．

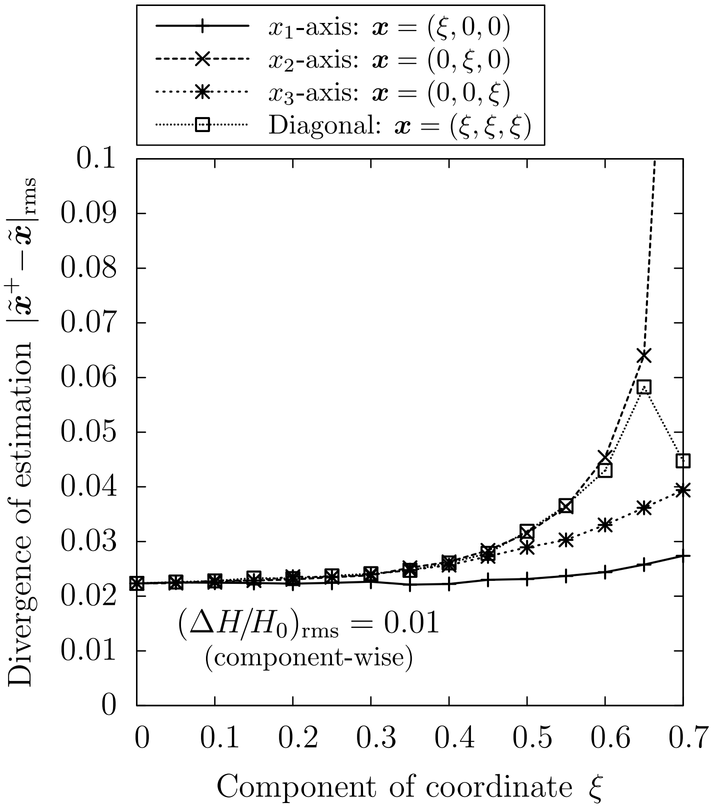


Figure 4.9　Divergence of estimated positions caused by measurement errors of the magnetic fields when applying the VEA to the 33rd degree Taylor polynomials which approximate the inverse function $\tilde{\boldsymbol{q}}(\tilde{\boldsymbol{p}})$.

いずれの実装においても，計算時間を短縮するための調整などはいっさいしていない．計算時間は実装に大きく依存するため，非線形方程式系による定式化についてもアルゴリズムを高速化できる可能性はある．しかし，テイラー多項式と VEA の組み合わせは，無調整の実装でも高速かつ安定であることから，大きな優位性をもっていると考えられる．

なお，Python の実行速度は比較的遅く，より高速とされる C 言語などで実装すれば，計算時間はさらに短縮できると考えられる．

4.7　まとめ

本章では，位置関数の逆関数として位置を推定する定式化について，座標を位置関数のテイラー多項式で陽に表す方法を示した．これについて，テイラー多項式だけでは収束が悪く，十分な大きさの計測領域が得られないため，ベクトル ϵ アルゴリズムを適用して収

束を改善することにより，計測領域を広げることができることを明らかにした．

このテイラー多項式とベクトル ϵ アルゴリズムを組み合わせた位置推定アルゴリズムにより，一辺の長さが立方体フレームのおよそ 0.6 倍の立方体領域で，磁界センサの位置を高速かつ安定に推定することができた．ガウス–ニュートン法と比較すると，計測領域の大きさおよび推定の安定性は同等以上で，推定の速さはおよそ 100 倍以上に高速化することができた．

これらの結果により，4 個の正方形コイルを用いる方式に対し，十分に実用的な位置推定アルゴリズムを構築することができたと考えられる．

第 5 章

試作システムによる実証実験

5.1　はじめに

前章まででは，本方式の原理として，参照磁界を発生するための電流は，正確に立方体フレームの辺に沿って流れることを仮定していた．しかし，実際にすべての正方形コイルを立方体フレームの辺の正確に同じ位置に設置することは，そもそも物理的に不可能である．実際に製作される立方体フレームに配置することが可能な正方形コイルには，原理での想定に対し寸法や形状，位置のずれが避けられない．

本章では，まず，正方形コイルの寸法が原理の想定に対して小さなずれをもつ場合に，位置座標のテイラー多項式近似を再計算することなく，簡単な補正によりその影響を軽減する方法を提示する．つぎに，実際に 3 軸ホールセンサを用いて試作したシステムについて，4 章で述べた，逆関数のテイラー多項式にベクトル ϵ アルゴリズムを組み合わせた位置推定アルゴリズムを実装し，動作を確認する．さらに，寸法のずれの補正を適用してその有効性を確認する．

5.2　寸法のずれによる影響の補正

正方形コイルの形状や導線の束の太さ，コイルの配置のずれなどにより生じる位置の推定誤差の補正は，ずれの大きさがわかっていれば原理的に可能である．すなわち，厳密な補正は，磁界の計算において寸法のずれを正確に考慮し，テイラー展開をやりなおすことにより可能であるが，そのためにはかなりの手間と時間が必要になる．

かりに正方形コイルが原理どおりに実装された場合について，位置を推定するテイラー多項式がすでに得られていたとする．実際に製作されたコイルの寸法をもとに位置の推定

値を補正する簡易な方法がもしあれば，補正まで含めたシステムの実装はきわめて容易になる．

ここでは，コイルの寸法のずれの形態を限定した上で，ずれの大きさが小さい場合の低次の近似による補正の方法を導出する．

いま，コイル対 C_3 の 2 つのコイルは同一の形状で，X_1, X_2 方向にそれぞれ幅 $2L_{3,1}, 2L_{3,2}$ をもつ長方形であると仮定し，コイルの対向間隔は $2D_3$ であるとする．このとき，原点における準一様磁界の大きさ $H_{0,3}$ は

$$H_{0,3} = \frac{2\,NI\,L_{3,1}L_{3,2}\left(2D_3^2 + L_{3,1}^2 + L_{3,2}^2\right)}{\pi\left(D_3^2 + L_{3,1}^2\right)\left(D_3^2 + L_{3,2}^2\right)\sqrt{D_3^2 + L_{3,1}^2 + L_{3,2}^2}} \tag{5.1}$$

となる．

ここで，基準寸法 $\mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}$ を考える．$D_3, L_{3,1}, L_{3,2} \approx \mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}$ であるものとする．$D_3, L_{3,1}, L_{3,2} = \mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}$ の点において式 (5.1) をテイラー展開して 1 次の項までとると，

$$H_{0,3} \approx H'_{0,3}\left\{1 - \frac{1}{6\mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}}\left[8\left(D_3 - \mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}\right) - \left(L_{3,1} - \mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}\right) - \left(L_{3,2} - \mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}\right)\right]\right\} \tag{5.2}$$

と表すことができる．ここに

$$H'_{0,3} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\,\frac{NI}{\mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}} \tag{5.3}$$

である．基準寸法 $\mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}$ を実際の $D_3, L_{3,1}, L_{3,2}$ の寸法を用いて

$$\mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}} = \frac{8D_3 - L_{3,1} - L_{3,2}}{6} \tag{5.4}$$

と定めることにより，式 (5.2) の右辺の 1 次の項は 0 となり，$H'_{0,3}$ は $H_{0,3}$ のよい近似値となる．すなわち，

$$H_{0,3} \approx H'_{0,3} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\,\frac{NI}{\mathit{\Lambda}_3^{\mathrm{U}}} \tag{5.5}$$

のように，式 (2.1) と同じ形に表すことができる．

コイル対 C_1 についても，X_2, X_3 方向の幅をそれぞれ $2L_{1,2}, 2L_{1,3}$，対向間隔を $2D_1$ として，C_3 の場合と同様に，基準寸法 $\mathit{\Lambda}_1^{\mathrm{U}}$ を

$$\mathit{\Lambda}_1^{\mathrm{U}} = \frac{8D_1 - L_{1,2} - L_{1,3}}{6} \tag{5.6}$$

によって定めれば，原点における準一様磁界の大きさ $H_{0,1}$ は

$$H_{0,1} \approx H'_{0,1} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\,\frac{NI}{\mathit{\Lambda}_1^{\mathrm{U}}} \tag{5.7}$$

で近似される．

同様の方法を勾配磁界にも適用すると，式 (2.7) に対応する近似式

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}} \approx -\frac{2}{3}\, H_{0,3} \left(\frac{X_1}{\Lambda^{\mathrm{G}}_{3,1}}\,\mathbf{e}_1 + \frac{X_2}{\Lambda^{\mathrm{G}}_{3,2}}\,\mathbf{e}_2 - 2\frac{X_3}{\Lambda^{\mathrm{G}}_{3,3}}\,\mathbf{e}_3 \right) \tag{5.8}$$

が導かれる．ここに現れる基準寸法は

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{\mathrm{G}}_{3,1} &= \frac{-D_3 + 17L_{3,1} - 4L_{3,2}}{12} \\ \Lambda^{\mathrm{G}}_{3,2} &= \frac{-D_3 - 4L_{3,1} + 17L_{3,2}}{12} \\ \Lambda^{\mathrm{G}}_{3,3} &= \frac{-2D_3 + 13L_{3,1} + 13L_{3,2}}{24} \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

で定められる．

式 (5.4) から式 (5.9) までを参照し，座標の無次元化，および式 (2.14) の磁界の無次元化を，あらたに導かれた基準寸法を用いて

$$x_1 = \frac{X_1}{\Lambda^{\mathrm{G}}_{3,1}}\,,\ x_2 = \frac{X_2}{\Lambda^{\mathrm{G}}_{3,2}}\,,\ x_3 = \frac{X_3}{\Lambda^{\mathrm{G}}_{3,3}} \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{U1}} = \frac{\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}}{H_{0,1}},\ \boldsymbol{h}^{\mathrm{U3}} = \frac{\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}}{H_{0,3}},\ \boldsymbol{h}^{\mathrm{G3}} = \frac{\boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}}{H_{0,3}} \tag{5.11}$$

のように修正することにより，補正は完了する．すなわち，無次元の磁界ベクトルとして式 (5.11) を用いて位置関数を評価し，逆算された無次元座標を式 (5.10) の関係を用いて実際の座標に換算すればよい．

5.3　試作システムの概要

一辺が約 0.3 m の正方形コイル，および磁界センサとして磁界の 3 軸成分を 8 ビットのデジタル値で出力する 3 軸ホールセンサ（旭化成エレクトロニクス，AK8971N）を用いて，本方式による計測システムを試作した．

コイルは直径 0.5 mm のエナメル線を 106 回巻いたもので，銅線の束の太さは直径約 5 mm である．また，正方形コイルの一辺の長さ，およびコイルの間隔については，$2\Lambda = 305$ mm を基準寸法として製作した．ただし実際には，あとに記すように，最大で ±5 mm 程度の寸法のずれが生じていた．なお，コイルのかどの直角や，対向するコイルどうしの平行については，曲尺などを用いた目視で目立ったずれが見られないよう，コイルの形状や配置を調整した．

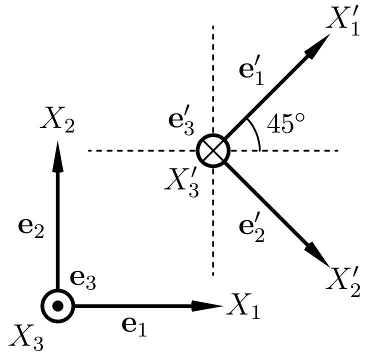


Figure 5.1　The attitude of a triaxial Hall magnetometer in the experiments.

使用した 3 軸ホールセンサは，磁界を 1 回測定するのに約 8 ms の時間を要し，そのあいだ参照磁界の 1 つを，コイルに約 0.28 A の直流電流を流すことにより静磁界として発生させる．このとき原点における準一様磁界の大きさ H_0 は，磁束密度にして約 90 µT である．また，2 章で述べた 3 つの磁界を時分割で切り替えて発生するほかに，コイルに通電せず背景磁界を測定する期間を設けている．

磁界センサは 5 mm×6 mm×1 mm のパッケージの内部に，直交 3 軸のそれぞれに対応する 3 個のホール素子が配置されているが，それぞれの正確な位置は不明であるため，ここではセンサの位置の基準点はパッケージの中心点に定めた．

センサ出力の最下位ビットの大きさ（以下 LSB と記す）に対応する磁界の量子化幅は，参照磁界の空間分布や背景磁界の重畳を考慮して，1.25 µT/LSB に設定した．したがって H_0 はおよそ 72 LSB に相当する．

5.4　実験方法および結果

実験では，磁界センサに組み込まれた 3 個のホール素子の最大感度方向に局所座標系 (X_1', X_2', X_3') の基底ベクトル $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ をとり，これらが正方形コイルの配置により定められた全体座標系 (X_1, X_2, X_3) の基底ベクトル $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に対して，$\mathbf{e}_1' = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_3$ となるように，磁界センサの姿勢を Figure 5.1 のように定めた．

位置座標の推定値は，位置関数 $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ の 33 次のテイラー多項式に VEA を適用して計算する．第 4 章の結果より，一辺が $2\Lambda = 305$ mm の 0.6 倍の立方体の内部を計測領域とすれば，座標値の有効範囲は ± 91.5 mm となる．$X_3 = 0$ mm $(x_3 = 0)$ の平面上で，X_1 軸すなわち $X_2 = 0$ mm $(x_2 = 0)$ の直線に沿って，0 mm $\le X_1 \le$ 100 mm の範囲でセンサ

を移動させたときの座標の推定結果を，X_1 座標についてのみ，Figure 5.2(a) に示す．また，$X_3 = 75\,\mathrm{mm}\,(x_3 = 0.492)$ の平面上で，$X_2 = 75\,\mathrm{mm}\,(x_2 = 0.492)$ の直線に沿って同様に推定した結果を Figure 5.2(b) に示す．それぞれの測定位置で参照磁界を連続して 100 回測定し，それぞれの測定値から推定した位置座標の最大値，最小値，および平均値を示した．また，平均値と基準位置との差もあわせて示した．現状では実験装置の原点の位置決め精度が低く，これらの結果から絶対的な位置精度の評価はできない．しかし，原点からの変位の精度は比較的高いと考えられるため，基準位置と推定値の関係の直線性およびその傾きから，推定のよしあしを評価することはできる．いずれの結果においても，X_1 座標の推定値の傾きは基準位置の傾きよりわずかに小さく，コイルの寸法のずれが影響しているものと考えられる．

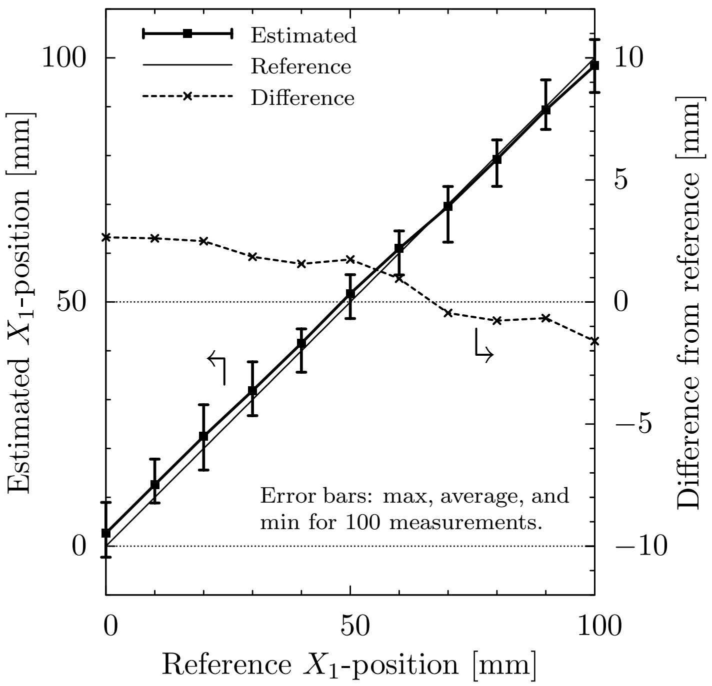
磁界センサ出力の 1 LSB はおよそ $0.014H_0$ の磁界に相当するから，参照磁界ベクトル $\boldsymbol{H}^{\mathrm{U1}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ の測定値において，かりに 3 軸成分のそれぞれが RMS 値で 1 LSB のばらつきをもつとすれば，Figure 4.9 の結果より，原点付近における位置の推定値に生ずるばらつきの RMS 値は，距離にして約 $0.031\Lambda = 4.7\,\mathrm{mm}$，1 軸あたりではその $1/\sqrt{3}$ 倍の約 2.7 mm と見積もられる．また，背景磁界の補正のためにセンサの測定値どうしの差をとるため，参照磁界の測定値のばらつきはさらに大きくなる．これらの要因により，Figure 5.2 では，同じ位置における X_1 座標の推定値に 10 mm 前後のばらつきが現れている．しかし，平均値は比較的なめらかにふるまうことから，位置の推定は磁界の測定誤差に対して安定であると考えられる．

つぎに，実際の寸法にもとづき，5.2 節の補正方法をこの測定データに適用した．ここで，補正に用いた実測の寸法は，コイル対 C_1 が $2D_1 = 306\,\mathrm{mm}$, $2L_{1,2} = 300\,\mathrm{mm}$, $2L_{1,3} = 305\,\mathrm{mm}$，コイル対 C_3 が $2D_3 = 309\,\mathrm{mm}$, $2L_{3,1} = 305\,\mathrm{mm}$, $2L_{3,2} = 306\,\mathrm{mm}$ である．$H_{0,3}, H_{0,1}$ の値には式 (5.5) および式 (5.7) による近似値 $H'_{0,3}, H'_{0,1}$ を用いた．

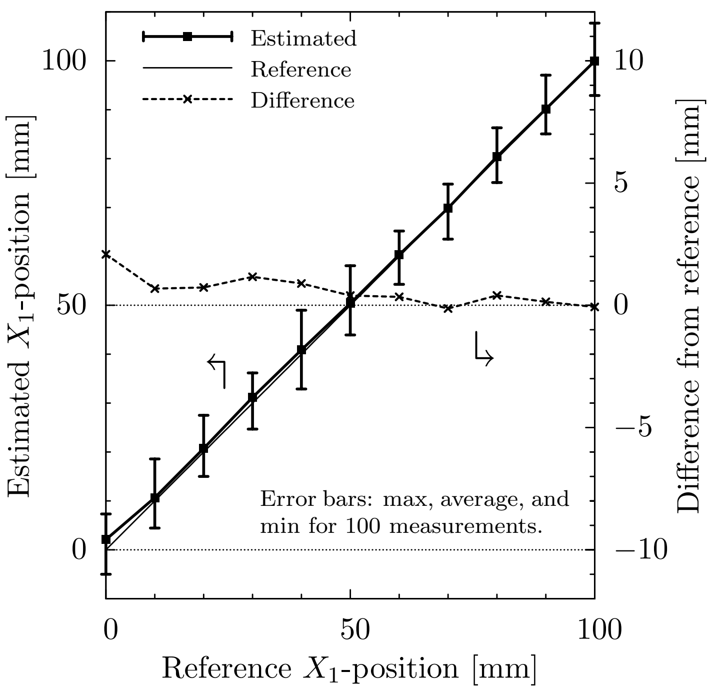
補正のさいの基準寸法は，式 (5.4)，(5.6) より $2\Lambda_1^{\mathrm{U}} \approx 307.2\,\mathrm{mm}$, $2\Lambda_3^{\mathrm{U}} \approx 310.2\,\mathrm{mm}$，ならびに式 (5.9) より $2\Lambda_{3,1}^{\mathrm{G}} \approx 304.3\,\mathrm{mm}$, $2\Lambda_{3,2}^{\mathrm{G}} \approx 306.1\,\mathrm{mm}$, $2\Lambda_{3,3}^{\mathrm{G}} \approx 305.2\,\mathrm{mm}$ となる．製作時に想定した基準寸法 $2\Lambda = 305\,\mathrm{mm}$ と比較すると，とくに $2\Lambda_3^{\mathrm{U}}$ のずれが大きい．その影響は式 (5.5) により $H_{0,3}$ におよび，$H'_{0,3}/H_0 \approx 0.983$ となる．すなわち，コイル対 C_3 の寸法のずれにより，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{U3}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{G3}}$ の実際の大きさは，製作時の想定より 1.7 % 程度小さめになっている．

この補正を適用した座標の推定結果を，X_1 座標についてのみ，Figure 5.3 に示す．X_1 の推定値の直線の傾きが，基準位置の傾きに近づき，また直線性を示す範囲も広くなっていることから，補正は適切に機能していると考えられる．

以上の結果から，テイラー多項式と VEA による位置座標の推定は，試作システムにお

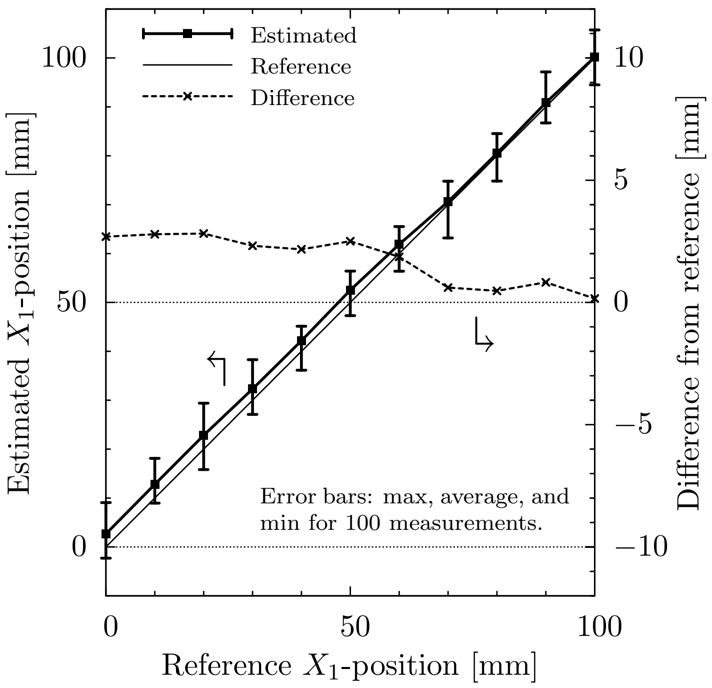


(a) $X_2 = X_3 = 0\,\mathrm{mm}$

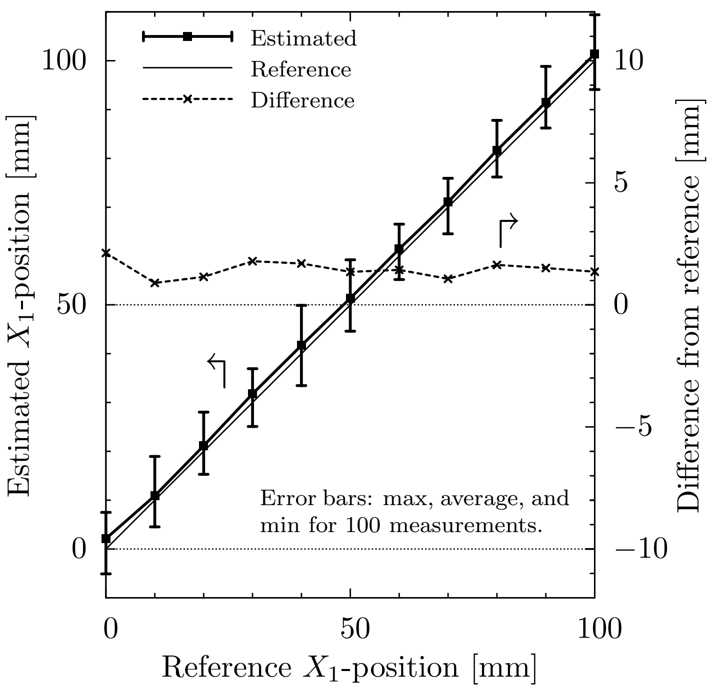


(b) $X_2 = X_3 = 75\,\mathrm{mm}$

Figure 5.2　Estimated positions in the prototype system.



(a) $X_2 = X_3 = 0\,\mathrm{mm}$



(b) $X_2 = X_3 = 75\,\mathrm{mm}$

Figure 5.3　Estimated positions after the correction for the coil sizes.

いて正しく機能しており，またコイルの寸法のずれの影響は，適切に補正されていると考えられる．

5.5 まとめ

本章では，まず，正方形コイルの寸法に小さなずれがある場合を想定して，位置を近似するテイラー多項式を再計算することなく，簡単な補正を用いてその影響を軽減する方法を提示した．つぎに，一辺が約 0.3 m の正方形コイルおよび 3 軸ホールセンサを用いて試作した計測システムにおいて，逆関数のテイラー多項式にベクトル ϵ アルゴリズムを組み合わせた位置推定アルゴリズムを実装し，実測によりセンサの位置を推定する実験をおこなった．その結果，推定アルゴリズムは実測においても正しく機能することが確かめられ，またコイル寸法のずれに対する補正についても有効性を確認した．

この検証実験の結果により，本方式の原理から位置推定アルゴリズムまでの全体について，位置の推定の精度および安定性，ならびに高速性などの基本性能を確認することができたと考える．

第 6 章

結論

本研究では，4 個の正方形コイルを用いて参照磁界を発生する磁気式モーションキャプチャの方式を提案し，位置を計測するための原理の構築，および位置を高速に推定するためのアルゴリズムの構築をおこなった．

第 2 章において，まず，立方体枠に沿って配置した 4 個の正方形コイルおよび直交 3 軸磁界センサを用いた磁気式モーションキャプチャの原理を，つぎのように構築した．参照磁界として，2 つの準一様磁界と 1 つの勾配磁界を定義した．座標系によらず位置のみにより値の決まる位置関数を，参照磁界ベクトルどうしのスカラー積を用いて定義した．あとは，参照磁界をそれぞれ時分割で発生させ，磁界センサで測定された磁界ベクトルを用いて位置関数の値を計算し，それらの値にもとづいてセンサの位置を推定する．この位置の推定問題を，第 1 に，センサの位置を未知数とする非線形方程式系により，第 2 に，位置を非線形の位置関数の逆関数ととらえることにより定式化した．

第 3 章において，非線形方程式系による定式化について，まず，磁界の測定誤差の影響を考慮して，これを最小二乗問題として解釈し，その数値解をガウス–ニュートン法を用いて計算する位置推定アルゴリズムを提示した．つぎに，このアルゴリズムについて，計算機シミュレーションをおこない，つぎのような結果を得た．まず，磁界の計測誤差がないときには，3 つの位置関数を用いて立方体フレームの中心部に，一辺の長さが立方体フレームの少なくとも 0.6 倍の立方体領域を含む計測領域が得られることと，位置関数の数を 6 つに増やすとさらに広い計測領域が得られることを明らかにした．つぎに，磁界の測定誤差の影響を考慮した場合には，6 つの位置関数を用いて立方体フレームの一辺の長さを 0.6 倍した立方体領域で安定に位置の推定が可能であることを明らかにした．

第 4 章において，位置関数の逆関数として位置を推定する定式化について，座標を位置関数のテイラー多項式で陽に表す方法を示した．これについて，テイラー多項式だけでは

収束が悪く，十分な大きさの計測領域が得られないため，ベクトル ε アルゴリズムを適用して収束を改善した．また，これにより計測領域を広げることができることを明らかにした．このテイラー多項式とベクトル ϵ アルゴリズムを組み合わせた位置推定アルゴリズムにより，一辺の長さが立方体フレームのおよそ 0.6 倍の立方体領域で，磁界センサの位置を高速かつ安定に推定できることを明らかにした．また，ガウス–ニュートン法と比較すると，計測領域の大きさおよび推定の安定性は同等以上で，推定の速さはおよそ 100 倍以上に高速化できることを明らかにした．

第 5 章において，まず，正方形コイルの寸法に小さなずれがある場合を想定して，位置を近似するテイラー多項式を再計算することなく，簡単な補正を用いてその影響を軽減する方法を提示した．つぎに，一辺が約 0.3 m の正方形コイル，および直交 3 軸磁界センサとして 3 軸ホールセンサを用いて試作した計測システムにおいて，逆関数のテイラー多項式にベクトル ϵ アルゴリズムを組み合わせた位置推定アルゴリズムを実装し，実測により磁界センサの位置を推定する実験をおこなった．その結果，推定アルゴリズムは実測においても正しく機能することが確かめられ，またコイル寸法のずれに対する補正についても有効性を確認した．

以上のように，本研究では，4 個の正方形コイルを用いて 2 つの準一様磁界と 1 つの勾配磁界を生成する磁気式モーションキャプチャの原理を提案し，これにテイラー多項式とベクトル ϵ アルゴリズムを組み合わた位置推定アルゴリズムを組み合わせることにより，十分に大きな計測領域で，直交 3 軸磁界センサの位置を高速かつ安定に推定できることを明らかにした．これらの結果は，6 個の正方形コイルを用いる従来の笹田・森本方式，および江村・熊谷方式に対して，本方式がシステムの構成の簡単さ，ならびに利便性において優位であり，なおかつ実用性もそなえていることを示している．本研究の成果は今後，簡単な構成でかつ安価な磁気式モーションキャプチャシステムの実現に役立つものであると考える．

付録 A

逆関数のテイラー展開のためのコンピュータプログラム

第 4 章において，位置関数 $p_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ は変数 x_1, x_2, x_3 を用いた陽な数式で表されるので，$p_i(x_1, x_2, x_3)$ のテイラー展開は通常の方法で計算することができる．一方，逆関数 $x_i = q_i(p_1, p_2, p_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ については，p_1, p_2, p_3 による陽な数式表現は不明である．しかし，$p_i(x_1, x_2, x_3)$ のテイラー展開が得られるならば，$q_i(p_1, p_2, p_3)$ のテイラー展開は，4.2 節に述べたようにテイラーの定理の逆を利用することにより，$p_i(x_1, x_2, x_3)$ のテイラー展開を用いて計算することができる．

筆者は数式処理ソフトウエア Maxima [*1] [74] を用いて，n 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ をもつ関数 $g(x_1, \ldots, x_n)$ を，同じ変数をもつ n 個の関数 $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ による有理関数近似として表現する機能を実装した，Maxima の外部パッケージ `funcpade` を作成した．ここでの有理関数近似の計算には，パデ (Padé) 近似の多変数への拡張手法の一つとして，Karlsson and Wallin [75] により提示された方法の計算手順を流用している．この有理関数近似の分母の次数を 0 に指定することにより多項式近似が得られるが，それはすなわちテイラー多項式にほかならない．かりに変数 $x_1, \ldots, x_n$ の中から 1 つ x_k を選んで $g(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_k$ とするとき，これを近似するような，$f_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ についての多項式が得られたとすれば，それは $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ の値から x_k を計算する逆関数の近似式として使うことができる．

パッケージの使用法つぎのとおりである．Maxima のコンソールから

```
load("funcpade.mac")$
```

[*1] GNU General Public License にもとづくフリーソフトウエアである．

でパッケージを読み込んだのち，

```
funcpade(g, f, x, x_0, N, M);
```

の形式で入力する．ただし，`g` は対象となる関数の式 g，`f` は g の近似式では変数の役目をする関数の式 f である．`x` および `x_0` はそれぞれ，`g` と `f` に共通する変数 x および定数 x_0 で，変数 x について f を $x = x_0$ でテイラー展開した式を計算に用いることを示す．`g`，`f`，`x`，`x_0` は複数個をリストとして与えることもできる．`N`，`M` はそれぞれパデ近似における分子および分母の多項式の最高次数 N, M である．$M = 0$ の場合には，かわりに

```
functaylor(g, f, x, x_0, N);
```

としてもよい．

ひとつの例として，

```
display2d:false$
funcpade(x, [sin(x+y), sin(x-y)], [x, y], 0, 3, 0);
```

を入力すると，計算結果として

```
[x = sin(y+x)^3/12+sin(y+x)/2-sin(y-x)^3/12-sin(y-x)/2]
```

が出力される．これは $x = 0,\, y = 0$ の近傍で x を近似する $\sin(x+y), \sin(x-y)$ の 3 次の多項式

$$x \approx \frac{\sin^3(x+y)}{12} + \frac{\sin(x+y)}{2} + \frac{\sin^3(x-y)}{12} + \frac{\sin(x-y)}{2} \tag{A.1}$$

を表している．ここで式 (A.1) の右辺を $x = 0,\, y = 0$ でテイラー展開してみると

$$x - \frac{3}{40}\,x^5 - \frac{3}{4}\,x^3\,y^2 - \frac{3}{8}\,x\,y^4 + \cdots = x + O\Big(\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^5\Big) \tag{A.2}$$

となる．ここで O はランダウの記号である．式 (A.2) は，式 (A.1) がテイラー展開の意味で実際に x を正しく近似していることを示している．すなわち，元の関数 $\sin(x+y), \sin(x-y)$ のテイラー展開を利用して，逆三角関数を使わずに x の近似式を計算することができたことになる．

`funcpade` パッケージのプログラムソース `funcpade.mac` をここに収録し公開する．なお，公開にあたり MIT License を適用する．

```
/*
Multivariate Pade approximants for Maxima
Copyright (c) 2008 Takashi Yamaguchi

Permission is hereby granted, free of charge, to any person
obtaining a copy of this software and associated documentation
files (the "Software"), to deal in the Software without
restriction, including without limitation the rights to use,
copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell
copies of the Software, and to permit persons to whom the
Software is furnished to do so, subject to the following
conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be
included in all copies or substantial portions of the Software.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND,
EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES
OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND
NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT
HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY,
WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING
FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR
OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.
*/

/*
  Multivariate Pade approximants for functions
    generated by using Karlsson-Wallin's process.
  It is useful, for example, for calculating Taylor expansions
    or Pade approximants for inverse of multivariate functions.
*/

/*
  Variables which affect to 'functaylor' and 'funcpade':
    numer, float (defined by default in Maxima)
    use_linsolve=false
*/

functaylor(TargetFuncList,FuncList,IndVarList,pointlist,numorder):=
  funcpade(TargetFuncList,FuncList,IndVarList,pointlist,numorder,0)$

funcpade(TargetFuncList,FuncList,IndVarList,pointlist,numorder,denorder):=
block([taylor_truncate_polynomials:true,maxtayorder:false,taylordepth:3,
    keepfloat:true,
    use_linsolve:use_linsolve,
```

```
    _float:float and bigfloat#true,float:false,bigfloat:bigfloat,
    solve_lu,
    zeroTaylor,oneTaylor,
    atlist,
    makeIndexList,resultList:[],rnum_list:[],
    _taylor,___dummyVar,
    TransIndVarList,IndVarListExt,TransIndVarListExt,pointListExt,
    numorderlist,denorderlist,
    totalorder,totalorderlist,
    FuncTaylorList,TargetFuncTaylorList,FuncValueList,
    TransFuncList,TransFuncTaylorList,
    LopowList,LopowTargetFunc,LopowFunc,loOrder,seriesOrder,
    VarLoOrder,VarHiOrder,FuncLoOrder,FuncHiOrder,
    t0:elapsed_real_time()],

  if bigfloat#true then bigfloat:false,
  if use_linsolve#true then use_linsolve:false,

  solve_lu(equ_m,vars,field):=block([
      keepfloat:false,ratmx:false,sparse:false,field:field,n:length(vars),
      field_list:[rationalfield,generalring],field:field],
    if n=0 then []
    else block([equ_m:equ_m,a,b,lu,field:field],
      a:submatrix(equ_m,n+1),
      b:-col(equ_m,n+1),
      if elementp(field,{floatfield,complexfield,bigfloatfield}) then
        lu:lu_factor(a,field)
      else block([lu_field],
        lu_field:lambda([f],block([m:a,lu],
          if errcatch(lu:lu_factor(m,f))#[] then throw([lu,f]))),
        [lu,field]:errcatch(catch(map(lu_field,field_list)))[1]
      ),
      if lu=false or (length(lu)=5 and lu[4]=inf) then
        [false,field]
      else block([result],
        result:lu_backsub(lu,b),
        [maplist("=",vars,makelist(result[i,1],i,1,n)),field]
      )
    )
  ),

  TargetFuncList:(if listp(TargetFuncList) then TargetFuncList
    else [TargetFuncList]),
  FuncList:if listp(FuncList) then FuncList else [FuncList],
  IndVarList:(if listp(IndVarList) then IndVarList else [IndVarList]),
  pointlist:(if listp(pointlist) then pointlist
    else makelist(pointlist,i,1,length(IndVarList))),
```

```

  if length(FuncList)<length(IndVarList) then
    error("\
The number of variables must be less than or equal \
to the number of functions."
    ),
  if length(FuncList)>length(IndVarList) then
    block([dummyVarList,dummyPointList],
      dummyVarList:makelist('___dummyVar,i,
        length(IndVarList)+1,length(FuncList)),
      dummyPointList:makelist(0,i,length(IndVarList)+1,length(FuncList)),
      IndVarListExt:append(IndVarList,dummyVarList),
      pointListExt:append(pointlist,dummyPointList))
  else
    block(
      IndVarListExt:copylist(IndVarList),
      pointListExt:copylist(pointlist)
    ),

  TransIndVarList:IndVarList-pointlist,
  TransIndVarListExt:IndVarListExt-pointListExt,

  numorderlist:makelist(numorder,i,1,length(IndVarList)),
  denorderlist:makelist(denorder,i,1,length(IndVarList)),
  totalorder:numorder+denorder,
  totalorderlist:numorderlist+denorderlist,
  seriesOrder:max(1,totalorder),

  atlist:maplist("=",IndVarListExt,pointListExt),

  zeroTaylor:taylor(0,IndVarList,pointlist,seriesOrder),
  oneTaylor:taylor(1,IndVarList,pointlist,seriesOrder),

  _taylor(f,IndVarList,pointlist,seriesOrder):=
    if polynomialp(f,IndVarList) then oneTaylor*f
    else taylor(f,IndVarList,pointlist,seriesOrder),

  TargetFuncTaylorList:maplist(lambda([f],
    _taylor(f,IndVarList,pointlist,seriesOrder)),''ev(TargetFuncList)),
  FuncTaylorList:maplist(lambda([f],
    _taylor(f,IndVarList,pointlist,seriesOrder)),''ev(FuncList)),
  FuncValueList:totaldisrep(ev(ev(FuncList),atlist)),
  TransFuncList:FuncList-FuncValueList,
  TransFuncTaylorList:FuncTaylorList-FuncValueList,

  LopowList:lambda([TaylorList],
    block([maxtayorder:true,LopowTermList,PowListList,
```

```
        oneTaylor:taylor(1,IndVarList,pointlist,1)],
      LopowTermList:map(lambda([f],totaldisrep(oneTaylor*f)),TaylorList),
      PowListList:maplist(lambda([f],
        makepowerlistm(f,TransIndVarList)),LopowTermList),
      maplist(lambda([pl],apply(min,
        maplist(lambda([p],apply("+",p)),pl))),PowListList))),

  LopowTargetFunc:LopowList(TargetFuncTaylorList),
  LopowFunc:LopowList(FuncTaylorList),

  VarLoOrder:apply(min,LopowTargetFunc),
  VarHiOrder:seriesOrder,
  FuncLoOrder:floor(VarLoOrder/max(1,apply(min,LopowFunc))),
  FuncHiOrder:floor(seriesOrder/max(1,apply(min,LopowFunc))),

  makeIndexList:lambda([order],
    listify(apply(cartesian_product,
      maplist(lambda([x],block([i],setify(makelist(i,i,0,x)))),order)))),

  block([nindexlist,dindexlist,tindexlist,
      equList:[],
      pcoeff:lambda([i],concat('___p,i)),
      qcoeff:lambda([i],if i=0 then 1 else concat('___q,i)),
      rcoeff,lcoeff,npoly,dpoly,
      nSetFunc,
      nSet,mSet,nmSet,InterpolationSet,
      TransFuncTaylorPowerAssocList,TransFuncTaylorIndexAssocList],

    nindexlist:makeIndexList(numorderlist),
    dindexlist:makeIndexList(denorderlist),
    tindexlist:makeIndexList(totalorderlist),

    nSetFunc:subset(setify(nindexlist),
      lambda([x],block([s:apply("+",x)],s>=FuncLoOrder and s<=FuncHiOrder))),
    nSet:subset(setify(nindexlist),
      lambda([x],block([s:apply("+",x)],s>=VarLoOrder and s<=VarHiOrder))),
    mSet:subset(setify(dindexlist),lambda([x],is(apply("+",x)<=denorder))),
    nmSet:union(nSetFunc,mSet),
    InterpolationSet:block([np:length(nSet)+(length(mSet)-1),
        tSet:setify(tindexlist),result:{}],
      for i:VarLoOrder thru totalorder do
        block([nr:np-length(result),aSet],
          aSet:subset(tSet,lambda([x],is(apply("+",x)=i))),
          if length(aSet)>nr then
            aSet:block([s:sort(listify(aSet),ordergreatp)],
              setify(makelist(s[k],k,1,nr))),
          result:union(result,aSet)),
```

```
  result),
nindexlist:sort(listify(nSetFunc)),
dindexlist:sort(listify(mSet)),
tindexlist:sort(listify(InterpolationSet)),

print("## Making TABLE 1/2 ..."),
TransFuncTaylorPowerAssocList:block([assocList:[]],
  for i:1 thru length(TransFuncTaylorList) do (
    assocList:append(assocList,[[i,0]=1]),
    for j:1 thru totalorder do block([t],
      t:assoc([i,j-1],assocList,0),
      if t#0 then block([term],
        term:assoc([i,j-1],assocList,0)*TransFuncTaylorList[i],
        if ratdisrep(term)#0 then
          assocList:append(assocList,[[i,j]=term])
      )
        /* default = 0 */
    )
  ),
  assocList
),print(">> ... Completed."),

print("## Making TABLE 2/2 ..."),
TransFuncTaylorIndexAssocList:block([assocList:[]],
  for r in listify(nmSet) do block([powList],
    powList:makelist(assoc([i,r[i]],
      TransFuncTaylorPowerAssocList,0),i,1,length(TransFuncTaylorList)),
    if not member(0,powList) then block([term],
      term:apply("*",
        maplist(lambda([x],if ratdisrep(x)=0 then 0 else x),powList)),
      if ratdisrep(term)#0 then
        assocList:append(assocList,[r=term])
    )
      /* default = 0 */
  ),
  assocList
),print(">> ... Completed."),

block([i],
  i:0,dpoly:zeroTaylor,
  for d in dindexlist do block([term],
    term:assoc(d,TransFuncTaylorIndexAssocList,0),
    if term#0 then dpoly:dpoly+qcoeff(i)*ratdisrep(term),
    i:i+1),
  i:0,npoly:zeroTaylor,
  for n in nindexlist do block([term],
    term:assoc(n,TransFuncTaylorIndexAssocList,0),
```

```
      if term#0 then npoly:npoly+pcoeff(i)*ratdisrep(term),
      i:i+1)
  ),

  block([n:length(TargetFuncList)],
    for k:1 thru n do
      block([f:TargetFuncList[k],equList:[]],
        block([f_t:TargetFuncTaylorList[k],fq_minus_p_t,
            equ:[],r,sIndexList],
          fq_minus_p_t:totaldisrep(f_t*dpoly-npoly),
          sIndexList:block(listify(setify(
            maplist(lambda([x],makelist(x[i],i,1,
              length(IndVarList))),listify(tindexlist))
          ))),
          print(sconcat("## Constructing equations (",k,"/",n,") ...")),
          for r in sIndexList do
            block([l:[],c,taylorcoeff],
              maplist(lambda([x,y],l:append([[x,y]],l)),TransIndVarList,r),
              taylorcoeff:block([v,tc:fq_minus_p_t],
                for v in l do
                  tc:apply(lambda([x,y],ratcoeff(tc,x,y)),v),
                tc),
              equ:taylorcoeff,
              if (equ#0) then
                equList:append(equList,[equ]),
                  print(sconcat("----> (",k,"/",n,") ",r))
            ),
          print(sconcat(">> ... (",k,"/",n,") Completed."))
        ),
        block([l:[],v:[],poly,sol,result],
          v:listofvars(equList),
          poly:block([i,npoly,dpoly],
            i:0,dpoly:0,
            for d in dindexlist do
              block(dpoly:
                if i=0 or member(qcoeff(i),v) then
                  dpoly+qcoeff(i)*apply("*",maplist("^",TransFuncList,d))
                else
                  dpoly,
                i:i+1),
            i:0,npoly:0,
            for n in nindexlist do
              block(npoly:
                if member(pcoeff(i),v) then
                  npoly+pcoeff(i)*apply("*",maplist("^",TransFuncList,n))
                else
                  npoly,
```

```
              i:i+1),
          npoly/dpoly),
        sol:block([equ_m:augcoefmatrix(equList,v)],
          printf(true,sconcat("## Solving equations.",newline)),
          block([nv:length(v),result,solved:false],
            if not use_linsolve then block([field,st],
              if _float then field:floatfield
              elseif bigfloat=true then field:bigfloatfield
              else field:"not yet determined",
              printf(true,sconcat(">> ... Trying Maxima (lu_factor, ",
                field,").",newline)),
              st:errcatch([result,field]:solve_lu(equ_m,v,field)),
              printf(true,sconcat(">>> ... Tried Maxima (lu_factor, ",
                field,").",newline)),
              if st=[] or result=false then (
                printf(true,sconcat(">>> Failed.",newline))
              )
              else
                solved:true
            ),
            if not solved or  use_linsolve then (
              printf(true,sconcat(">> ... Trying Maxima (linsolve).",
                newline)),
              block([linsolve_params:true,linsolvewarn:false,
                solve_inconsistent_error:false,globalsolve:false,
                keepfloat:false,ratepsilon:2e-16,ratprint:false],
                result:linsolve(equList,v),
                solver:true
              )
            ),
            result
          )
        ),
        if not emptyp(sol) then
          block([result,float:_float],
            result:subst(sol,poly),
            rnum_list:append(rnum_list,%rnum_list),
            resultList:append(resultList,[f=result])
          )
        else
          print(sconcat("## No solution exists for ‘",f,"’."))
    ),
    print(">> ...Completed.")
  )
),
printf(true,"~,3f ~a~%",elapsed_real_time()-t0,"secs elapsed."),
%rnum_list:sort(rnum_list),
```

```
    resultList
  )
)$


/* Utility functions which computes a list of power orders in a polynomial */

makepowerlist(p,x):=block([px,xx,v,ph,xh,h,pl:[]],
  px:expand(p),
  xx:expand(x),
  v:listofvars(x),
  ph:makelist(hipow(px,i),i,v),
  xh:makelist(hipow(xx,i),i,v),
  h:floor(apply(max,ph/xh)),
  for k:0 thru h do
    if ratcoef(p,x,k)#0 then
      pl:endcons(k,pl),
  pl
)$

makepowerlistm(p,vl):=block([result:[]],
  if not(emptyp(vl)) then block([v:first(vl),pl],
    pl:makepowerlist(p,v),
    for i in pl do block([plm],
      plm:makepowerlistm(ratcoef(p,v,i),rest(vl)),
      if not(emptyp(plm)) then
        result:append(result,makelist(cons(i,l),l,plm))
      else
        result:makelist([k],k,pl)
    )
  ),
  result
)$

/* Here are some examples and the results for 'funcpade'.

funcpade(x,sin(x),x,0,3,3);

[x = (sin(x)-17*sin(x)^3/60)/(1-9*sin(x)^2/20)]

funcpade([x,y],[exp(x+y),exp(x-y)],[x,y],0,1,1);

[x = ((%e^(x-y)-1)*(%e^(y+x)-1)/2+(%e^(y+x)-1)/2+(%e^(x-y)-1)/2)
         /((%e^(y+x)-1)/2+(%e^(x-y)-1)/2+1),
       y = ((%e^(y+x)-1)/2-(%e^(x-y)-1)/2)/((%e^(y+x)-1)/2+(%e^(x-y)-1)/2+1)]

*/
```

```

/*
Hint: Operator "'" should be used properly in order to avoid unexpected evaluations.
*/

/* Here are some examples and the results for the utility functions.

makepowerlistm(x^2*y^3+(y-1)+z,[x,y]);

[[0,0],[0,1],[2,3]]

makepowerlistm(x^2*(y-1)+1,[x,y-1]);

[[0,0],[2,1]]

*/
```

謝辞

本論文は，筆者が九州大学大学院総合理工学府量子プロセス理工学専攻博士後期課程に在学中の研究成果をまとめたものである．本研究を遂行するにあたり，終始懇切なるご指導をいただいた，九州大学大学院総合理工学研究院 笹田一郎教授には，心より深く感謝の意を表する．また，本論文の内容について多くの有益なご助言をいただいた，九州大学大学院総合理工学研究院 本庄春雄教授，ならびに九州大学大学院システム情報科学研究院 松山公秀教授には，心より深く感謝の意を表する．

在学中，笹田研究室で研究生活をともにした富士通テン株式会社 加嶋良年氏には，実験装置の製作そのほかにおいて多くのご助力をいただいた．ここに深く感謝の意を表する．

旭化成エレクトロニクス株式会社 旭化成グループフェロー 山下昌哉博士には，実験に使用した 3 軸ホールセンサをご提供いただいた．ここに深く感謝の意を表する．

本論文の完成にいたるまでに，久留米工業高等専門学校 教務主事 馬越幹男教授，同 電気電子工学科長 池田隆教授ほか，同校教職員各位には，つね日頃多大なご支援ならびにご配慮をいただいた．ここに感謝の意を表する．

過去および現在の笹田研究室諸氏には，在学時より現在にいたるまで，なにかとご支援をいただいてきた．ここにまとめて感謝の意を表する．株式会社島津製作所 田中かおり氏には，とくにお名前をあげて感謝したい．

最後に，本論文の完成まで筆者を心身ともに支え続けてくれた妻，智子と二人の娘，結花とはるかに感謝したい．

参考文献

[1] Menache, Alberto. *Understanding Motion Capture for Computer Animation, 2nd Edition.* San Francisco, USA, Morgan Kaufmann, 2011.

[2] Robertson, Barbara. “Moving on up”. *Computer Graphics World.* 2007, vol. 30, p. 12–17.

[3] Sixense Entertainment Inc. `http://sixense.com/`.

[4] Microsoft Corporation. “Kinect”. Xbox.com, `http://www.xbox.com/kinect`.

[5] Welch, Greg; Foxlin, Eric. “Motion tracking: No silver bullet, but a respectable arsenal”. *IEEE Computer Graphics and Applications.* 2002, vol. 22, no. 6, p. 24–38.

[6] Aminian, Kamiar; Najafi, Bijan. “Capturing human motion using body-fixed sensors: Outdoor measurement and clinical applications”. *Computer Animation and Virtual World.* 2004, vol. 15, no. 2, p. 79–94.

[7] Moeslund, Thomas B.; Granum, Erik. “A survey of computer vision-based human motion capture”. *Computer Vision and Image Understanding.* 2001, vol. 81, p. 231–268.

[8] Moeslund, Thomas B.; Hilton, Adrian; Krüger, Volker. “A survey of advances in vision-based human motion capture and analysis”. *Computer Vision and Image Understanding.* 2006, vol. 104, p. 90–126.

[9] Muybridge, Eadweard. *The Human Figure in Motion.* New York, USA, Dover Publications, 1955.

[10] Muybridge, Eadweard. *Animals in Motion.* New York, USA, Dover Publications, 1957.

[11] Josefsson, Thorleif; Nordh, Erik; Eriksson, Per-Olof. “A flexible high-precision video system for digital recording of motor acts through lightweight reflex mark-

ers". *Computer Methods and Programs in Biomedicine.* 1996, vol. 49, p. 119–129.

[12] Herda, Lorna; Fua, Pascal; Plänkers, Ralf; Boulic, Ronan; Thalmann, Daniel. "Using skeleton-based tracking to increase the reliability of optical motion capture". *Human Movement Science.* 2001, vol. 20, p. 313–341.

[13] Liu, Guodong; McMillan, Leonard. "Estimation of missing markers in human motion capture". *The Visual Computer.* 2006, vol. 22, p. 721–728.

[14] Kitagawa, Midori; Windsor, Brian. *MoCap for Artists.* Burlington, USA, Focal Press, 2008.

[15] 古川 康一. スキルサイエンス入門 —身体知の解明へのアプローチ—. 東京, オーム社, 2009, 知の科学.

[16] Vicon Motion Systems. "Vicon MX". `http://www.vicon.com/products/viconmx.html`.

[17] Motion Analysis Corporation. `http://www.motionanalysis.com/`.

[18] Bregler, Christoph; Malik, Jitendra. "Tracking people with twists and exponential maps". *1998 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition.* Santa Barbara, California, USA. IEEE, 1998, p. 8–15.

[19] Kakadiaris, Ioannis; Metaxas, Dimitris. "Model-based estimation of 3D human motion". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* 2000, vol. 22, no. 12, p. 1453–1459.

[20] Corazza, S.; Mündermann, L.; Chaudhari, A. M.; Demattio, T.; Cobelli, C.; Andriacchi, T. P. "A markerless motion capture system to study musculoskeletal biomechanics: Visual hull and simulated annealing approach". *Annals of Biomedical Engineering.* 2006, vol. 34, no. 6, p. 1019–1029.

[21] Poppe, Ronald. "Vision-based human motion analysis: An overview". *Computer Vision and Image Understanding.* 2007, vol. 108, no. 1–2, p. 4–18.

[22] Mündermann, Lars; Corazza, Stefano; Andriacchi, Thomas P. "Markerless motion capture for biomechanical applications". Rosenhahn, Bodo; Klette, Reinhard; Metaxas, Dimitris, editors, *Human Motion: Understanding, Modelling, Capture, and Animation*, Computational Imaging and Vision, 36. Dordrecht, Netherlands, Springer Netherlands, 2008, p. 377–398.

[23] Corazza, Stefano; Mündermann, Lars; Gambaretto, Emiliano; Ferrigno, Giancarlo; Andriacchi, Thomas P. "Markerless motion capture through visual hull,

articulated ICP and subject specific model generation". *International Journal of Computer Vision*. 2010, vol. 87, no. 1, p. 156–169.

[24] Organic Motion, Inc. "BioStage". `http://organicmotion.com/solutions/biostage`.

[25] 持丸 正明, 河内 まき子. 人体を測る —寸法・形状・身体—. 東京, 東京電機大学出版局, 2006, バイオメカニズム・ライブラリー.

[26] Animazoo UK Ltd. Products, `http://www.animazoo.com/motion-capture-systems/`.

[27] Xsens Technologies B.V. "Xsens MVN". `http://www.xsens.com/en/general/mvn`.

[28] Zimmerman, Thomas G.; Lanier, Jaron; Blanchard, Chuck; Bryson, Steve; Harvill, Young. "A hand gesture interface device". *Proceedings of the SIGCHIGI conference on Human factors in computing systems and graphics interface*. ACM, 1987, p. 189–192.

[29] Sturman, David J.; Zeltzer, David. "A survey of glove-based input". *IEEE Computer Graphics and Applications*. 1994, vol. 14, p. 30–39.

[30] CyberGlove Systems LLC. `http://www.cyberglovesystems.com/`.

[31] Milne, A. D.; Chess, D. G.; Johnson, J. A.; King, G. J. W. "Accuracy of an electromagnetic tracking device: A study of the optimal operating range and metal interference". *Journal of Biomechanics*. 1996, vol. 29, no. 6, p. 791–793.

[32] Birkfellner, W.; Watzinger, F.; Wanschitz, F.; Enislidis, G.; Kollmann, C.; Rafolt, D.; Nowotny, R.; Ewers, R.; Bergmann, H. "Systematic distortions in magnetic position digitizers". *Medical Physics*. 1998, vol. 25, no. 11, p. 2242–2248.

[33] Kindratenko, Volodymyr V. "A survey of electromagnetic position tracker calibration techniques". *Virtual Reality*. 2000, vol. 5, no. 3, p. 169–182.

[34] LaScalza, Suzanne; Arico, Jane; Hughes, Richard. "Effect of metal and sampling rate on accuracy of flock of birds electromagnetic tracking system". *Journal of Biomechanics*. 2003, vol. 36, no. 1, p. 141–144.

[35] 北野正雄. 新版 マクスウェル方程式. 東京, サイエンス社, 2009, SGC Books, P4.

[36] Kalmus, Henry P. "A new guiding and tracking system". *IRE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics*. 1962, vol. 9, no. 1, p. 7–10.

[37] Kuipers, Jack. "Object tracking and orientation determination means, system

and process". United States Patent 3,868,565, February 1975.

[38] Kuipers, Jack. "Tracking and determining orientation of object using coordinate transformation means, system and process". United States Patent 3,983,474, September 1976.

[39] Kuipers, Jack. "Apparatus for generating a nutating electromagnetic field". United States Patent 4,017,858, April 1977.

[40] Raab, Frederick H. "Remote object position locater". United States Patent 4,054,881, October 1977.

[41] Raab, Frederick H.; Blood, Ernest B.; Steiner, Terry O.; Jones, Herbert R. "Magnetic position and orientation tracking system". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1979, vol. 15, no. 5, p. 709–718.

[42] Raab, Frederick H. "Quasi-static magnetic-field technique for determining position and orientation". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 1981, vol. 19, no. 4, p. 235–243.

[43] Kuipers, Jack. "Method and apparatus for determining remote object orientation and position". United States Patent 4,742,356, May 1988.

[44] Paperno, Eugene; Sasada, Ichiro; Leonovich, Eduard. "A new method for magnetic position and orientation tracking". *IEEE Transactions on Magnetics*. 2001, vol. 37, no. 4, p. 1938–1940.

[45] 阿刀田 央一, 中村 雄一, 冨澤 眞樹, 横山 一也, 今田 忠博. "磁気式モーションキャプチャ装置における双極子配置と座標逆算アルゴリズムの一設計法". 計測自動制御学会論文集. 1998, vol. 34, no. 5, p. 445–453.

[46] 櫻田 武嗣, 中川 正樹. "磁気式モーションキャプチャ装置における双極子 2 個による位置・姿勢決定方式とアルゴリズム". 電子情報通信学会論文誌 C. 2002, vol. 85, no. 6, p. 485–491.

[47] Polhemus. "LIBERTY". 2008. Product brochure, `http://www.polhemus.com/`.

[48] Ascension Technology Corporation. "3D Guidance trakSTAR". 2010. Product brochure, `http://www.ascension-tech.com/`.

[49] "ヘッドサイトテレビジョン装置 : C. P. Comeau, J. S. Bryan : Headsight Television System Provides Remote Surveillance. Electronics. 34 45, (1961. 11. 10)". テレビジョン. 1962, vol. 16, no. 10, p. 627–628.

[50] Blood, Ernest B. "Device for measuring position and orientation using nondipole magnetic fields". United States Patent 5,600,330, February 1997.

[51] 笹田 一郎, 森本 博. “高速モーションキャプチャのための線形勾配磁界と一様磁界を用いた三次元姿勢・位置検出”. 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-98-226. 1998.

[52] Sasada, Ichiro; Morimoto, Hiroshi. “A new method for fast motion-capturing in three dimensional space using a global linear-gradient and two uniform magnetic fields”. *Digests of INTERMAG 99*, BS-11. Kyongju, Korea, IEEE. 1999.

[53] 笹田 一郎. “姿勢位置測定装置及び測定方法”. 日本国特許庁 特許第 4291454 号, April 2009.

[54] 江村 超, 熊谷 正朗, 野村 亮太. “回転磁界と差動磁界を用いたモーションキャプチャの開発”. 計測自動制御学会論文集. 2002, vol. 38, no. 2, p. 129–136.

[55] 熊谷 正朗, 赤松 和禎. “磁気式モーションキャプチャに関する研究”. 計測自動制御学会東北支部第 226 回研究集会資料, 226-10. 2005.

[56] 熊谷 正朗, 赤松 和禎. “磁気式モーションキャプチャに関する研究（第 2 報）—直方体励磁コイルの実装と誤差解析—”. 計測自動制御学会東北支部第 233 回研究集会資料, 233-2. 2006.

[57] 岩堀 長慶. ベクトル解析. 東京, 裳華房, 1960, 数学選書, No. 2.

[58] Wahba, Grace; Farrell, J. L.; Stuelpnagel, J. C.; Wessner, R. H.; Velman, J. R.; Brock, J. E.; Desjardins, R. “Problem 65-1: A least squares estimate of satellite attitude”. *SIAM Review*. 1966, vol. 8, no. 3, p. 384–386.

[59] 中川 徹, 小柳 義夫. 最小二乗法による実験データ解析—プログラム SALS. 東京, 東京大学出版会, 1982, UP 応用数学選書, 7.

[60] 矢部 博, 八巻 直一. 非線形計画法. 東京, 朝倉書店, 1999, 応用数値計算ライブラリ.

[61] Hashi, Shuichiro; Toyoda, Masaharu; Yabukami, Shin; Ishiyama, Kazushi; Okazaki, Yasuo; Arai, Ken-Ichi. “Wireless magnetic motion capture system—compensatory tracking of positional error caused by mutual inductance”. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2007, vol. 43, no. 6, p. 2364–2366.

[62] ストラング, G. 線形代数とその応用. 東京, 産業図書, 1978. 山口 昌哉 監訳, 井上 昭 訳.

[63] 久保田 光一, 伊理 正夫. アルゴリズムの自動微分と応用. 東京, コロナ社, 1998, 現代非線形科学シリーズ, 3.

[64] Wynn, P. “Acceleration techniques for iterated vector and matrix problems”. *Mathematics of Computation*. 1962, vol. 16, no. 79, p. 301–322.

[65] 大森 英樹. 多変数の微分積分. 東京, 裳華房, 1989, 数学シリーズ.

[66] Wynn, P. "On a device for computing the $e_m(s_n)$ transformation". *Mathematical Tables and Other Aids of Computation.* 1956, vol. 10, no. 54, p. 91–96.

[67] 長田 直樹. "収束の加速法". 数理解析研究所講究録. 京都大学数理解析研究所, 1994, vol. 880, p. 28–43.

[68] Sidi, Avram. *Practical Extrapolation Methods.* Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2003, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 10.

[69] Baker, George A., Jr.; Graves-Morris, Peter. *Padé Approximants.* Second edition, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1996, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 59.

[70] グロエッチュ, チャールズ W. 数理科学における逆問題. 東京, サイエンス社, 1996, 別冊・数理科学 (1996 年 6 月). 金子 晃, 山本 昌宏, 滝口 孝志 訳.

[71] Python Software Foundation. "Python Programming Language - Official Website". `http://www.python.org/`.

[72] Numpy developers. "Older Array Packages". `http://www.numpy.scipy.org/old_array_packages.html`.

[73] Hinsen, Konrad. "ScientificPython". `http://dirac.cnrs-orleans.fr/plone/software/scientificpython/`.

[74] "Maxima, a Computer Algebra System". `http://maxima.sourceforge.net/`.

[75] Karlsson, J.; Wallin, H. "Rational approximation by an interpolation procedure in several variables". *Padé and Rational Approximation: Theory and Applications.* New York, Academic Press, 1977, p. 83–100.