A constitutive representation on the production of glottal waves

田部, 洋祐

https://doi.org/10.15017/459601

出版情報：九州大学, 2006, 博士（芸術工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

付録 B

帯領域での渦糸とわき出しを表す解析関数の導出

図 B.1 に示すような無限帯領域 (ζ 平面) を考える。点 ν_0 と点 ζ_p は，それぞれ渦糸の中心位置とわき出しの位置を表している。無限帯領域での渦糸やわき出しを表す複素速度ポテンシャルを求めるには，この領域を図 B.2 に示すような上半平面 (ϖ 平面) に写像するのが便利である。

まず，無限帯領域と上半平面を結ぶ写像関数の導出を行う。無限帯領域で ξ 軸に平行に流れる一様流を表す複素速度ポテンシャルは

$$f = V\zeta \tag{B.1}$$

で与えられる。この流れは，上半平面では原点にわき出しのあるときの流れであり

$$f = n \log \varpi + \mathrm{const} \tag{B.2}$$

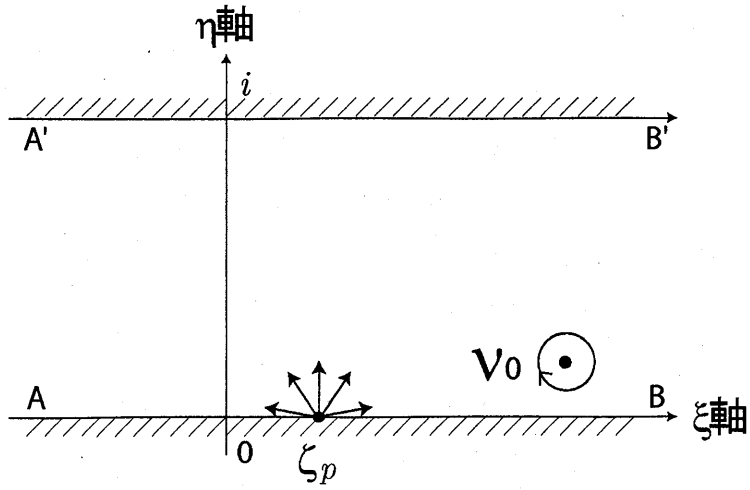
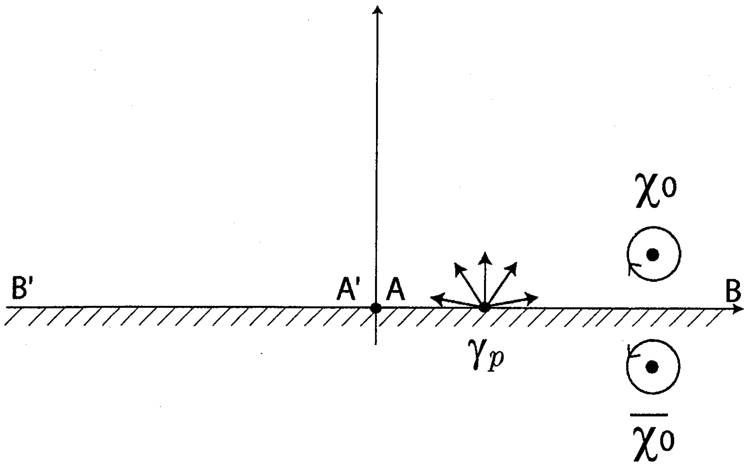


図 B.1　無限帯領域 (ζ 平面) での渦糸とわき出し



図B.2 上半平面 (ϖ 平面) での渦糸とわき出し

という形で与えられる。等角写像に際して流量が保存されることから

$$V = n\pi$$

となり，式 (B.1)(B.2) から，無限帯領域と上半平面を結ぶ写像関数

$$\zeta = \frac{1}{\pi}\log\varpi, \qquad \varpi = e^{\pi\zeta} \tag{B.3}$$

が得られる。ここでは，$\zeta = 0$ が $\varpi = 1$ に対応するように式 (B.2) の const を定めた。

式 (B.3) を利用して，無限帯領域での渦糸を表わす式 (3.89) の導出を行う。点 ν_0 の渦糸は，上半平面の点 χ_0 に写像される。ここで壁の影響により，それぞれ鏡像 $\overline{\chi_0}$ が現れる。したがって，無限帯領域での強さ 1 の渦糸を表す速度ポテンシャルは，上半平面において

$$f = i\log\frac{(\varpi - \chi_0)}{(\varpi - \overline{\chi_0})} \tag{B.4}$$

で与えられる。式 (B.3) より

$$\varpi = e^{\pi\zeta}, \quad \chi_0 = e^{\pi\nu_0}$$

であるから

$$\begin{aligned} \varpi - \chi_0 \quad &= e^{\pi(\zeta+\nu_0)/2}\{e^{\pi(\zeta-\nu_0)/2} - e^{-\pi(\zeta-\nu_0)/2}\} \\ &= 2e^{\pi(\zeta+\nu_0)/2}\sinh\tfrac{\pi}{2}(\zeta-\nu_0) \end{aligned}$$

が得られる。$\varpi - \overline{\chi_0}$ についても同様に計算し，これらを式 (B.4) に代入すれば

$$f = \mathrm{C}_0 + i\log\frac{\sinh\frac{\pi}{2}(\zeta-\nu_0)}{\sinh\frac{\pi}{2}(\zeta-\overline{\nu_0})} \tag{B.5}$$

が得られる。ここで

$$\mathrm{C}_0 = \frac{\pi}{2}i(\nu_0 - \overline{\nu_0})$$

であり，ζ を含まない。したがって，式 (B.5) の C_0 の項を除いたものが，無限帯領域での渦糸を表わす式 (3.89) を与える。

次に，無限帯領域でのわき出しを表わす式 (3.24) の導出を行う．点 ζ_p のわき出しは，上半平面の点 γ_p に写像される．ここで，無限帯領域でのわき出した流量が半分ずつ，$\xi \to \pm\infty$ に流れ去ることを考えると，上半平面では，原点にわき出しの半分の強さのすい込みが存在することになる．したがって，無限帯領域での強さ 1 のわき出しを表わす複素速度ポテンシャルは，上半平面において

$$f = \log(\varpi - \gamma_p) - \frac{1}{2}\log\varpi \tag{B.6}$$

で与えられる．式 (B.3) より

$$\begin{aligned} \varpi &= e^{\pi\zeta}, \\ \varpi - \gamma_p &= 2e^{\pi(\zeta+\zeta_p)/2}\sinh\tfrac{\pi}{2}(\zeta - \zeta_p) \end{aligned}$$

であるから，これらを式 (B.6) に代入すれば

$$f = \mathrm{C}_1 + \log\{\sinh\frac{\pi}{2}(\zeta - \zeta_p)\} \tag{B.7}$$

が得られる．ここで

$$\mathrm{C}_1 = \log 2 + \frac{\pi}{2}\gamma_p$$

であり，ζ を含まない．したがって，式 (B.7) の C_1 の項を除いたものが，無限帯領域でのわき出しを表わす式 (3.24) を与える．